

HANDBUCH

DER

VERMESSUNGSKUNDE

VON

DR W. JORDAN

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU HANNOVER

DRITTER BAND

LANDES-VERMESSUNG

UND

GRUNDAUFGABEN DER ERD-MESSUNG

VIERTE VERBESSERTE UND ERWEITERTE AUFLAGE

STUTTGART

J. B. METZLERSCHER VERLAG

1896

J. B. Metzlersche Buchdruckerei, Stuttgart.

VORWORT.

Diese neue vierte Auflage des dritten Bandes des „Handbuchs der Vermessungskunde“ giebt im Vergleich mit der vorhergehenden dritten Auflage von 1890 viele Ergänzungen und Weiterführungen, namentlich die Theorieen der rechtwinkligen konformen Coordinaten und verschiedene Theorieen von queraxigen Coordinaten.

Dagegen sind die nur theoretisch mathematischen Teile gekürzt, und auf das Nötigste beschränkt worden.

Es war auch bei diesem Bande, wie bei der Methode der kleinsten Quadrate, das Bestreben des Verfassers, dem Feld- und Landmesser, welcher zunächst nur das Verständnis seiner Landesvermessung für Katastervermessung und ähnliche Zwecke sucht, in einer mässigeu Zahl von Paragraphen die einfachen Theorieen zurecht zu legen und dabei Andeutungen zu geben, welche Teile zunächst überschlagen werden können.

So wird ein Württembergischer, Bayerischer oder Preussischer Landmesser zum ersten Verständnis seiner amtlichen Anweisungen kaum mehr nötig haben, als den technischen Teil von Kap. I, und von Kap. III—V etwa folgende theoretische Paragraphen: § 40.—43., § 45.—49., § 53.—57., dazu gehört § 59. als geschichtlicher Abschluss; und als erster Ausblick auf weiteres genügt noch § 60. und § 65. nebst § 68.

Nach dem Erfassen dieser einfachen Teile wird sich der Wunsch, auch noch weiteres kennen zu lernen, wohl von selbst einstellen.

In jüngster Zeit sind die konformen Coordinaten für Kataster- und ähnliche Aufnahmen so lebhaft erörtert worden, dass deren ausführliche Behandlung in § 50.—52., § 58 und später genauer in § 85.—89. erwünscht sein wird, wie auch die Kenntnis des allgemein konformen Systems der preussischen Landesaufnahme mit der Gaussschen Kugel in Kap. VIII heute dem weiter strebenden preussischen Landmesser unerlässlich ist.

Die Behandlung der geodätischen Linie durch geometrische Differentialbetrachtungen z. B. § 54. und namentlich in § 69., § 71. u. a. giebt die Möglichkeit, das, was man von dieser Theorie wirklich braucht, so kurz und anschaulich zu erlangen, dass wir diese Behandlung trotz der von abstrakt mathematischer Seite möglicherweise dagegen gemachten Einwände in unserem Falle für die beste halten.

Zur vorhergehenden 4. Auflage des ersten Bandes, Methode der kleinsten Quadrate, 1895, möchte ich ausser anderen wohlwollenden Besprechungen, der eingehenden und zustimmenden Kritik von Herrn Oberlandmesser Seyfert in „Zeitschr. f. Verm. 1896“, S. 150—156 besonders danken, zumal auch Herr Seyfert dem Verfasser eine ziemliche Zahl von Druckfehlern und anderen kleinen Versehen in jenem Bande mitgeteilt hat, welche benützt werden werden. Bei dem Drange, vorliegenden 3. Band 4. Auflage wegen Bedarfs im Buchhandel so rasch als möglich herauszugeben, ist es nicht unmöglich, dass auch in diesem Bande einige Druckfehler oder andere kleine Versehen stehen geblieben sind, dagegen ist dem Sinne nach alles was in dieser Auflage aufgenommen ist, seit Jahren nun so durchgearbeitet, dass der Band mit Ruhe den deutschen Landmessern hinausgegeben werden kann.

Als eine Art Vorwort zu unseren 3 Bänden des Handbuchs der Vermessungskunde im Ganzen, und als Zusammenfassung der Anschauungen des Verfassers über die Aufgaben, welche unserer heutigen Feld- und Landmessung gestellt sind, haben wir im Nachfolgenden den Vortrag abgedruckt, welchen Verfasser auf der 25jährigen Jubiläums-Versammlung des deutschen Geometer-Vereins in Dresden am 3. August 1896 gehalten hat.

Hannover, August 1896.

Jordan.

Über die Entwicklung des deutschen Vermessungswesens im 19. Jahrhundert.

Festrede zur Feier des 25jährigen Jubiläums des deutschen Geometer-Vereins am 3. August 1896 in Dresden.

An dem Tage, an welchem unser Verein das 25jährige Jubiläum seines Bestehens feiert, geziemt es sich, zurückzublicken nicht bloss auf diese 25 Jahre, sondern noch weiter auf den Anfang dieses Jahrhunderts, mit welchem die heutige deutsche wissenschaftliche Feld- und Landmessung ihren Ursprung genommen hat.

Der allgemeine Aufschwung des nationalen Lebens nach den schweren Kriegen am Schlusse des vorigen und am Anfang dieses Jahrhunderts und die lange darauf folgende Friedenszeit hat unter vielen anderen Kulturarbeiten auch unserer Wissenschaft den Nährboden bereitet, auf dem sie als ein fast *neues* Werk gedeihen und wachsen konnte, denn alles was aus dem vorigen Jahrhundert an Karten, Plänen und geographischen Messungen in Deutschland stammt. kommt gegen die neuen Werke dieses Jahrhunderts nicht mehr in Betracht.

Wir können diese lange Periode in zwei Epochen einteilen, die erste von Anfang bis zur Mitte mit *Bohnenberger* und *Soldner* als Führern kann die süddeutsche, und die zweite von der Mitte bis heute, welche an die Namen *Gauss*, *Bessel*, *Baeyer* geknüpft ist, kann die norddeutsche Epoche genannt werden.

Dass die süddeutschen Staaten vorangingen, ist abgesehen von den geodätischen Kräften auch begreiflich durch die dort trotz der Kriegszeiten früher ruhig gewordenen staatlichen Zustände und zweitens aus dem Umstande, dass Staaten von mittlerer Grösse der Entwicklung von Landesvermessungen günstiger zu sein scheinen als Grossstaaten oder als ganz kleine Gebiete.

Eine einheitliche Vermessungswissenschaft, wie sie jetzt in akademischen Vorträgen, in Büchern und Zeitschriften sich herauskristallisiert hat, gab es am Anfange dieses Jahrhunderts noch nicht; in jedem Staate wurde fast von vorn angefangen, teilweise anfänglich nach fremden Mustern, aber bald allenthalben aus eigener Kraft und wissenschaftlicher Begeisterung.

Die wissenschaftlichen Kräfte kamen aus allen Berufsklassen, aus dem Militär, aus Baukunde, Astronomie, Mathematik, sogar aus Theologie (Bohnenberger) und Jurisprudenz (Paschen), und so kam es, dass die deutschen Landesvermessungen das bunteste

Bild der geodätischen Entstehung und Entwicklung bieten, dass z. B. in einem Lande mit Flurkarten, im anderen Lande mit Topographie begonnen wurde, dass hier der Winkelmesser, dort der Messtisch, an anderem Orte der magnetische Kompass und die Messkette, wieder anderswo Messlatten und Kreuzscheibe bevorzugt wurden, u. s. w. und dass heute noch in dem einen Staate etwas als vorzüglich und unersetzlich gilt, was in dem anderen Staate abfällig beurteilt und bei Seite gesetzt wird. Namentlich hat sich eine geodätische Mainlinie zwischen Süd und Nord, ähnlich wie die frühere politische Mainlinie, gebildet und länger als letztere erhalten.

Die Ursprünge unseres Faches sind auf den verschiedensten Gebieten zu suchen, dahin gehören namentlich:

1) Kriegswissenschaft mit Truppenführung,
2) Astronomie und wissenschaftliche Erdmessung,
3) Grundsteuerverwaltung und ältere Feldmessung,
4) Bau- und Kultur-Ingenieurwesen.

Wir betrachten diese 4 Zweige zunächst einzeln:

Militärische Aufnahmen.

In fast allen Staaten hat das dringende Bedürfnis von Karten zur Truppenführung die Topographie mit grundlegenden Triangulierungen in militärische Hände gebracht; es genügt dazu, an die Preussische Landesaufnahme zu erinnern, welche heute durchaus nicht mehr vorwiegend militärischen Zwecken dienend, doch noch ganz vom Generalstab geleitet und von Offizieren und militärischen Beamten ausgeführt wird. Die Soldaten waren die ersten, welche von der Noth gedrängt, gute Karten machen lernten; und aus ursprünglich rohen Schätzungs- und Augenmass-Aufnahmen hat sich die militärische Topographie allmählich zu einer Feinheit entwickelt, dass man heute unter Generalstabskarten die besten Karten zu verstehen pflegt, und dass z. B. in Preussen auch heute noch die Civilverwaltungen ihre Bedürfnisse in der Generalstabskarte zu befriedigen suchen. Auch auf wissenschaftlichem Gebiete glänzen militärische Namen wie z. B. *Baeyer*, *Schreiber* im schönsten Lichte.

Während die ganze Entwicklung unseres Jahrhunderts, namentlich in den Kleinstaaten, unzweifelhaft die Tendenz zeigt, dass die Militärgeodäten allmählich immer mehr Teile ihres Gebietes an die Civilgeodäten abgegeben haben, ist doch die oberste Leitung und Verantwortung der Topographie und jedenfalls der amtlichen *Kartographie* so innig mit der Landesverteidigung verwachsen, dass kein Kriegsminister eines Grossstaates diese aus der Hand geben wird.

Astronomie und Erdmessung.

Die Erde als Ganzes zu messen, früher als Kugel, dann als Ellipsoid, jetzt als Geoid, ist eine Aufgabe, würdig der höchsten Anspannung aller wissenschaftlichen und technischen Kräfte der Menschheit; und von den Erdmessern haben auch die Land- und Feldmesser, welche nur Länder, Städte und Feldmarken als bescheidene Teile der Mutter Erde messen wollen, einen guten Teil ihrer feineren Messungs- und Rechnungs-Methoden gelernt, indem die grossen Gelehrten, welche zuerst die Erde als Ganzes messen wollten, entweder selbst zur Landmessung übergingen oder wenigstens ihre Methoden vererbten. So war es allerorten mit den Koryphäen unseres Faches: *Snellius*, *Delambre*, *Bessel* und namentlich *Gauss!*

Als Gauss in der Einsamkeit der Lüneburger Heide die Winkel zu seiner Göttingen-Altonaer Gradmessung mass, ging seinem mathematischen Universal-Genie alsbald auch der Sinn auf für die *land*messerische Seite dieser Art von Beobachtungen; und auf jenen einsamen Heide-Stationen sind die Ursprünge zu suchen der beiden mathematisch-geodätischen Kleinodien, welche den Ruhm der deutschen Geodäsie ausmachen, die Ausgleichung der Dreiecksnetze nach der Methode der kleinsten Quadrate, und die konforme Projektion in ihren verschiedenen Anwendungen,' sowie die allgemeine Theorie der krummen Flächen.

Der Erdmessung verdanken wir in Preussen die höchste wissenschaftlich geodätische Behörde, das geodätische Institut, dessen Ruhm und unbestrittene wissenschaftliche Autorität alle Kulturländer der Erde umfasst. Aber die amtlichen Gliederungen des Grossstaates haben es so gefügt, dass zur Zeit der befruchtende wissenschaftliche Strom nur auf mittelbarem Wege von der Erdmessung zur Land- und Feldmessung fliesst.

Was die hier mitbeteiligte Astronomie betrifft, so hat dieselbe zur Geodäsie lange Zeit wie die Mutter zur Tochter gestanden, oder man kann sagen ähnlich wie im Mittelalter die Wissenschaft als „*ancilla theologiae*“ bezeichnet wurde, war es auch früher im Verhältnis zwischen Geodäsie und Astronomie. Die Schärfe der messenden und rechnenden Methoden kam zweifellos von der Astronomie zu uns, und es gab eine Zeit, da man glaubte, scharfes und umfassendes mathematisches Rechnen nur auf Sternwarten lernen zu können, während jetzt die Geodäsie der Dreiecksnetze und ähnliches als beste Schulung für mathematisches Rechnen gilt.

Katastervermessung.

Es ist ein eigentümliches Schicksal, dass die genauesten Aufnahmen, die wir haben, in welchen jedes Quadratmeter von Grund und Boden, und jede Grenzfurche dargestellt wird, ursprünglich lediglich wegen der staatlichen Besteuerung des Grundeigentums unternommen worden sind, so dass in den meisten Staaten diese Messungen noch unter dem Finanzministerium stehen, das doch mit Technik und mit mathematischen Messungen sonst gar nichts zu thun hat.

Die Katastervermessungen sind nach Ausdehnung, Massstab und Kostenaufwand bei weitem die bedeutendsten geworden; sie und die nahe verwandten Flurzusammenlegungen sind der Nährboden für den grossen Stamm der Feld- und Landmesser überhaupt, namentlich in solchen Staaten, in welchen Topographie und Erdmessung besonders abgezweigt sind.

Die Katastermessungen haben die Messungs- und Rechnungsmethoden ausserordentlich ausgebildet, der wohl organisierte Arbeitsbetrieb, das sogenannte Arbeiten vom Grossen ins Kleine, die langjährige Ausfeilung aller kleinen Messungs- und Rechnungshilfen, hat es dahin gebracht, dass die hunderte und tausende von Parzellen in Städten und Feldmarken sozusagen fabrikmässig gemessen, berechnet und kartiert werden, in einer Weise, dass die Kosten gegen die etwaige vieltausendfache Einzelaufnahme aller Parzellen fast verschwindend werden.

Die Katastervermessungen sind im Laufe der Zeit über ihren ursprünglichen Zweck gerechte Steuerverteilung weit hinaus gewachsen; man hat gefunden, dass solche grosse Aufnahmen als Grundlage *aller* anderen Karten gebraucht werden können, dass sich darauf die besten topographischen Karten, Vorarbeiten für Strassen, Eisenbahnbau u. s. w. vorzüglich gründen lassen.

Eine wichtige Frage hat sich hieran aus anderem Gebiete angeschlossen, die *Rechtsfrage* mit der örtlichen Versicherung aller Grenzmarken und mit der Grundbuchsanlage durch Eintragung aller ideellen Wertbestimmungen. Man hat gefunden, dass die Katasterkarten in Verbindung mit dem Grundbuche das beste Mittel zur Rechtssicherheit bei Käufen und Hypotheken sind.

Aber ein letztes Ziel, beweiskräftige Grundkarten mit rechtskräftigen Flächenangaben sind bis heute in den meisten Staaten ein frommer Wunsch geblieben, und ebenso liegt auch die Vermarkung der Grundstücke noch im Argen, indem dafür nur in wenigen Staaten die nötigen Gesetze bestehen. Eine letzte Wertsteigerung kann man den Katasteraufnahmen und Flurkarten zu Teil werden lassen dadurch, dass man dieselben vervielfältigt und der Öffentlichkeit übergiebt, wie in den zwei Stammländern Bayern und Württemberg geschehen ist; und wenn man vollends wie in Württemberg den letzten Schritt thut, nämlich die Flurkarten in 1 : 2500 mit Höhenzahlen und mit Horizontalkurven zu versehen, so hat man damit eine Universalkarte, welche den kühnsten Wünschen genügen muss (vgl. Schlebach Mitteilung über die Höhenaufnahmen in Württemberg im Massstabe 1 : 2500 und die Herstellung einer topographischen Karte im Massstab 1 : 25000 „Zeitschr. f. Verm. 1896“. S. 353—361).

Ingenieur-Messungen.

Der Feldmesser im gewöhnlichen Sinne liefert nur Lagepläne; der Strassen-, Wasser- und Eisenbahnbauer, der Topograph und der Kulturingenieur liefert dazu auch die Höhen, er nivelliert und tachymetriert; und man kann wohl sagen, die Eisenbahnbauer seit 1850 haben das Nivellieren zwar nicht erfunden aber soweit vorbereitet, dass es vor 30 Jahren für erdmessungsfähig erklärt werden konnte. Das einfache Nivellierverfahren hat auch seit jener Zeit die trigonometrische Höhenmessung auf weite Sichten grossenteils verdrängt und nur im Kleinen übrig gelassen, wo sie am Platze ist.

Unter den Ingenieurmessungen ist auch besonders die sogenannte Tachymetrie zu erwähnen als bestes Hilfsmittel für Geländeaufnahmen zu Vorarbeiten für Strassen-, Eisenbahn- und Wasserbau u. dergl. Dieses Verfahren, ursprünglich fremdländischen Ursprungs hat sich bei uns glücklich eingebürgert und weiter entwickelt und hat auch Aussicht, die früher ausschliesslich als Militärangelegenheit betrachtete Herstellung topographischer Karten in neue Bahnen zu lenken.

Das Vorstehende liefert einen Überblick über die Herkunft und die Teile unserer Wissenschaft im Ganzen. Um von der Entwicklung im Einzelnen ein Bild zu geben, müssen wir versuchen, das was die einzelnen Staaten beigetragen haben, auseinander zu setzen.

Die Südstaaten *Bayern* und *Württemberg* voran, unter Soldner und Bohnenberger, haben die erste Bahn gebrochen, sie haben zusammenhängende Triangulierungen mit einheitlichen rechtwinkligen Coordinatensystemen eingeführt, ihre Flurkarten im ganzen Lande in 1 : 5000 und 1 : 2500 lithographiert, feine Instrumente gebaut, eine selbständige geodätische Litteratur hervorgebracht, kurz in gegenseitiger Ergänzung ein erstes geodätisches Zentrum geschaffen.

Baden und *Hessen* haben anfänglich selbständig begonnen, sie sind in der weiteren Entwicklung aber doch der süddeutschen Gruppe zuzuzählen. Baden glänzt durch seine frühzeitige, erste, topographische Aufnahme mit Horizontalkurven, und seit 1852 durch seine für andere Staaten mustergiltig gewordene Katastermessung.

Der Weg weiter nach Norden führt uns in ein Land *Hannover* mit *Braunschweig*, welche zwar keine gründlichen und umfassenden Landesvermessungen hervorgebracht, aber eine geistige geodätische Kraft erzeugt und zur Entwicklung gebracht haben, den grossen *Gauss*, welcher für Geodäsie allein mehr geleistet hat als Jahrhunderte vor ihm und als bis jezt ein halbes Jahrhundert nach ihm; seine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate und seine konformen und anderen Coordinaten-Theorieen sind unsterblich. (vgl. § 86.—88. Kap. VIII. und Kap. X).

Der Grossstaat *Preussen* blieb zwar anfänglich im Ganzen zurück, hat aber in den Rheinlanden schon frühzeitig Katasteraufnahmen gemacht und in späteren Zeiten auch in den Stammlanden zur Katastervermessung vieles beigetragen. Namentlich hat aber Preussen seinen Teil an der Geodäsie reichlich nachgeholt durch die Bessel-Baeyer'schen Werke mit der anschliessenden heutigen Landestriangulation und schliesslich durch die unsterbliche Schaffung der internationalen Erdmessung.

Das Land *Sachsen* hat seinen Tribut geleistet durch die schon in früheren Jahrhunderten begonnene vortreffliche topographische Aufnahme, welche in der Erfindung der Lehmann'schen Bergschraffierung ihren Glanzpunkt gefunden hat und dann in neuester Zeit durch ein Gradmessungs- und Landesvermessungs-Triangulierung, welche an Genauigkeit alles vorher dagewesene übertroffen hat.

Mecklenburg hat das Verdienst, als einziger Staat in Deutschland die konforme Projektion nach den Prinzipien von Gauss in seinem Coordinatensystem theoretisch und praktisch eingeführt und bewahrt zu haben (vgl. § 81.).

Oldenburg hat als erster Staat in Norddeutschland einheitliche Coordinaten und Polygonzüge eingeführt.

Kurz alle Teilländer unseres Gesamtvaterlandes, welche hier unmöglich alle vorgeführt werden können, haben ihren Teil dazu redlich beigetragen, dass unser Gesamtvaterland im Besitze einer Summe von Erfahrungen und Kenntnissen in Landmessung ist wie kein anderes Land der Erde; und es liegt hier einer der wenigen Fälle vor, dass unsere sonst so unglücklich gewirkt habende politische staatliche Zersplitterung zum Segen geworden ist.

Neben der vorstehenden Entwicklung von Süd nach Nord besteht eine zweite eigentümliche weniger staatlich als geographisch fortschreitende Entwicklungsbewegung von West nach Ost, die sich an die Instrumente Messtisch und Theodolit knüpft.

Der Streit Messtisch-Theodolit, welcher noch in den Anfangsjahren unseres Vereins die Geister bewegte, kann jetzt als ausgefochten gelten zu Gunsten des Winkelmessens und des Rechnens mit sinus und cosinus, wenigstens was eigentlich genaue Messungen wie für Kataster u. s. w. betrifft, aber zu Anfang des Jahrhunderts lag die Sache gerade umgekehrt. Für Kataster war in Bayern, Württemberg, Sachsen und für Topographie auch in Baden und Preussen der Messtisch allmächtig, und was heute als wesentlichstes Element aller genauer Einzelmessungen gilt, die Theodolit-Polygonzüge, das wurde etwa 1810—1820 im äussersten Westen geschaffen in den preussischen Rheinlanden und in Hessen, eroberte allmählich Oldenburg, Baden, Württemberg, Bayern und Alt-Preussen. Der Bayerisch-Schwäbische Ruhm von 1820—1840 wird durch die verspätete Einführung der Theodolitzüge wieder ziemlich verdunkelt.

Coordinaten-System.

Ein wichtiges Element in der Entwicklungsgeschichte unseres Faches bilden die verschiedenen Coordinaten-Systeme. Solange jede Stadt oder Feldmark lediglich in sich selbst als Ganzes behandelt und gemessen wurde, lieferte die Feldmessung zwar ein Konglomerat von Einzelplänen, aber keine zusammenhängende Landesvermessung. Die schönsten Proben der Grenzanschlüsse liess man sich entgehen; und die militärischen Topographen hatten ein Recht, auf solches Stück- und Flickwerk geringschätzend herabzusehen und die mathematisch-geodätisch orientierte Generalstabskarte als einziges wissenschaftliches Kartenwerk zu preisen. Sobald man aber anfing, die Stadt- und Gemeindekarten innerhalb ganzer Länder triangulatorisch in grossen Coordinaten-Systemen zusammenzufassen und dadurch jeder einzelnen wenn auch noch so kleinen Latten- und Kreuzscheibenmessung ihren Platz auf dem Erd-Ellipsoid auch nach geographischen Coordinaten anzuweisen, sind die Feld- und Landmessungen mit einem Schlage im wissenschaftlichen Range um eine hohe Stufe gestiegen, und allen anderen Messungen überlegen geworden.

Diesen wichtigen Schritt haben in konsequenter Weise zuerst die deutschen Südstaaten gethan; sie haben dadurch die wichtige Verbindung der niederen Feld- und Landmessung mit der mathematisch-astronomisch orientierten höheren Geodäsie hergestellt.

Ein Bayerischer Geodät aus den ersten Jahrzehnten unseres Jahrhunderts, *Soldner*, hat hieraus einen Ruhm erworben, der seinen Namen in inniger Verbindung mit diesen Verhältnissen bis heute erhalten hat, obgleich er die nach ihm benannten rechtwinkligen Coordinaten durchaus nicht selbst erfunden, sondern nach französischen Mustern übernommen hat, und obgleich jene nun sogenannten Soldner'schen Coordinaten für Landestriangulierung und für Katastervermessung durchaus nicht mehr die besten sind. Aber Soldner und sein schwäbischer Nachbar Bohnenberger haben die grosse praktische Bedeutung solcher Coordinaten mit richtigen Blicken frühzeitig erfasst, sie haben die mathematische Theorie derselben auf alle praktischen Fälle angewendet und veröffentlicht, und sie haben die Sache so ins einzelne ausgearbeitet, dass die süddeutschen Vermessungen sich schon frühe einer Klarheit und Ordnung erfreuten, welche man damals anderwärts noch nicht kannte. Bohnenbergers Veröffentlichung hierüber vom Jahre 1826 hat auf weite Kreise aufklärend und anregend gewirkt. Auch Baden, welches ursprünglich nur rechtwinklige ebene Coordinaten gehabt hatte, und Hessen folgten nach (vgl. S. 325—328).

Es sind noch zwei deutsche Länder zu nennen, welche auch schon in den ersten Decennien unseres Jahrhunderts solche oder ähnliche Coordinaten hatten, nämlich die preussischen Rheinlande und Oldenburg, aber es sind keine Litteraturnachweise dafür vorhanden und in den Rheinlanden wurde das Prinzip der einheitlichen Coordinaten durch Einführung zahlreicher Lokalsysteme wieder zerstört und musste 1879 wieder von neuem eingeführt werden. Dass die Oldenburger Coordinaten von 1837 dieselben sind, wie die gleichzeitigen süddeutschen Coordinaten, davon habe ich mich durch Nachrechnen der gütigst überlassenen Zahlenwerte überzeugt; ob und welche Mustervorgänge etwa in Oldenburg benützt worden sind, kann aus den vorhandenen Nachrichten nicht ersehen werden (vgl. S. 333—335).

Im übrigen Deutschland wollte man die rechtwinkligen grossen Coordinatensysteme mit Berücksichtigung der Erdkrümmung lange nicht verstehen; z. B. in Preussen

mit Ausnahme der Rheinlande, scheinen vor der Einführung der jetzigen 40 Soldnerischen Systeme im Jahre 1879, soweit die Nachrichten reichen, nur zerstreute kleinere ebene rechtwinklige Systeme vorhanden gewesen zu sein (vgl. S. 332—333).

Auch in Sachsen sind schon vor der neuen Gradmessungs- und Landesvermessungs-Triangulierung 1860—1890, welche ein Soldnersches Coordinatensystem eingeführt hat, rechtwinklige Coordinaten in mancherlei Art, wie es scheint meist eben benützt worden.

Eine wesentliche Verbesserung und Verfeinerung auf diesem Gebiete wurde geliefert in Hannover 1820—1840 durch die „*konformen*“ Coordinaten, welche Gauss für die Hannoversche Triangulierung und Topographie eingeführt und berechnet hat, deren Prinzip ein Schüler von Gauss, *Paschen,* in anderer Form auch in Mecklenburg zur Anwendung gebracht hat, wo es als einziges derartiges System in Deutschland heute noch besteht und mit Begeisterung hochgehalten wird (vgl. S. 335—336).

Es ist nämlich ein eigentümliches Schicksal, dass das Coordinaten-Werk des grossen Gauss von diesem selbst nicht mehr abgeschlossen und veröffentlicht, sondern erst 1866 von Schreiber und Wittstein der Gefahr des Vergessens und Verlorengehens entrissen wurde, und dass es auch *nach* dieser Veröffentlichung nicht genügend gewürdigt worden ist (vgl. S. 328—329 und S. 458—459).

So kam es dass die klassische geodätische Erbschaft in Hannover selbst, nach 1866 nicht weiter verwertet wurde und dass in Preussen noch im Jahr 1879 das *ältere* sogenannte Soldner'sche, süddeutsche Prinzip in 40 Katastersystemen eingeführt wurde, während in Preussen nur die Landesaufnahme ein allgemeines konformes System eingeführt hat (vgl. S. 330—333).

Im Ganzen haben wir in Deutschland heute etwa 50 Coordinatensysteme, als Ergebnis einer 100jährigen politisch und geodätisch ungleichen Entwicklung, während rein mathematisch betrachtet, etwa 10 Systeme ausreichen würden (vgl. S. 326).

Noch Manches könnte zur Entwicklungsgeschichte der Messungs- und Rechnungsmethoden in den einzelnen Staaten und zur Vergleichung ihrer Beiträge zum Ganzen gesagt werden, aber die gerechte Würdigung aller Vorzüge und Mängel wäre wohl hier unmöglich.

Nach allem aber ist soviel sicher, dass es in unserem Gesamtvaterlande nur noch einer kritisch ordnenden Hand bedarf, um nach der Regel „Prüfet alles und behaltet das Beste“ aus den zerstreuten Landesvermessungen ein Ideal heraus zu schälen, das als teure Errungenschaft ins nächste 20te Jahrhundert hinüber gebracht werden muss.

Wir wollen am Schlusse hierauf zurückkommen, inzwischen aber noch verschiedene Seiten unseres Gegenstandes besonders betrachten.

Die soziale und wissenschaftliche Stellung der Landmesser.

Ebenso verschieden wie die Berufsarten und Stände, aus denen die ersten Landmesser hervorgegangen sind, waren auch die Stellungen der Landmesser selbst in der menschlichen Gesellschaft. Der frühere Offizier, der ehemalige Astronom blieb angesehen, wenn er das Feldgeschütz oder das Passage-Instrument mit dem Messtische oder mit dem Feld-Theodolit vertauschte; aber die von unten heraufgekommenen Landmesser im eigentlichen Sinne wurden lange scheel angesehen auch bei den besten Leistungen; und merkwürdig, gerade unsere Berufsvettern, die Bauingenieure, wollten durchaus uns nicht als Amtsbrüder gelten lassen.



Viel wurde hier auch behördlicherseits gefehlt: Es gab Zeiten und Behörden, als man rasch Personal in grosser Zahl brauchte, da wurden gewesene Messgehilfen und noch weniger geeignete Personen zu Feldmessern gemacht. — Auch den wirklich berufsmässig ausgebildeten Leuten fehlte es vielfach an den nötigsten Kenntnissen; die einfache Volksschule war oft die Pflanzstätte der Feldmesser, und wenn dazu der Pythagoräische Lehrsatz und die Flächenberechnungssätze kamen, so war in der Messtisch-, Bussolen- und Kettenzeit das mathematische Wissen des Landmessers mancher Orten erschöpft; und so kam es auch, dass mancher im Verwaltungsdienste heraufgewachsene Beamte Entscheidungen über Fragen der höheren Geodäsie gefällt hat der in seinem Leben niemals mit $\frac{dy}{dx}$ sich gequält hatte.

Mancher deutsche Staat hat an hohen und höchsten Schulen Mathematik jahrzehnte lang vortragen lassen, ohne für die allernächste Anwendung derselben, nämlich Anwendung auf Landmessung, welche doch die Mutter aller Mathematik ist, Sorge zu tragen. Landmessung war ein Stiefkind.

Diese Zeiten sind hinter uns; in allen deutschen Staaten wird unser Fach mit seinen mathematischen und physikalischen Grundlagen ebenso gründlich gelehrt und geprüft, wie z. B. Baukunde, Maschinenbau u. s. w. Und doch fehlt noch *eines*: Die technischen Hochschulen sind dabei noch teilweise übergangen, und doch würde gerade auf diesen Schulen die Studiengenossenschaft mit Bauingenieuren und allen anderen Technikern unserem Ausbildungskampfe vollends zum Siege verhelfen.

Amtsthätigkeit und freie Wissenschaft.

Ohne amtlichen Auftrag ist praktisches Landmessen in diesem Jahrhundert nicht mehr möglich. Im vorigen Jahrhundert hat Bohnenberger eine trigonometrische Karte von Württemberg privatim gemessen und buchhändlerisch bezahlt zu machen gesucht; das ist jetzt ausgeschlossen, und ohne amtlichen Auftrag, sei es als Lebensberuf oder wenigstens als Nebenamt, kann Niemand mehr ein wirklicher Geodät werden. Trotzdem geht geodätische Wissenschaft namentlich in Verbindung mit Lehrthätigkeit auch noch neben der Praxis her, und sie hat wenigstens die schwierigen deduktiven Teile, Methode der kleinsten Quadrate, Coordinatensysteme, geodätische Linie u. s. w. für sich, welche die Praktiker den Professoren überlassen. Das Zusammenwirken — und manchmal auch das Entgegenwirken — zwischen den Vertretern der Praxis und der Theorie — wenn man so trennen kann, — erinnert lebhaft auch an das politische Leben; und ich möchte dazu zwei Stellen aus Treitschkes Deutscher Geschichte des 19. Jahrhunderts citieren (V. Teil S. 229): Der Minister der auswärtigen Angelegenheiten Eichhorn wurde 1840 Kultminister; er trat aus einem Amte, das von allen seinen Untergebenen unbedingten Gehorsam fordern muss, plötzlich hinüber zu der Leitung des geistigen Lebens, das seinen eigenen Gesetzen folgt, und vom Staate nur mittelbar mit schonender Hand gefördert werden kann. Was hier sich als Gegensatz zeigte, besteht auch bei uns: unbedingter Gehorsam bis zum lezten Formalitätenpunkte hinaus einerseits, und Freiheit der Wissenschaft andererseits sind Gegensätze, die beide in ihrer Art bis zu einem gewissen Grade ihre Berechtigung haben.

Ein anderes Analogon giebt ein Gerichtsurteil von 1843 (Treitschke V. Band S. 207) über einen bekannten Königsberger Volkskämpfer, der ein freies Wort der Kritik gewagt hatte. Das Tribunal erklärte: Mit der Ehrfurcht vor dem Könige sei

freimütiger Tadel der bestehenden Einrichtungen wohl vereinbar. Dieses Wort gilt auch für eine fachwissenschaftliche Vereinigung, wie diejenige des deutschen Geometer-Vereins, welche freie Kritik zu einem ihrer Lebenselemente zählen muss.

Verteilung der Messungen unter verschiedene Behörden.

Je kleiner ein Staat ist, desto besser kann das Zusammenwirken der verschiedenen geodätischen Faktoren sich gestalten; z. B. die zwei südwestdeutschen Staaten Baden und Württemberg, welche beide jeder auf seinem Gebiete, Mustergiltiges hervorgebracht haben, sind hiebei durch die Übersichtlichkeit aller amtlichen Verhältnisse wesentlich unterstützt worden, während im Grossstaat, in welchem 5 Ministerien sich in die geodätische Aufgabe teilen, Reibungen unvermeidlich sind, durch welche mancher Bruchteil der Kräfte lahmgelegt wird. Je mehr amtliche „Ressorts“ in Anspruch genommen werden müssen, desto weniger kann das wissenschaftliche Element zur Geltung kommen, und die Verteilung der geodätischen Befugnisse und Gewalten wird immer mehr der fachwissenschaftlichen Entscheidung entrückt.

Wir wollen als ein beliebiges kleines Beispiel hiefür die verschiedenen Messungen und Berechnungen der Landesaufnahme und des Katasters in Preussen betrachten. Dabei wird kein Süddeutscher begreifen, warum z. B. die trigonometrischen Punkte III. Ordnung *zweierlei* Coordinaten haben, erstens in der Landesaufnahme und zweitens im Kataster. Gewöhnlich wird auf diese Frage die Antwort gegeben, die Grösse des Landes im Vergleich mit den Mittel- und Kleinstaaten verlange dieses; allein diese Antwort ist nur mittelbar richtig; nicht die Grösse des Landes nach Quadratmeilen ist der Grund dieser Zweiheit, sondern die politische Grösse, und die dadurch bedingte Unabhängigkeit der „Ressorts“, und wenn die Landesaufnahme und das Kataster in derselben leitenden Hand wäre, so würde eine Form gefunden werden für einheitliche Coordinaten aller Punkte etwa von der II. Ordnung an, trotz der geographischen Grösse des Landes, und eine Menge Doppelarbeiten dieser und ähnlicher Art könnte erspart werden.

Die Verteilung der geodätischen Befugnisse im Staate hat Ähnlichkeit mit der Verteilung der politischen Gewalten. Ob in einem Staate die Regierung oder die Volksvertretung u. s. w. mehr Macht und amtliche Funktionen hat, das wurzelt in Jahrhunderte langen Entwicklungen, persönlichen Verdiensten auf der einen oder anderen Seite u. s. w. und ganz ähnlich verhält es sich auch in der Geodäsie, und was mathematisch geodätisch betrachtet, die beste Geschäftsverteilung wäre, das ist nicht allein ausschlaggebend neben dem, was in Jahrzehnten und Menschenaltern geschichtlich geworden ist.

Kosten der Vermessungen.

Die hohe Bedeutung der Vermessungsarbeiten im Staatsorganismus wird am deutlichsten veranschaulicht durch den Kostenaufwand, der zwar nicht genau bekannt ist, aber doch genügend genau geschätzt werden kann.

Von Preussen wissen wir z. B., dass allein das jährliche Budget der Landesaufnahme über 1 Million Mark beträgt (Gäde, „Zeitschr. f. Verm. 1885“, S. 242), ferner dass die Erhaltung und Fortführung des Katasters jährlich mehrere Millionen beansprucht, dass jährlich 200 000 Mark allein für Erneuerung der Karten und Bücher aufgewendet werden („Zeitschr. f. Verm. 1895“, S. 509).

Am genauesten hat ein Kollege aus Württemberg die jährlichen Vermessungskosten seines Landes ermittelt, nämlich jährlich rund 1 Million Mark bei 73 Millionen Gesamtaufwand („Zeitschrf. f. Verm. 1896“, S. 267—269, Steiff). Dieses mag genügen zu einer summarischen Schätzung für das Deutsche Reich: Württemberg hat 19 500 qkm Fläche und 2 Millionen Einwohner, das Deutsche Reich hat 540 000 qkm und rund 50 Millionen Einwohner. Rechnet man proportional der Fläche, so kommen 28 Millionen Mark und proportional der Einwohnerzahl, 25 Millionen Mark für unser grosses Vaterland heraus.

Nach einer von dem Landmesser Emelius in Cassel mit grossem Fleisse hergestellten Statistik hat das Deutsche Reich im Ganzen etwa rund 4 000 Vermessungsbeamte oder einen auf 12 500 Einwohner. Rechnet man nun für 1 Beamten mit Gehalt, Gehilfen, Reisen, Instrumenten u. s. w. jährlich rund 6 000 Mark, so kommen abermals die vorhin geschätzten 25 Millionen Mark nahezu heraus.

Betrachten wir diese stattliche Summe von 25 Millionen jährlich, so lässt sich die Überlegung machen: Wenn durch bessere Gesamtorganisation aller Vermessungen, Vermeidung von Doppelmessungen u. s. w. auch nur 4% gespart würden, und das scheint mir zweifellos, so hätte man 1 Million frei zur Schaffung solcher staatlicher Einrichtungen, welche aus dem jetzt mehr oder weniger zersplitterten Werke ein mehr organisch gegliedertes Einheitswerk hervorgehen liessen. — Damit sind wir auch wieder an dem schon früher berührten Punkte angelangt: Zusammenfassung der deutschen Landesvermessungen in *ein* Ganzes.

Schon vor etwa 40 Jahren hat der unsterblich gewordene General Baeyer den Gedanken einer Centralisation der Preussischen Vermessungen gefasst und mit allen Mitteln seines energischen Willens verfochten, in der Form, dass er eine preussische „*Einheitskarte*“ schaffen wollte, welche alle künftigen Messungen entbehrlich machen sollte.

In dieser Sache hat der Urheber des Gedankens keinen Erfolg errungen, aber der von ihm ausgesprochene Grundgedanke lebt in der heutigen Generation von Feldmessern noch fort, und wird in neuer und verbesserter Form bei jeder sich bietenden Gelegenheit sich in Thaten umzusetzen suchen.

Unser Verein hat schon in seinen ersten Jahren die Erkenntnis zu Tage gefördert, dass in der staatlichen Organisation der Vermessungen „vieles nicht ist, wie es sein sollte“ und unsere 6. Hauptversammlung 1877 in Frankfurt a/M. hat die Kühnheit gehabt, die „Gesamtorganisation des Vermessungswesens im Staate“ zum Gegenstande einer Beratung zu machen („Zeitschr. f. Verm. 1877“, S. 600). Aber damit ist der Verein viel zu weit gegangen, und hat auch mit seinen Vorschlägen nicht den mindesten Erfolg gehabt; staatliche Einrichtungen können nur aus sich selbst, d. h. durch ihre eigenen Mitglieder reorganisiert werden, und die freie wissenschaftliche Vereinigung von Fachmännern kann nur auf ganz indirektem Wege ihre Anschauungen zur staatlichen Geltung bringen.

Am Ende des vorigen Jahres entstand ein Gerücht von Schaffung eines Reichs-Erdmessungs-Amtes, in welchem vielleicht auch die Land- und Feldmessung einen Platz gefunden haben würde; aber die Sache ist wieder untergetaucht. Aber sollen wir deshalb müssig bleiben? Nein! Wir sollen selbst Hand anlegen auf solchen Gebieten welche uns freigegeben sind, und unser Verein hat schon erhebliches geleistet. Die Zusammenfassung der in Theorie und Praxis wirkenden Kräfte unseres Faches ist das Ziel unserer wissenschaftlichen Vereinigung von Anfang an gewesen, und ist es

noch. Zahlreiche Fragen sind von uns aufgestellt und gelösst worden; die erste betraf die wissenschaftliche Ausbildung, über welche im vorigen Jahre ein Redner gesagt hat, dass der Erlass der neuen Prüfungsvorschriften im preussischen Staate das Werk unseres Vereins sei (Walraff, „Zeitschr. f. Verm. 1896“, S. 498). Der Anstoss dazu wurde vor 23 Jahren auf unserer Nürnberger Versammlung gegeben und als wir damals 1873 in Nürnberg auch ein Wettmessen mit Latten, Bändern und Ketten veranstalteten, sahen viele Norddeutsche zum erstenmale unsere schwäbischen Messlatten und die Schwaben sahen zum erstenmale eine preussische Messkette; und ähnlich wie bei diesem kleinen Beispiele ist es mit vielem anderen gegangen, die Erfahrungen wurden gegenseitig ausgetauscht und der Austausch hat zur Aufklärung geführt. So hat z. B. unser Verein auch in der wichtigen Frage der Anwendung theoretischer Ausgleichungen und Fehlergesetze in der Landmessung durch jahrelang fortgesetzte Erörterungen aufklärend gewirkt, und die staatlichen Vermessungsanweisungen haben aus unseren Zeitschrift-Artikeln und anderen damit in Zusammenhang stehenden Schriften Nutzen ziehen können.

Ebenso war es auch bei einer in allerjüngster Zeit aus Veranlassung eines kleinen Spezialfalles aufgeworfenen Frage nach den Vorzügen oder Nachteilen des einen oder anderen Coordinatensystems. Unsere Zeitschrift hat hiezu praktische Urteile und theoretische Entwicklungen von so vielen unabhängigen Sachverständigen zusammengebracht, dass dadurch diese noch vor kurzem streitige Frage viel reiner und schärfer zum Austrage gebracht wurde, als wenn eine Staatsbehörde ihre unterstellten Beamten zu amtlichen Gutachten aufgefordert haben würde.

In vielen solchen grossen und kleinen Fragen ist unser Verein und seine Zeitschrift und viele damit zusammenhängende Schriften mit Erfolg thätig gewesen, so dass wir auch in Zukunft hoffen dürfen, an entscheidender Stelle gehört zu werden.

Wenn wir fest an der Wissenschaft halten, welche unabhängig von äusseren Rücksichten den richtigen Weg nach dem geodätischen Pole weist, so wird der Erfolg nicht ausbleiben. Unsere noch vor wenigen Jahrzehnten als Aschenbrödel unter den technischen Berufsarten geltende Feld- und Landmessung wissenschaftlich auszugestalten und zur vollen Anerkennung ihrer staatlichen Bedeutung zu bringen, das ist unser Ziel, das wir erreichen werden, wenn wir den Spruch beherzigen:

Ist deine Sache recht und gut,
Kannst du sie getrost dem Himmel überlassen;
Doch wisse, dass auch der nichts für dich thut,
Wenn du versäumst, zur rechten Zeit mit anzufassen.

INHALTS-ÜBERSICHT.

Kapitel III. Das Erd-Ellipsoid.

Kapitel IV. Sphärische Dreiecksberechnung.

Kapitel V. Sphärische Coordinaten.

Kapitel VI. Normalschnitte und geodätische Linie.

Kapitel VII. Geodätische Coordinaten.

Kapitel VIII. Konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel.

Kapitel IX. Polar-Dreieck mit reduzierten Breiten.

Kapitel X. Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke.

Kapitel XI. Bestimmung der Dimensionen des Erd-Ellipsoids.

Kapitel XII. Lotabweichungen.

Berichtigungen.

Seite 204. Bei $\log W^2$ unten statt $\cos^4 \varphi$ lies $\cos 4\,\varphi$.

„ 207. Zwischen (25) und (26) statt $+ 3\,\eta^2 t$ lies $+ 3\,\eta^2 t^2$.

„ 217. Zwischen (34) u. (35) statt $\sqrt{1 + e'^2 \varphi^2 \cos^2 \varphi}$ lies $\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$.

„ 220. In Gleichung (2) statt $\frac{\lambda}{[1]} \cos \varphi$ lies $\frac{\lambda}{[2]} \cos \varphi$.

„ 221 Am Schluss von § 36. statt Seite [43] lies Seite [42].

„ 260. In der 2ten Gleichung statt $\cos \alpha$ lies $\sin \alpha$.

„ 304. In Gleichung (10) statt $\frac{1}{\cos \varphi}$ lies $\frac{\varrho}{\cos \varphi}$

„ 466. Zwischen (37) und (38) statt $1 + \eta^2 V^2$ lies $1 + \eta^2 = V^2$.

„ 505. In der 5ten Linie von unten statt dieser *Bahn* lies dieser *Sache*.

„ 507. In Gleichung (8) statt $\frac{y^2}{d\,2\,r^2}$ lies $d\,\frac{y^2}{2\,r^2}$.

§ 1. Einleitung.

Überblick über die Geschichte der Erdmessung.

Nach der kindlichen Anschauung, welche in Homers Gesängen (800—900 v. Chr.) ihren Ausdruck findet, war die Erde eine vom Okeanos umflossene Scheibe; und diese Anschauung hat sich lange erhalten, ohne sich von dem unmittelbaren Anblick, welchen z. B. die Krümmung der Meeresfläche beim Verschwinden eines Schiffes darbietet, stören zu lassen.

Pythagoras (geb. 582 v. Chr.) erklärte die Erde für eine Kugel.

Aristoteles (384—322 v. Chr.) entwickelt in dem Werke περὶ οὐρανοῦ, B, 13—14, die Gründe für und wider die Kugelform, und kommt zu dem Schluss, dass die Form der Erde notwendig kugelförmig sei (Aristoteles, griechisch und deutsch von Prantl. S. 178): „ἀναγκαῖον εἶναι τὸ σχῆμα σφαιροειδές.“

Was weiter die Frage nach der *Grösse* der Erde betrifft, d. h., nachdem die Kugelform erkannt war, die Frage nach dem Umfang oder dem Halbmesser der Erdkugel, so ist als einer der ersten, dem wir eine geschichtlich verbürgte Messung bzw. Schätzung verdanken, der alexandrinische Gelehrte *Eratosthenes* (276—195 v. Chr.) zu nennen.

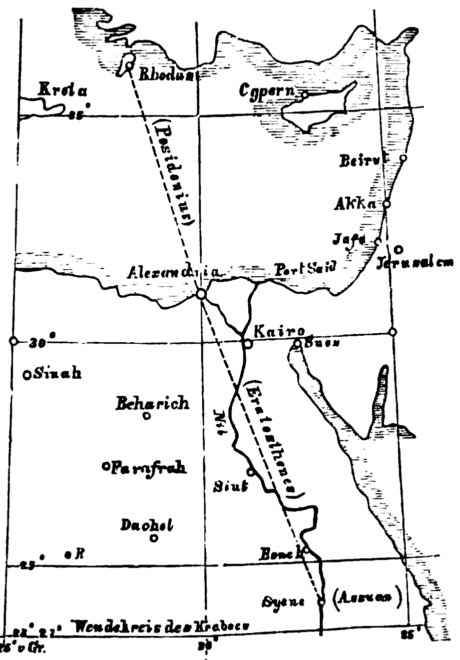


Fig. 1.
Gradmessung von Eratosthenes und Posidonius.
Massstab = 1 : 18 000 000.

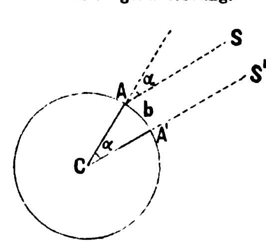
Eratosthenes benützte zur Bestimmung des Erdumfangs den zufälligen günstigen Umstand, dass in Ober-Egypten in Assuan (heutiges Syene, vgl. Fig. 1.) zur Zeit der Sommersonnenwende die Sonnenstrahlen senkrecht in einen Brunnen schienen, während zu gleicher Zeit in Alexandrien die Sonnenstrahlen mit der Lotrichtung einen erheblichen Winkel bildeten, der zu $\frac{1}{50}$ von 360 ° gemessen wurde. Die Entfernung beider Punkte Alexandrien und Syene wurde aus der Zahl der Tagereisen zu 5000 Stadien geschätzt.

Auf diese Angaben gründete

Eratosthenes eine Bestimmung des Erdumfangs, nach dem Grundsatze der von da an durch Jahrtausende zur Ausführung von „Gradmessungen" gedient hat.

Wir wollen dieses mit Benützung von Fig. 2. ausführlichst darlegen:

Fig. 2.
Breitengradmessung.



Hier bezeichnen A und A' zwei Punkte der kugelförmigen Erdoberfläche (etwa A = Alexandrien, A' = Assuan), welche von den Sonnenstrahlen S und S' getroffen werden. Wegen der weiten Entfernung der Sonne sind die von S und S' aus gehenden Sonnenstrahlen als *parallel* zu betrachten.

In A' falle die Sonnenstrahlrichtung zufällig mit der Vertikalen oder der Richtung des Erdhalbmessers $A'C$ zusammen (Brunnen in Assuan) und in A sollen die Sonnenstrahlen mit dem Erdhalbmesser den Winkel α machen, was durch Schattenbeobachtung bestimmt werden kann. Dann ist dieser Winkel α in A auch gleich dem Erdcentriwinkel ACA', und wenn man auf irgend welchem Wege dazu noch den Meridian-Bogen $AA' = b$ bestimmt hat, so lässt sich daraus der Erdumfang bestimmen:

$$U = \frac{360^\circ}{\alpha}\, b$$

In dem Falle der Gradmessung des Eratosthenes war $\alpha = \frac{1}{50}\, 360^\circ$, und $b = 5000$ Stadien, also der

$$\text{Erdumfang} = 50 \times 5000 = 250\,000 \text{ Stadien.}$$

Wie aus Fig. 1. zu ersehen ist, liegen Alexandrien und Syene nicht in einem Meridian, auch liegt Syene nicht genau unter dem Wendekreis, wie von Eratosthenes angenommen wurde; indessen kommen diese Nebenumstände bei einer *ersten* genäherten Beantwortung der Frage nach dem Erdumfang nicht in Betracht.

Nimmt man 1 Stadium rund = 185^m an (vgl. Karsten, Allgemeine Encyclopädie der Physik, I. Band Einleitung in die Physik. Leipzig 1869. S. 433, nebst Litteraturangaben S. 441), so erhält man: Erdumfang = 46 250 000^m oder:

Erdquadrant, nach Eratosthenes = 11 562 500 Meter

also, da in Wirklichkeit der Erdquadrant nahezu gleich 10 000 000^m ist, um 16% zu viel.

In ähnlicher Weise wie Eratosthenes machte *Posidonius* (von 135—51 v. Chr.) eine Bestimmung des Erdumfangs mittelst des Bogens Alexandrien-Rhodus (vgl. Fig. 1.) in folgender Weise:

Der Stern Canopus konnte in Rhodus gerade noch im Horizonte gesehen werden, während er in Alexandrien sich um $\frac{1}{48}$ des grössten Himmelskreises (= 7° 30′) über den Horizont erhob; daraus lässt sich schliessen, dass der Erdumfang das 48fache des Erdmeridianbogens Alexandrien-Rhodus ist, und indem dieser Bogen ebenso gross wie der frühere Alexandrien-Assuan, nämlich = 5000 Stadien geschätzt wurde, fand sich der Erdumfang = 48mal 5000 Stadien = 240 000 Stadien, also, das Stadium wieder rund = 185^m gerechnet, der Erdumfang = 44 400 000 Stadien, oder:

Erdquadrant, nach Posidonius, = 11 100 000 Meter.

Um einen Überblick über die Genauigkeit dieser alten Messungen, bzw. Schätzungen zu erhalten, stellen wir dieselben mit den jetzt bekannten Zahlen Δ B und b zusammen:

	Breiten B	ΔB	Meridianbogen b	$\Delta B'$	Meridianbogen b'
Rhodus	36° 26′				
		5° 14′	580km	7° 30′	5000 Stad. = 925km (Posidonius)
Alexandrien	31° 12′				
		7′ 7′	789km	7° 12′	5000 Stad. = 925km (Eratosthenes)
Syene	24° 5′				

Die Fehler 925km gegen 580km und 925km gegen 789km sind also ganz erheblich.

In diesem Zusammenhange erwähnen wir auch noch ein Werk über Feld- und Landmessung aus dem Altertum, nämlich *Heron* (etwa 200 v. Chr.) über das Diopter (περὶ διόπτρας) vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1876" S. 120, 1887 S. 553, S. 674, 1888 S. 282, S. 325, S. 365.

Nach diesem haben wir über eine im Mittelalter ausgeführte Erdmessung zu berichten, welche wir den *Arabern* verdanken. Diese machten etwa um 827 nach Chr. eine Breitengradmessung, über welche der Niederländer Snellius in seinem Werke „Eratosthenes Batavus" S. 107—112 nach Citat eines arabischen Schriftstellers Abelfedeas (1322) etwa folgendes berichtet: Die Messung geschah auf Befehl des Khalifen *Almanun* in der Ebene Zinjar (Sindschar nordwestlich von Bagdad) unter der Breite 36° 20′.

Das Ergebnis war:

$$1 \text{ Meridiangrad} = 56\frac{2}{3} \text{ Meilen} = \frac{170}{3} \text{ Meilen}$$

$$1 \text{ Meile} = 4000 \text{ Ellen},$$

also der Meridianquadrant der Erde:

$$Q = 90 \text{ Grad} = 90\,\frac{170}{3}\,4000 = 20\,400\,000 \text{ Ellen}.$$

Weiter soll sein 1 Elle = 24 Zoll und 1 Zoll = 6 Gerstenkornbreiten; was ist aber nun 1 Gerstenkornbreite? Snellius nahm an: 1 Gerstenkornbreite $= \frac{1}{89}$ rheinländische Fuss, also $= \frac{0{,}313853}{89} = 0{,}00352644$ Meter, und dieses giebt 1 Meridiangrad = 115 103 Meter und:

Meridianquadrant = 10 359 Kilometer.

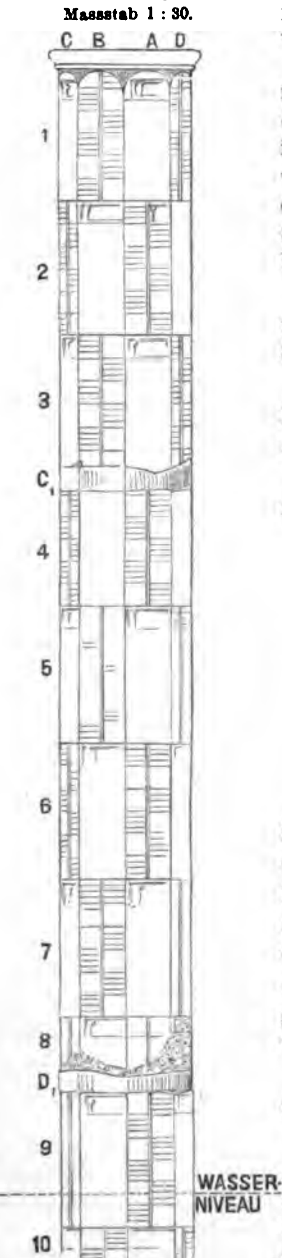
Statt dieser Gerstenkorn-Rechnung haben wir in jüngster Zeit eine Bestimmung der arabischen Elle nach dem Nilmesser von Kairo erhalten, welche nahe auf den richtigen Wert des Erdumfangs führt.

Die arabische Elle mit ihren 24 Zoll ist nämlich noch vorhanden in Egypten an dem Nilmesser (Mikyas) auf der Nilinsel Rodah bei Kairo. Der Mikyas wurde im Jahre 97 der Hedschrah (716 nach Chr.) auf Befehl des Omayyadischen Khalifen Suleman (715—717) erbaut und von dem Abbasiden-Khalifen Manun im Jahre 199 der Hedschrah (814 n. Chr.) repariert. (Dieser *Manun* scheint der *Al-Manun* der Gradmessung zu sein.)

Im Jahre 1874 habe ich die Nilmesser-Säule bei Kairo gesehen und eine flüchtige Zeichnung und Messung von derselben gemacht, welche in der „Zeitschr. f. Verm. 1869" S. 106—107 mitgeteilt ist. Die arabische Elle fand ich dabei etwa $= 0{,}52^m$, also ist der Erdmeridianquadrant $= 0{,}52 \times 20\,400\,000 = 10\,608\,000^m$.

Inzwischen ist der Nilometer genauer untersucht und gemessen worden (auf unsere Anregung) von Dr. Reiss in Kairo, worüber eine ausführliche Mitteilung in

Fig. 3.
Alt-arabischer Nil-Pegel bei Kairo.*
Massstab 1 : 30.



der „Zeitschr. f. Verm. 1889" S. 439—445 von Dr. Reiss gegeben wurde, aus welcher wir auch die nebenstehende Fig. 3. als Darstellung der Nilometer-Säule entnehmen.

Hiernach ist die Säule in ihrem jetzigen Zustande nicht mehr das ursprüngliche Bauwerk selbst, sondern die Säule war gebrochen oder umgestürzt und ist später in unvollkommener Weise wieder zusammengesetzt worden, denn die Säule zeigt eine Knickung zwischen der 8. und 9. Elle und eine Abweichung zwischen der 3. und 4. Elle. An beiden Stellen sind breite Bleibänder um die Säule gelegt.

Bei D_1 muss eine grössere Zerstörung stattgefunden haben, so dass es nötig wurde, einen Teil der 8. Elle abzunehmen.

Die einzelnen Ellen sind nicht genau gleich, ihre Länge schwankt zwischen 0,525ᵐ und 0,550ᵐ, die Unterabteilungen sind ganz ungenau eingetragen.

Im Einzelnen gab die Messung von Herrn Reiss folgendes:

1. Elle	= 0,525ᵐ	
2. „	= 0,535	
3. u. 4. Elle	= 1,085	(0,5425)
5. Elle	= 0,550	
6. „	= 0,546	
7. „	= 0,5355	
9. „	= 0,5425	
Summe 8 Ellen	= 4,319ᵐ	
Mittel 1 Elle	= 0,53987ᵐ	

Zur Kontrolle sind ausserdem die 7 oberen Ellen im Ganzen gemessen worden und zwar einmal von oben nach unten und dann von unten nach oben.

Die 7 ersten Ellen von oben nach unten gemessen = 3,785ᵐ
die 7 ersten Ellen von unten nach oben gemessen = 3,775
die 7 ersten Ellen im Mittel . . . . = 3,780

woraus sich die Länge der einzelnen Elle zu 0,54ᵐ ergiebt, was mit dem Mittel aus den Einzelmessungen vollständig stimmt.

Nehmen wir hiernach 1 Elle = 0,54ᵐ, so wird nach der arabischen Gradmessung

$$\text{Meridianquadrant} = 0,54 \times 20\,400\,000 = 11\,016\,000^{\text{m}}$$

Dieses ist um 10% zu viel, was kein glänzendes Ergebnis ist. Wollte man den Erdquadranten = 10 000 000ᵐ erhalten, so müsste man die Elle = 0,49ᵐ setzen, was nach dem Zustande des Nilometers nicht angeht.

Trotzdem schien es nicht uninteressant, die vorstehenden Massbestimmungen zu jener alten vielbesprochenen arabischen Gradmessung mitzuteilen.

Seit jener Zeit geschah 700 Jahre lang nichts mehr.

Die erste Erdmessung nach diesem langen Zeitabschnitt verdanken wir dem französischen Arzt *Fernel*, welcher im Jahr 1525 die Breiten von Paris und Amiens mittelst eines Quadranten, und die Entfernung beider Orte mittelst der Umdrehungen seines Wagenrades mass, und damit ein Ergebnis erzielte, welches zufällig nahezu richtig ist, nämlich nach Lalande's Nachrechnung:

$$1 \text{ Meridiangrad} = 57\,070 \text{ Toisen} = 111\,232 \text{ Meter}$$
$$\text{Meridian-Quadrant} = 10\,011 \text{ Kilometer,}$$

also der Fehler nur $= +\,0{,}1\%$.

Eine neue Epoche der Erdmessung beginnt mit dem Niederländer *Willebrord Snellius* (1580—1626).

Snellius war, wie aus seinem Werke „Eratosthenes Batavus, de terrae ambitus vera quantitate, a Willebrordo Snellio, Lugduni-Batavorum 1617" hervorgeht, ein nicht nur mathematisch sehr verständiger, sondern auch allgemein sehr gebildeter und scharfsinniger Mann. Die Erdmessung verdankt ihm wenn nicht die „Erfindung", doch die erste uns überlieferte, auf etwa 1′ in den Winkeln gemessene und richtig trigonometrisch berechnete Triangulierung, worüber bereits in unserem I. Bande, „Handb. d. Verm. 4. Aufl. 1895", S. 478 berichtet worden ist.

Die ganze Triangulierung von Snellius umfasst 33 Dreiecke, welche im wesentlichen in der heute noch üblichen Weise zu einer Breitengradmessung zwischen Alkmaar und Bergen op Zoom benützt wurden, wie folgende Zahlen zeigen:

Punkt	Breiten	Breiten-Unterschied	Meridianbogen (triang.)
Alkmaar	52° 40′ 30″		
		1° 11′ 30″	33 930 Rheinl. Ruten
Bergen op Zoom	51° 29′ 0″		

Hiernach ist 1 Grad $= \frac{60'}{71{,}5'}\, 33\,930 = 28\,473$ Ruten.

Nach diesem Ergebnis in Verbindung mit einer zweiten ähnlichen Messung nahm Snellius den Meridiangrad = 28 500 Rheinl. Ruten an. Dieses ist = 107 7338 Meter, und damit berechnet man auch:

$$\text{Meridian-Quadrant} = 9\,660 \text{ Kilometer.}$$

Hiernach hat die Snellius'sche Erdbestimmung einen Fehler von $3{,}4\%$. Snellius machte selbst Nachmessungen, aber erst sein Nachfolger *Musschenbroek* brachte Snellius' Werk zum Abschluss; er fand 1719 „secundum mensuram ultimam Snellii et nostram" 1 Meridiangrad = 29 514 Ruten oder = 111 157 Meter, also

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,004 \text{ Kilometer.}$$

Inzwischen waren auf Snellius zwei durch die Art ihres Verfahrens merkwürdige Gradmessungen gefolgt. Im Jahr 1633 mass *Norwood* den Bogen zwischen London und York unmittelbar mit der Kette.

Grimaldi und *Riccioli* bestimmten 1645 in Italien durch gegenseitige *terrestrische* Zenitdistanzen einen Meridiangrad.

Diese Messung terrestrischer Zenitdistanzen, welche auch Snellius schon in seinem Schluss-Kapitel erwähnt, wäre das einfachste und beste Mittel zur Messung

der Erde, wenn die Strahlenbrechung nicht bestünde, oder wenigstens der Rechnung besser zugänglich wäre, als es bis jetzt der Fall ist.

Indem wir nun den genauen Erdmessungen näher kommen, haben wir auch kurz zu erwähnen, *welche* Erdfläche bestimmt werden soll: Als Erdoberfläche im Sinne dieser Messungen ist zu betrachten die ruhend gedachte Meeresfläche, nebst ihrer unter den Kontinenten stetig angenommenen Fortsetzung.

Die wichtigsten Erdmessungen des 17. und 18. Jahrhunderts sind die *französischen.* Dieselben wurden von der im Jahre 1666 gegründeten Pariser Akademie veranlasst, und von *Picard* geleitet. Der Zweck dieser Messungen war ein zweifacher, erstens die Herstellung einer guten Karte von Frankreich und zweitens die Bestimmung der Grösse der Erde.

Aus der Fortsetzung der Picardschen Messungen, welche von *Lahire, Dominique Cassini* und *Jaques Cassini* geleitet wurde (1683—1716 südlich bis Collioure, nördlich bis Dünkirchen), schien zu folgen, dass die Erde an den Polen zugespitzt sei, während Newtons Theorie und Richers Pendelversuche das Gegenteil behaupteten. Entschieden wurde die Frage durch die von den Franzosen im Jahre 1735 nach Peru und Lappland geschickten Gradmessungs-Expeditionen, durch welche festgestellt wurde, dass am Äquator der Erdmeridian stärker gekrümmt ist als in der Nähe des Pols, was mit der Newtonschen Theorie stimmt.

Die Gradmessung in Peru, 1735—1741, ist beschrieben in dem Werk: „Mesure des trois premiers degrés du méridien dans l'hemisphère australe, tirée des observations de Mrs. de l'académie royale des sciences, envoyés par le roi sous léquateur, par M. de la Condamine. Paris 1751.“

Die Gradmessung in Lappland, ausgeführt 1736—1737, ist beschrieben von *Maupertuis:* „La figure de la terre. Paris 1738.“

Es folgte 1740 eine Nachmessung des französischen Meridianbogens durch Cassini de Thury (III) und Lacaille.

Folgendes sind die wichtigsten hierauf bezüglichen Zahlenwerte:

Picards Messung des Bogens zwischen Paris und Amiens, welche 1669 begann, gab einen Breitengrad = 57 060 Toisen und damit:

Meridianquadrant = 10 009 081 Meter.

Die nördliche und südliche Fortsetzung gab folgendes:

			Mittelbreite	1 Meridiangrad
nördlich	zwischen	Paris und Dünkirchen	49° 56′	56 960 Toisen
	„	Paris und Amiens	49° 22′	57 060 „
südlich	„	Paris und Bourges	47° 57′	57 098 „

Hieraus schien eine gegen die Pole zugespitzte Erdform zu folgen.

Wir haben versucht, hieraus ein langgestrecktes Ellipsoid zu berechnen, das also eine *negative* Abplattung erhält. Es fand sich:

Meridianquadrant = 10 042 650 Meter, Abplattuug = 1 : — 66.

Die peruanische und die lappländische Gradmessung (letztere mit der späteren Verbesserung und Erweiterung durch Svanberg, 1801—1803) geben folgendes:

	Mittelbreite	1 Meridiangrad
Lappland	+ 66° 20′ 10″	57 196 Toisen
Peru	— 1° 31′ 30″	56 734 „

Hieraus wird berechnet

Meridianquadrant = 10 000 157 Meter, Abplattung = 1 : 310,3.

Von den nun folgenden aussereuropäischen Gradmessungen erwähnen wir hier besonders diejenige von Mason und Dixon in Nordamerika, 1764—1768.

Dieselbe ist dadurch ausgezeichnet, dass eine Gerade von 434 011,64 engl. Fuss (= 132 286 Meter) Länge unmittelbar mit Messlatten (also ohne Triangulierung) nahezu in der Meridianrichtung gemessen wurde. Im ganzen wurde der Meridianbogen zwischen den Breiten 39° 56′ 19″ und 38° 27′ 34″ bestimmt.

(Eine neuere Mitteilung hierüber s. „Zeitschr. f. Verm.“ 1888, S. 33—39.)

In die zweite Hälfte des vorigen Jahrhunderts fällt auch die Gradmessung von La Caille am Kap der guten Hoffnung, Beccarias Messung in Turin, Liesganigs Messung in Ungarn, dann die Anfänge der englischen Messungen in England selbst und in Indien.

Die wichtigste Gradmessung vom Schluss des vorigen und Anfang dieses Jahrhunderts ist jedoch wieder eine französische, nämlich die von *Delambre* und *Méchain* 1792—1808 zur definitiven Feststellung des *Meters* ausgeführte. Das hierüber veröffentlichte Werk ist: Base du système métrique décimal, ou mesure du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone, exécutée en 1792 et années suivantes, par M. M. Méchain et Delambre, rédigée par M. Delambre. Tome premier Paris janvier 1806, tome second Paris juillet 1807, tome troisième Paris novembre 1810.

Das Meter sollte möglichst genau der zehnmillionste Teil des Erdquadranten sein. Zur möglichst genauen Ermittlung desselben wurde die Gradmessung von Delambre und Méchain 1792 unternommen.

Dieselbe gab den Bogen zwischen Dünkirchen und Montjouy = 275 792,36 Modules (1 Module = 2 Toisen) und dieser nahezu 10° grosse Bogen zwischen den Breiten 51° 2′ 8,85″ und 41° 21′ 44,96″ wurde als Grundlage für das metrische System genommen. Um die Abplattung zu erhalten, wurde dieser Bogen mit der peruanischen Gradmessung kombiniert, woraus die Abplattung 1 : 334 erhalten wurde.

Nun wurde der Meridianquadrant berechnet = 2 565 370 Modules = 5 130 740 Toisen, und da eine Toise 864 Par. Linien hat, so ist hiernach:

$$1 \text{ Meter} = \frac{5\,130\,740 \times 864}{10\,000\,000} = 443{,}295\,936 \text{ Par. Linien,}$$

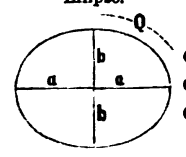
was auf 443,296 abgerundet wurde.

Indem man umgekehrt für die Delambresche Messung das Meter = 443,296 Par. Linien als Einheit annimmt, hat man:

Meridianquadrant = 10 000 000 Meter, Abplattung = 1 : 334.

(Vorstehende Zahlenangaben finden sich in dem Werk: Base du système métrique III. Band S. 433, S. 619—622.)

Fig. 4.
Erdmeridian-Ellipse.



Bestimmung der Meridian-Ellipse.

Nachdem die Abplattung der Erde entschieden war, handelte es sich nicht mehr bloss wie früher um *eine* Unbekannte, nämlich den Halbmesser der Erdkugel, sondern um *zwei* Unbekannte, etwa die beiden Halbachsen a und b der Meridian-Ellipse (Fig. 4.) oder

statt dessen um eine Halbachse a und dazu die Excentricität $e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$ oder den Meridianquadranten Q und die Abplattung $\alpha = \frac{a-b}{a}$.

Aus der grossen Halbachse a und der Abplattung α berechnet man, wie wir später entwickeln werden, den Meridianquadranten Q nach der Formel:

$$Q = \frac{a\pi}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right)$$

Wenn zwei Gradmessungen in dem bisher gültigen Sinne vorliegen, nämlich ein Meridianbogen und die beiden geographischen Breiten der Endpunkte für je eine Gradmessung, so ist es mathematisch betrachtet eine leichte Aufgabe, mit genügender Näherung eine Ellipse zu bestimmen, welche diesen *zwei* Gradmessungen genügt, und wir werden später z. B. die Berechnung der oben angegebenen Gradmessungen von Lappland und Peru in wenigen Gleichungen entwickeln können.

Als man aber im vorigen Jahrhundert anfing, mehr als zwei Gradmessungen zusammen in Rechnung zu nehmen, stiess man auf starke Widersprüche, welche sich aus den unvermeidlichen Messungsfehlern kaum erklären liessen und bald den Gedanken nahe legten, dass die Erde nicht genau ein Umdrehungs-Ellipsoid sei.

Dennoch ist nun ein Zeitraum von wohl 100 Jahren (etwa von 1740—1840) der Aufgabe gewidmet, eine solche *Ausgleichung* der zahlreichen Gradmessungen zu erzielen, dass die übrig bleibenden Widersprüche in den Messungen der geographischen Breiten in ihrer Gesamtheit möglichst klein ausfallen.

Insofern fällt die Geschichte der Gradmessungs-Berechnungen mit der Geschichte der Methode der kleinsten Quadrate zusammen, welche wir in unserem „I. Bande Handb. d. Verm., 4. Aufl. 1895 (Einleitung)" behandelt haben.

Die erste öffentliche Mitteilung über die Methode der kleinsten Quadrate, nämlich *Legendre's* Abhandlung „sur la méthode des moindres carrés", welche als Anhang der „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes" im Jahre 1806 erschien, enthält zugleich auch die erste Ausgleichung von Gradmessungen nach dieser Methode. Legendre nimmt 5 geographische Breiten zwischen Dünkirchen (51° 2′ 10,50″) und Montjouy (41° 21′ 44,80″) mit den 4 dazwischen liegenden französischen Meridianbögen, und macht damit eine theoretisch richtige Ausgleichung, welche jedoch den sehr grossen Abplattungswert 1 : 148 und auch einen zu kleinen Meridianquadranten = 9 997 780 Meter gab; doch berührt uns hier weniger das Erdberechnungs-Ergebnis als das theoretisch richtige dabei angewendete Verfahren.

Die nächste Ausgleichung dieser Art machte ***Walbeck*** im Jahre 1819, in einer kleinen Abhandlung: „De forma et magnitudine telluris, ex dimensis arcubus meridiani, definiendis" (Abo, 1819), welche lange nur aus einem Citate von Gauss in der „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Göttingen und Altona" 1823, S. 72 und S. 82 bekannt gewesen, vor kurzem in Helsingfors 1891 neu gedruckt und von da auch in der „Zeitschr. f. Verm. 1893" S. 426—434 abgedruckt worden ist.

Walbeck hat die peruanische, die beiden ostindischen, die französische, englische und die neuere lappländische Gradmessung der Rechnung unterworfen; indessen hat er bei jeder einzelnen Gradmessung nur den ganzen Bogen, oder die an den *End*punkten beobachteten Polhöhen in Betracht gezogen, ohne die Zwischenpunkte zu

berücksichtigen. Das Ergebnis war Abplattung = 1 : 302,78 und mittlerer Meridiangrad = 57 009,76 Toisen, dieses giebt:

Meridianquadrant = 10 000 268 Meter   Abplattung = 1 : 302,78.

Neun Jahre später, 1828, haben wir eine abermals verbesserte und erweiterte Ausgleichung, welche *Schmidt* in Göttingen auf Gauss' Veranlassung machte, wie in der „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Göttingen und Altona" S. 82—84 von Gauss mitgeteilt wird. Schmidt hat die an den Zwischenpunkten beobachteten Polhöhen mit berücksichtigt, auch die hannoversche Gradmessung zugezogen, so dass er die peruanische, erste und zweite ostindische, französische, englische, hannoversche und schwedische Gradmessung, mit zusammen 25 Polhöhen nach dem Grundsatze ausglich, dass die Quadratsumme der übrigbleibenden Polhöhenfehler ein Minimum wird. Das Ergebnis war: Abplattung 1 : (298,39 ± 12,5) und mittlerer Meridiangrad = 57 010,35 ± 5 Toisen, oder:

Meridianquadrant = 10 000 372 Meter   Abplattung = 1 : 298,39
± 88   ± 12,50

Der mittlere Polhöhenfehler ist ± 3,18″.

Schmidt hat solche Berechnungen noch weiter fortgesetzt, und hievon Mitteilung gemacht in dem „Lehrbuch der mathematischen und physischen Geographie von Dr. J. C. Eduard Schmidt, Privatdozent auf der Universität Göttingen." Erster Teil 1829. Vorrede Seite IV—V. und Astr. Nachr. 7. Band (1829) Nr. 161. S. 329—332.

Die letzte Bestimmung Schmidts ist vom Jahr 1830, und giebt (nach Listing (3)):

Meridianquadrant = 10 000 061 Meter   Abplattung = 1 : 297,648.

Der Engländer *Airy* machte im Jahre 1830 eine Bestimmung aus 14 Breitengradmessungen mit Hinzuziehung einiger gemessener Längengrade. Die Ergebnisse sind nach „Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland, London 1858, introduction" Seite XVI: $a = 20\,923{,}713$ engl. Fuss und $b = 20\,853{,}810$ engl. Fuss, woraus wir berechnen:

Meridianquadrant = 10 001 012 Meter   Abplattung = 1 : 299,325.

Wir kommen nun 1837—1841 an die Bessel sche Ausgleichung der Gradmessungen, welche auf einer sehr gründlichen Prüfung und Sichtung des bis dahin angesammelten Gradmessungsstoffes beruht. Bessel benützte die folgenden Messungen:

	Gradmessung	Mittelbreite	Amplitude	Zahl der Polhöhen
1.	Peruanische	— 1° 31′	3° 7′	2
2.	erste Ostindische	12 32	1 35	2
3.	zweite Ostindische	16 8	15 58	7
4.	Französische	44 51	12 22	7
5.	Englische	52 2	2 50	5
6.	Hannoversche	52 32	2 1	2
7.	Dänische	54 8	1 32	2
8.	Preussische	54 58	1 30	3
9.	Russische	56 4	8 2	6
10.	Schwedische	66 20	1 37	2
		Summen	50° 34′	38

Die Einzelheiten der Messungen und der Ausgleichung (Quadratsumme der 38 Polhöhen-Verbesserungen) sind von Bessel mitgeteilt in einer Abhandlung in den astr. Nachr. 14. Band (1837) Nr. 333, S. 333—346. Es wurde jedoch eine Neuberechnung nötig wegen Auffindung eines Fehlers in der französischen Gradmessung, worüber Bessel im 19. Bande der astr. Nachr. (1842) Nr. 438, S. 97—116 berichtet. Die Besselschen End-Ergebnisse sind (2. Dezember 1841):

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,000\,855{,}76 \text{ Meter} \atop \pm 498{,}23 \quad , \quad \text{Abplattung} = 1 : 299{,}1528 \atop \pm 4{,}667$$

Diese Besselschen Erddimensionen haben rasch allgemeinste Anerkennung und weiteste Verbreitung gefunden; sie sind namentlich deswegen wichtig, weil Hilfstafeln in grosser Zahl und Ausdehnung für praktische Vermessungen und Berechnungen darauf gegründet sind.

Mit diesen Mitteilungen über *Berechnungen* sind wir der Geschichte der *Messungen* zum Teil vorausgeeilt.

Ausser den schon erwähnten französischen Arbeiten haben wir in diesem Jahrhundert folgende Erdmessungen zu erwähnen:

Die *dänische* Gradmessung unter Leitung von *Schumacher* von 1816 an. Zu einem abgeschlossenen Werke gelangte die dänische Gradmessung in jüngster Zeit unter Leitung von *Andrä* durch das Werk: Den Danske Gradmaaling, 1. Band, Kopenhagen 1867, 2. Band 1872, 3. Band 1878, 4. Band 1884, vgl. hiezu unseren I. Band, 4. Aufl. 1895, S. 487.

Hieran schloss sich die *hannoversche* Gradmessung von *Gauss* 1821—1823, und bald folgte die Gradmessung in Ostpreussen von *Bessel*. Über diese zwei klassischen Werke haben wir ebenfalls schon in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 493 und . 499 das Wichtigste angegeben.

Die grösste Ausdehnung in Europa hat die *russische* Gradmessung von *Struve* und *Tenner*. Der erste Teil hievon ist behandelt in dem Werk: „Beschreibung der von der Universität Dorpat veranstalteten Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Russlands, ausgeführt und bearbeitet in den Jahren 1821—1831 mit Beihilfe des Kapitän-Lieutenants B. W. v. Wrangel und Anderer, von F. G. W. Struve, Direktor der Dorpater Sternwarte. Dorpat 1831," vgl. auch hiezu unseren Band I, 4. Aufl. 1895, S. 486.

Von russischer Seite sind hier auch die Arbeiten des Generals *v. Schubert* zu erwähnen, welcher zuerst den Versuch machte, die Erde durch ein *drei*axiges Ellipsoid darzustellen, und auch andere Erdberechnungen ausführte. Weiteres hierüber giebt Listing (11), vgl. das Litteratur-Verzeichnis am Schlusse dieses Abschnitts S. 14.

Die *englischen* Messungen begannen im Jahre 1783 unter General *Roy*. Wir haben hierüber das grosse Werk: „Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland. Account of the observations and calculations of the principal triangulation and of the figure, dimensions and mean specific gravity of the earth as derived from, etc., by Captain Alexander Ross *Clarke* under the direction of Colonel *H. James*, Superintendent of the Ordnance survey. London 1858," (vgl. Band I, 4. Aufl. 1895, S. 484—486).



Auf Seite 771 dieses Werkes wird als Ergebnis einer Ausgleichung von 8 Gradmessungen mit 66 Breiten mitgeteilt:

$$a = 20\,926\,348 \qquad b = 20\,855\,233 \text{ engl. Fuss},$$

woraus wir berechnen:

Meridianquadrant $= 10\,001\,983$ Meter, Abplattung $= 1:294{,}261$.

Hier sind auch die britisch-ostindischen Arbeiten zu erwähnen, 1790 begonnen von Reuben Burrow, fortgesetzt von Dalby, Lambton Everest bis 1847, sowie die zweite Gradmessung am Kap der guten Hoffnung von Maclear 1836—1848.

Unter den englischen Erdmessungsarbeiten sind namentlich auch die zahlreichen Erd-Ellipsoid-Berechnungen anzuführen, welche Clarke seit 1856 bis in die neueste Zeit ausgeführt hat. (Listing (7)—(10).) Wir wollen hievon diejenigen beiden Bestimmungen hierhersetzen, welche in den Verhandlungen der permanenten Konferenz der internationalen Erdmessung von 1887 angegeben sind in Beilage I, Lotabweichungen, von Helmert, S. 5—6, nämlich mit Zufügung des Meridianquadranten:

Clarke 1866 $a = 20\,926\,062$ $b = 20\,855\,121$ engl. Fuss
Meridianquadrant $= 10\,001\,888$ Meter, Abplattung $= 1:294{,}978$
Clarke 1880 $a = 20\,926\,202$ $b = 20\,854\,895$ engl. Fuss
Meridianquadrant $= 10\,001\,871$ Meter, Abplattung $= 1:293{,}466$.

In diesem Zusammenhange haben wir auch die nordamerikanischen Messungen einzureihen, deren erste Anfänge, die Mason-Dixon sche Gradmessung von 1764, wir schon oben erwähnt haben. Die Fortsetzung der nordamerikanischen Messungen in der Neuzeit sind wissenschaftlich und praktisch wichtig und interessant. Das Hauptwerk hierüber ist:

„Professional papers of the corps of engineers, U. S. Army, Nr. 24. Report upon the primary triangulation of the United States Lake Survey, by Lieut. Col. C. B. Comstock, Corps of Engineers, Brevet Brigadier-General, U. S. A., aidet by the Assistents on the survey. Washington: Government printing office. 1882." (Vgl. „Zeitschr. f. Verm." 1888, S. 203—207 und S. 385—395).

Lotabweichungen, Geoid.

Schon die ersten Berechner des Erdellipsoids hatten erkannt, dass die Widersprüche bei solchen Berechnungen und Ausgleichungen nicht durch Messungsfehler allein erklärt werden können, dass vielmehr die ideale Erdfläche überhaupt nicht genau die Form eines Umdrehungs-Ellipsoides hat. Trotzdem wurden die Berechnungen lange in der Form fortgeführt, als ob es sich nur um unregelmässige Messungsfehler handelte. Insofern jedoch die Widersprüche der Berechnungen nicht den Messungen, sondern den Abweichungen der Erdform von dem Ellipsoid zuzuschreiben sind, nannte man diese Widersprüche „Lotabweichungen".

Die erste Klarlegung der hiebei vorkommenden geodätisch-physikalischen Begriffe hat *Listing* gegeben in der kleinen Abhandlung: „Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Grösse der Erde" in den Nachrichten von der K. Ges. d. Wiss. und der G. A. Universität zu Göttingen, 5. Febr. 1873. Nr. 3. S. 33—98. (S. 41 Einführung des „*Geoids*".)

Man hat hiernach drei verschiedene Flächen zu unterscheiden:

1) Die Begrenzungsfläche zwischen den starren und tropfbarflüssigen Teilen der Erde einerseits und der Atmosphäre andererseits, d. h. die physische Erdoberfläche.



2) Die Oberfläche des gesamten Meeres in seinem Gleichgewichtszustand, also abgesehen von Flut und Ebbe und Wellenschlag; unter den Kontinenten denkt man sich diese Fläche erweitert durch ein Netz von Kanälen, welche unter sich und mit dem freien Meer in Verbindung stehen. Diese Fläche, welche, dem hydrostatischen Gesetz der ruhenden Flüssigkeit entsprechend, alle Lotlinien (Richtung der Schwerkraft) rechtwinklig durchschneidet, heisst nach Listing das *Geoid.*

3) Da die Abweichungen des Geoids von einem Umdrehungsellipsoid im Vergleich mit den Erddimensionen selbst klein sind, z. B. in Deutschland nach den neuesten Bestimmungen von Helmert (1888) nur etwa 5—10 Meter, kann man auf die Bestimmung eines idealen Erdellipsoids ausgehen, dessen Umdrehungsaxe mit der wirklichen Erdaxe zusammenfällt, dessen Lage im übrigen jedoch verschieden definiert werden kann. Listing setzt hiefür fest:

erstens, es soll das Ellipsoid mit dem Geoid gleiches Volumen haben,
zweitens, es soll die Summe der Beträge von Erhöhungen und Vertiefungen zwischen dem Geoid und dem Ellipsoid ein Minimum sein.

Hiernach berechnet Listing ein „typisches Ellipsoid" mit folgenden Dimensionen (Listing (20)):

$$a = 6\,377\,365^{m} \qquad b = 6\,355\,298^{m}$$

$$\text{Meridianquadrant } Q = 10\,000\,218^{m} \qquad \text{Abplattung} = 1:289{,}00$$

$$\text{Mittlerer Halbmesser } R = \sqrt[3]{a\,a\,b} = 6\,370\,000^{m}.$$

Pendelbeobachtungen.

Wie schon im vorigen Jahrhundert das Pendel Richers zur ersten Aufklärung über die Abplattung beigetragen hatte, so sind heute noch die Pendelbeobachtungen ein wichtiges Hilfsmittel der Erdmessung.

Eine Bestimmung der Abplattung der Erde aus Pendelbeobachtungen hat Helmert ausgeführt in dem Werke: „Die mathem. und phys. Theorien der höheren Geodäsie, II. Band, Leipzig 1884". Auf S. 215—241 dieses Werkes wird aus einer Reduktion und Ausgleichung von 122 Pendellängen die Abplattung der Erde abgeleitet:

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299{,}26 \pm 1{,}26}$$

Im Anschluss hieran möge auch die Annahme von Helmert für ein Referenz-Ellipsoid zu Lotabweichungs-Berechnungen hier hergesetzt werden, nämlich nach den „Verhandlungen der Konferenz der perm. Kommiss. d. internat. Erdm. von 1887, Berlin 1888, Beilage I Lotabweichungen" S. 7, ein Ellipsoid, dessen lineare Dimensionen (nach verschiedenen Erwägungen) unter Festhaltung des Besselschen (genäherten) Abplattungswertes aus der französisch-englisch-russischen Breitengradmessung hervorgehen:

$$a = 6\,378\,153^{m} \qquad b = 6\,356\,832^{m}$$

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,002\,041 \qquad \text{Abplattung} = 1:299{,}149.$$

Internationale Erdmessung.

Der Mitarbeiter Bessels an der Gradmessung in Ostpreussen, *Baeyer*, hat das grosse Verdienst der Begründung der internationalen Erdmessung. *(J. J. Baeyer*, geb. 1794, gest. 1885, vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1885, S. 369—372, und Vierteljahrsschr. d. astr. Ges. 1886, S. 2—13").

Im Jahre 1862 veröffentlichte General Baeyer den ersten „General-Bericht über den Stand der mitteleuropäischen Gradmessung“ mit Teilnahme von 15 Staaten.

Im Herbst 1864 fand die „erste allgemeine Konferenz der Bevollmächtigten zur mitteleuropäischen Gradmessung“ in Berlin statt, dabei wurde als erstes Organ der Vereinigung eine „permanente Kommission“ bestellt, welche von da an jährlich einmal tagte, während die allgemeine Konferenz nur von 3 zu 3 Jahren zusammentritt.

In demselben Jahre 1864 erfolgte auch die Schaffung des Centralbureaus der mitteleuropäischen Gradmessung.

Auf der allgemeinen Konferenz von 1867 wurde die „mitteleuropäische Gradmessung“ zur „europäischen Gradmessung“ erweitert.

Am 10. September 1885 starb General Baeyer; sein Nachfolger wurde Professor *Helmert*.

Im folgenden Jahre 1886 fand die VIII. allgemeine Konferenz in Berlin statt, wobei die „europäische Gradmessung“ zur „internationalen Erdmessung“ erweitert, und die Vereinigung im ganzen reorganisiert wurde. Eine abermalige Neuberatung und Organisation der internationalen Erdmessung erfolgte auf der XI. allgemeinen Konferenz in Berlin, 1895. („Zeitschr. f. Verm. 1895,“ S. 569—586 und 625—630.)

Die Geschichte der internationalen Erdmessung ist im wesentlichen enthalten in den seit 1863 nahezu jährlich erschienenen „Generalberichten“ und „Verhandlungen der allgemeinen Konferenzen“ u. s. w. der Gradmessung bzw. Erdmessung.

Verschiedene Ergebnisse der Erdmessung und Erdberechnnng.

Jahr	Bezeichnung	Meridian-Quadrant Meter	Abplattung
1617	Snellius	9 660 000	1 : ∞
1719	Musschenbroek	10 004 000	1 : ∞
1720	Cassini	10 044 000	1 : (—66)
1740—1803	Peruanische und verbesserte Lappländische Gradmessung	10 000 157	1 : 310
1792—1806	Delambre, Annahme für das Metermass	10 000 000	1 : 334
1819	Walbeck.	10 000 266	1 : 302,76
1830	Schmidt.	10 000 061	1 : 297,648
1830	Airy	10 001 012	1 : 299,325
1841	Bessel	10 000 856	1 : 299,153
1866	Clarke	10 001 888	1 : 294,978
1872	Listing (typisches Ellipsoid)	10 000 218	1 : 289,000
1880	Clarke	10 001 871	1 : 293,466
1884	Helmert (Pendel-Beobachtungen) . .	. .	1 : 299,26
1887	Helmert (Referenz-Ellipsoid)	10 002 041	1 : 299,15

Litteratur zur Geschichte der Erdmessungen.

1617. *Snellius.* Eratosthenes Batavus, de terrae ambitus vera quantitate, u. s. w. Lugduni Batavorum, 1617 (I. Teil Altertum, Eratosthenes, Posidonius u. s. w., II. Teil niederländische Triangulierung).

1729. *Musschenbroek.* Dissertatio de magnitudine terrae, als Teil (S. 357—420) des allgemeinen Werkes: Petri van Musschenbroek physicae experimentales et geometricae u. s. w. Lugduni Batavorum 1729.

1806. *Delambre.* Base du système métrique I. Discours préliminaire.

1827. *Gehlers* physikalisches Wörterbuch, dritter Band, *Erde,* S. 825—940.

1829. *Schmidt.* Lehrbuch der math. und physischen Geographie. Göttingen 1829.

1849. *Encke.* Über die Dimensionen des Erdkörpers. Berl. Astr. Jahrb. für 1852, S. 318 u. ff.

1860. *Posch.* Geschichte und System der Breitengradmessungen. Freysing 1860.

1861. *Baeyer.* Über die Grösse und Figur der Erde. Eine Denkschrift zur Begründung einer mitteleuropäischen Gradmessung. Berlin 1861.

1868. *Fischer.* Untersuchungen über die Gestalt der Erde. Darmstadt 1868.

1869. *Wolf.* Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. Zürich 1869. 2. Band S. 125—146. (Litteraturausgaben.)

1873. *Mädler.* Geschichte der Himmelskunde. Braunschweig 1872, I. Band, S. 89, S. 142 und ff. (Litteraturangaben.)

1873. *Listing.* Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Grösse der Erde. Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus dem Jahr 1873. Göttingen 1873, S. 33-98.

1878. *Listing.* Neue geometrische und dynamische Konstanten des Erdkörpers. Aus den Nachrichten der K. Ges. der Wiss. Göttingen 1878.

1880. *Clarke.* Geodesy by Colonel A. R. Clarke, C. B. royal engineers; F. R. S.; u. s. w. Oxford at the Clarendon press. 1880.

1880—1884. *Helmert.* Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. Einleitung nnd I. Teil, die mathematischen Theorien. Leipzig 1880. II. Teil, die physikalischen Theorien. Leipzig 1884.

1885—1888. *Westphal.* Basisapparate und Basismessungen (mit Angaben über die älteren Gradmessungen). Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1885 und 1888.

Kapitel I.

Triangulierung erster Ordnung.

§ 2. Aufsuchung und Auswahl der Dreieckspunkte.

In dem zu vermessenden Gebiete werden solche hervorragende Punkte aufgesucht, zwischen welchen zusammengesehen werden kann, auf welchen feste Beobachtungsplätze eingerichtet werden können, und welche günstige Dreiecksverbindungen geben. Die Entfernungen solcher Punkte nimmt man etwa 20^{km} bis 50^{km}, nötigenfalls auch noch erheblich grösser.

Zur Aufsuchung von Triangulierungs-Punkten muss man das Land bereisen, namentlich alle *hoch* gelegenen Punkte, hohe Berge, Kirchtürme u. s. w. besteigen und jedenfalls alles was man sieht, durch flüchtige Winkelmessung, oder auch nur durch Kompasspeilung, vorläufig bestimmen.

In früheren Zeiten mass man wohl auch sofort endgültige Winkel; so berichtete z. B. *Bohnenberger* über seine erste Triangulierung von Württemberg, von 1797: „Eine vorläufige Bereisung des Landes wurde nicht vorgenommen, um die schicklichsten Punkte zu den Hauptdreiecken aufzusuchen, daher wurden an jedem Standpunkte alle Winkel zwischen Punkten genommen, von denen man eine zur Fortsetzung der Arbeit günstige Lage erwarten konnte. Erst am Ende der Reise war ich im stande, die Hauptdreiecke heraus zu suchen, deren Winkel nachher bei der Kleinaufnahme nachgemessen und durch Vervielfältigung genauer bestimmt wurden."

Dieses Verfahren ist heute nicht mehr am Platz aus zahlreichen Gründen: Zunächst ist im allgemeinen zu bemerken, dass Württemberg ein Hügelland ist, in welchem das Aufsuchen der Punkte am leichtesten ist, dann sind aber seit 1797 die Ansprüche an die Genauigkeit und an die günstige Form der Dreiecke so sehr gestiegen, dass das, was damals Bohnenberger als endgültige Triangulierung lieferte, heute kaum als erschöpfende Rekognoszierung gelten würde (ohne dass damit Bohnenbergers Arbeit von 1797 in ihrer damaligen Bedeutung beeinträchtigt würde).

Was *günstige* Dreiecksverbindungen sind, die man aufsuchen soll, das lässt sich allgemein schwer sagen, zumal die Anschauungen hierüber verschieden sind; jedenfalls ist ein Netz von nahezu gleichseitigen Dreiecken gut.

Indem weitere Betrachtungen hierüber auf später verschoben werden, bringen wir hier einen Auszug einer sehr wertvollen Abhandlung, welche im Jahre 1887



für die „Zeitschrift für Vermessungswesen“ von einem sehr erfahrenen Beamten der Landesaufnahme geschrieben wurde, und deren Abdruck vom Verfasser der Abhandlung uns besonders gestattet wurde.

Technischer Betrieb der Feldarbeiten der Triangulation erster Ordnung bei der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landesaufnahme, von Vermessungsdirigent *Erfurth*. „Zeitschrift für Vermessungswesen“ 1887, S. 377—383 und S. 421—437.

I. Die Erkundung im allgemeinen.

Schon *vor* der Bereisung des Gebietes, auf welchem eine Triangulierung vorbereitet werden soll, sind gewisse Vorarbeiten zu machen, welche gewöhnlich in dem der Feld-Rekognoszierung vorhergehenden Winter ausgeführt werden. Diese Vorarbeiten sind im wesentlichen folgende:

1) *Kartenstudien.*

Hier kommt hauptsächlich die topographische Spezialkarte von Mittel-Europa im Massstabe 1 : 200 000 (früher Reymann sche Karte genannt) in Betracht. In diese werden alle Punkte und Seiten der bereits fertigen Triangulierung, an welche angeschlossen werden muss, eingetragen. Nur für die Erkundung von Grundlinien und Basisvergrösserungsnetzen können Karten in grösserem Massstabe nötig werden. Sehr wichtig sind *Höhen*zahlen der Karte, sind solche nicht genügend vorhanden, so wird es sich empfehlen, nach weiteren Hilfsmitteln, nach Spezialkarten, geographischen Handbüchern und ähnlichen Publikationen die Höhenangaben der Karte möglichst zu vervollständigen.

2) *Studium der Vorgänge.*

Fast immer handelt es sich um Gebiete, welche in früherer Zeit schon mehrfach als Operationsfeld für grössere Triangulationen gedient haben. Die Landesaufnahme ist in der bevorzugten Lage, von diesen Vermessungen zum grössten Teil noch die Originalakten, Protokolle, Tagebücher, Rechnungen und eine grosse Zahl von Skizzen und Übersichtsblättern der verschiedensten Dreiecks-Konfigurationen zu besitzen. Dieses ganze ältere Material wird, so weit es für das Arbeitsgebiet in Betracht kommt, gründlich durchforscht, alles, was wertvoll oder von Interesse erscheint, herausgezogen und einem besonderen Tagebuche einverleibt.

Auf Grund dieser Studien und mit ihnen fortschreitend, werden sich ganz von selbst Projekte über vorhandene und wünschenswerte Dreiecks-Konfigurationen bilden, welche in vorläufigen Übersichtsdarstellungen zum Ausdruck gebracht, und deren Punkte, soweit sie älteren Triangulationen angehören, durch vorläufige rohe Rechnungen bestimmt werden. Dies geschieht in dem bei der trigonometrischen Abteilung eingeführten ebenen rechtwinkligen Coordinatensystem, und — da es hierbei auf einige Meter nicht ankommt — mit 4- oder 5 stelligen Logarithmen.

Die Abscissenaxe dieses Systems ist der 31. Längengrad, und die Coordinaten werden in diesem System einheitlich in ganz Preussen gezählt.

Alle Rechnungsergebnisse werden in übersichtlicher Form, nötigenfalls durch Handrisse erläutert, in das Tagebuch eingetragen. Dieses Buch nimmt ferner Notizen auf über Kommunikationen, Quartier-Verhältnisse, Beschaffung von Fuhrwerk, Bauholz u. s. w.



3) *Ausrüstung zu den Feldarbeiten.*

Jedes Mitglied der trigonometrischen Abteilung, welches während des Sommers mit Feldarbeiten betraut wird, erhält die nötige Zahl von „Offenen Ordres". Es sind dies Kollektiv-Erlasse der beteiligten Ministerien an die Landesbehörden, ausgestellt für den Chef der trigonometrischen Abteilung bzw. die diesem unterstellten Offiziere und Beamten, wodurch dieselben legitimiert werden und ihnen vorkommenden Falles die Unterstützung der Behörden gesichert wird.

Zur weiteren Ausrüstung des Dirigenten gehören:

ein kleines Universal-Instrument von 1,5^{kg} Gewicht,*)
ein kleiner Messtisch mit Stativ und Dosenlibelle,
ein grosses Handfernrohr,
ein Aneroidbarometer,
Massstäbe, Bandmass, ein Lot, Transporteur; —
ferner das gesammelte Material an Karten, Büchern und Manuskripten, Schreibmaterial, Formulare und Vorschriften.

Die zur Sektion gehörigen Trigonometer sind im wesentlichen ebenso ausgerüstet, führen aber ein erheblich grösseres Winkelmess-Instrument mit sich.

Ausserdem treten noch hinzu:

ein bis zwei kleinere Fernrohre,
einige Heliotrope,
ein Stativ zur Aufstellung des Universal-Instruments,
ferner Werkzeuge und Gerätschaften, welche für den Signalbau erforderlich sind, dazu gehören Werkzeuge des Zimmermanns und des Tischlers, Seil- und Tauwerk, Flaschenzüge u. s. w.

Näheres darüber wird sich beim Signalbau (§ 3.) ergeben.

II. Die Arbeiten im Felde behufs Auswahl der Punkte, oder die eigentliche Erkundung.

Der Zweck der Erkundung besteht darin, die Konfiguration einer neuen Dreieckskette oder eines neuen Dreiecksnetzes festzustellen und anzugeben, welche baulichen Einrichtungen auf jedem Punkte getroffen werden müssen, um die Konfiguration zu ermöglichen. So einfach diese Aufgabe klingt, so schwierig ist sie. Sie verlangt besondere körperliche und geistige Eigenschaften des Erkundenden und bürdet ihm zugleich eine erhebliche persönliche Verantwortlichkeit auf, da sich Vorschriften, wie die Arbeit auszuführen ist, allgemein gar nicht geben lassen. Es ist zunächst alles seiner Initiative und seinem Ermessen anheimgegeben.

Als Grundsatz ist festzuhalten, dass die Erkundung eine in sich selbständige Arbeit ist, welche die Grundlage für die ganze spätere Triangulation bildet, dass Fehler und Unterlassungssünden, welche etwa hierbei vorkommen, später gar nicht mehr gut zu machen sind.

---

*) Nach unserer Ansicht können noch mit Vorteil gebraucht werden: Ein Kompass zum Aufsetzen auf das kleine Universal-Instrument, jedenfalls ein Taschen-Kompass; ferner ein Spiegel Sextant oder kleiner Reflexionskreis zum Winkelmessen auf hohen Türmen, auf Umschaugerüsten u. s. w., überall, wo kein fester Instrumentenstand zu gewinnen ist. Das Messen mit dem Sextanten in freier Hand muss aber wohl geübt sein, vgl. Jordan, Grundzüge der astr. Zeit- und Orts-Bestimmung, 1885, § 40.

In Bezug auf dieses Thema sei hierbei auf die verdienstvolle Arbeit von *Gaede*, „Beiträge zur Kenntnis von Gauss' praktisch-geodätischen Arbeiten“, „Zeitschrift für Vermessungswesen“, Jahrgang 1885, S. 136 u. ff. verwiesen.

Die Erkundung eines Dreieckssystems, sei es nun Kette oder Netz, muss als eine einheitliche Arbeit für das ganze System aufgefasst werden. Sie darf nicht eher abgeschlossen werden, als bis das ganze Arbeitsfeld gründlich durchforscht ist, und bis alle möglichen brauchbaren Konfigurationen festgestellt sind. Bei einer *Kette*, für welche an beiden Enden feste Anschlussseiten gegeben sind, ist man nach der Mitte zu unabhängiger, hat grösseren Spielraum; doch ist nicht zu vergessen, dass jeder dieser Punkte bei späteren Arbeiten wiederum Auschlusspunkt für eine andere Kette oder für ein Netz werden kann.

Schwieriger ist die Erkundung eines *Netzes*, für welches rundum ein ganzes Polygon von festen Anschlussseiten gegeben ist. Man kann von fast keinem Punkte, wenn er zunächst auch noch so brauchbar erscheint, von vornherein sagen, dass er wirklich endgültig brauchbar ist. Selbstverständlich giebt es einzelne Punkte, die vermöge ihrer dominierenden Lage gar nicht zu umgehen sind, wie z. B. den Brocken, Inselsberg, Feldberg im Taunus, Melibokus u. s. w. Solche Punkte sind aber Ausnahmen.

Die Erkundung wird für gewöhnlich auf den gegebenen Anschlusspunkten beginnen, ferner diejenigen Punkte umfassen, welche man durch die Vorstudien als frühere Punkte kennen gelernt hat, und endlich auf alle Punkte sich erstrecken, welche während der Arbeiten im Felde sich sonst noch als vielleicht geeignet herausstellen. Die Erkundung ist eine sehr mühsame, zeitraubende und aufregende Arbeit, welche an die körperliche und geistige Ausdauer hohe Anforderungen stellt.

Die angeführten Schwierigkeiten beziehen sich zunächst nur auf Norddeutschland. In südlicheren Ländern von günstigerer Bodengestaltung, mit geringerer Bewaldung und klarerer Luft (z. B. Süddeutschland, Frankreich, Spanien, Italien) werden sie kaum, oder doch nicht in dem Masse vorhanden sein.

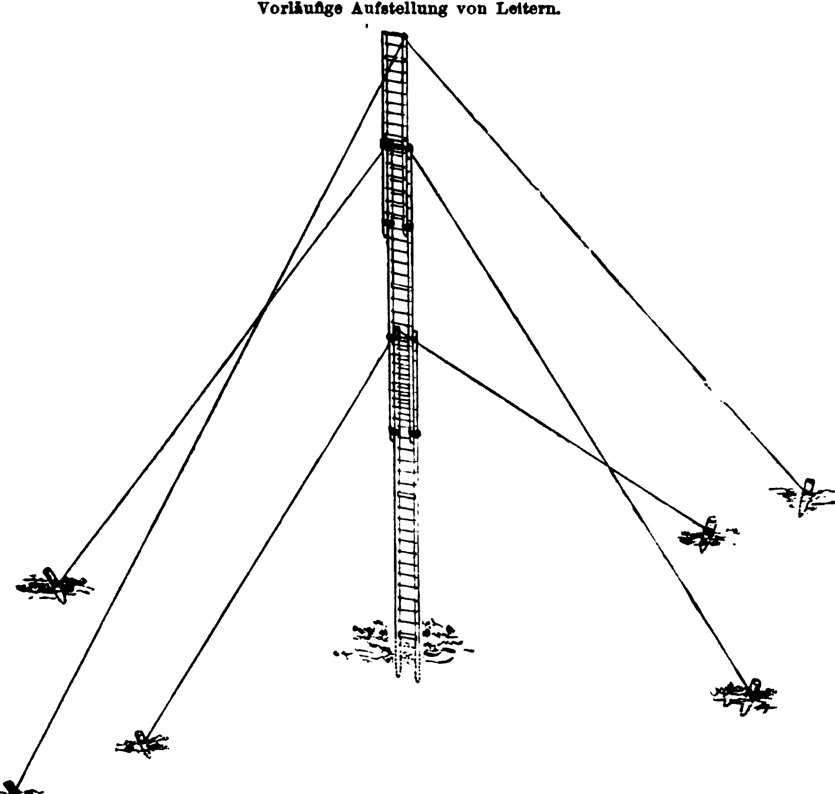
Die Erkundung auf einem Punkte gestaltet sich folgendermassen: Bevor man sich auf ihn begiebt, empfiehlt es sich, alles, was man über ihn schon festgestellt hat, nochmals zu rekapitulieren und etwa fehlende rechnerische Vorarbeiten zu ergänzen. Auf ihm angekommen, hat man den ganzen Horizont gründlich zu durchforschen. Zu dem Ende stellt man den Messtisch und darauf das kleine Universal-Instrument auf und lässt den ganzen Umkreis langsam durch das Fernrohr wandern. Alle hervorragenden Punkte stellt man ein, liest die Winkel ab und schreibt sie auf. Hierzu gehören trigonometrische Signale, Türme, Windmühlen, ferner hervorragende Bergkuppen, markierte Baumgruppen, Punkte, wo etwa näherer Horizont aufhört und fernerer anfängt, die Grenzen von Gebirgszügen, Wäldern u. dergl. Dabei dient das Instrument zur Messung der Winkel, dagegen zur näheren Untersuchung der Objekte das stärkere Handfernrohr. Die Entfernungen werden geschätzt. Die Resultate mit erläuternden Bemerkungen werden graphisch in einer Skizze auf starkem Zeichenpapier zur Darstellung gebracht. Solche Skizze nennt man bei der Abteilung „*Spinne*“. Im Quartier findet die Verarbeitung, Sichtung und ordnungsmässige Eintragung des gewonnenen Materials unter Zuhilfenahme von Karte, Zirkel und Transporteur statt. Dies muss stets sofort erfolgen, damit weitere Entschlüsse gefasst und Vorbereitungen für den folgenden Tag getroffen werden können.

Es wird häufig der Fall eintreten, dass man auf dem in Aussicht genommenen



Punkte zu ebener Erde keinen Rundblick hat, wenn an der betreffenden Stelle Wald vorhanden ist, oder wenn die Gegend in hoher Kultur steht und anderweite Hindernisse bietet, Gehöfte, Gärten u. s. w. Dann muss man zunächst einen möglichst hohen Standpunkt zu gewinnen suchen, indem man Bäume erklettert, Windmühlen, Türme besteigt. In Ermanglung von solchen kann man sich mitunter dadurch helfen, dass man eine Leiter, wie man sie in jedem Dorfe findet, senkrecht aufrichten lässt (Fig. 1.).

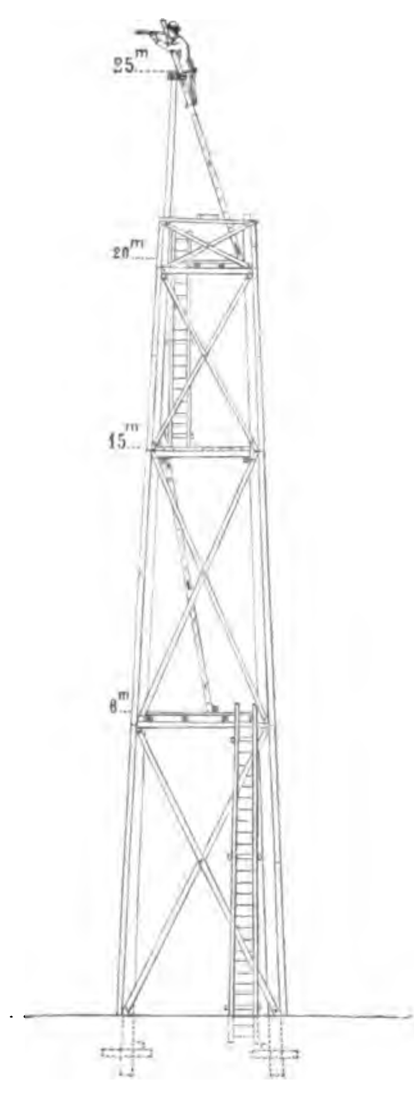
Fig. 1.
Vorläufige Aufstellung von Leitern.



Den nötigen Halt giebt man ihr dadurch, dass man sie mit dem unteren Ende in die Erde gräbt und das obere durch Seile halten lässt; eine zweite und dritte Leiter kann daran in die Höhe geschoben und ähnlich festgestellt werden. Man kommt auf diese Weise leicht 10—15^{m} hoch. Es ist dies jedoch alles nur eine vorläufige Massregel, welche die Auswahl des zweckmässigsten Platzes erleichtern soll.

Zur Ausführung der wirklichen Erkundung, also zur Feststellung, ob die gewünschten Richtungen vorhanden, und in welcher Höhe sie zu haben sind, wird dann die Errichtung eines *Umschau-Gerüstes* (Fig. 2. S. 20) notwendig. Man wird das Gerüst immer einige Meter höher bauen lassen, als man voraussichtlich gebrauchen wird.

Fig. 2.
Umschau-Gerüst.



Ein solches Umschau-Gerüst ist leicht in die Höhe getrieben. Vier Ständer, welche bei grösserer Höhe aus starken Stangen zusammengesetzt werden, geben das Gerippe und werden durch mehrere horizontale Kränze zusammengehalten. Jede Wand dieses Gerüstes erhält durch Kreuzverbindungen (Verschwertungen) den nötigen Halt. Oben wird ein Fussboden gelegt, ein Geländer gezogen und ein roher Tisch oder ein Brett als Leuchtstand angebracht. Auf die Ständer wird eventuell eine Pyramidenspitze von schwarz angestrichenen Brettern aufgesetzt, um das Gerüst von den umliegenden Punkten leichter aufzufinden, und um es auch als Zielpunkt benützen zu können. — Man kann rechnen, dass durchschnittlich in einem Tage 10m gebaut werden, und dass das Meter ungefähr 4—5 Mark kostet. Wird später der Punkt endgültig gewählt, so kann das Holz des Gerüstes beim Bau des Signals verwendet werden.

Bei der Erkundung des Wesernetzes im Sommer 1883 sind von dem Vermessungsdirigenten Hauptmann Gaede über zwanzig Umschau-Gerüste leichtester Konstruktion bis zu 32m Höhe mit bestem Erfolge benützt worden.

Eine weitere wichtige Gattung von Punkten bilden *Türme* und ähnliche Bauwerke. Sie bieten im allgemeinen den Vorteil, dass sie meist die Umgegend erheblich überragen, haben aber den Nachteil, dass sie besondere und oft recht schwierige Einrichtungen behufs Ausführung der Beobachtungen erfordern, und dass zu ihrer Benützung die Erlaubnis der Behörden und Besitzer erwirkt werden muss. — Es giebt aber Gegenden, wo sie durchaus nicht zu umgehen sind, wie z. B. in dem stark angebauten Flachlande des nordwestlichen Deutschlands. In der hannoverschen Kette und im Wesernetz mussten deshalb, entsprechend dem Vorgange von Gauss, unverhältnismässig viele Türme zu Punkten I. Ordnung gemacht werden.

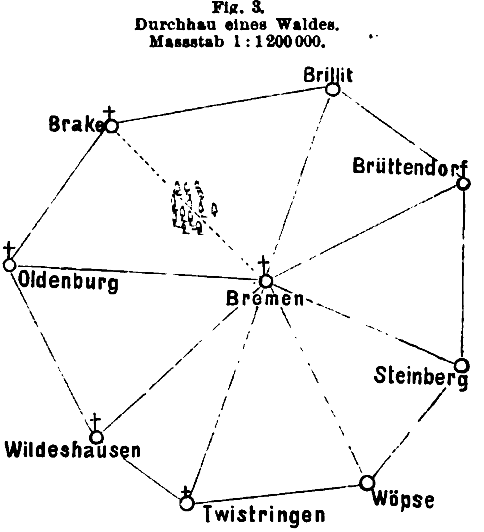
Für die vorläufige Erkundung auf Türmen wird es zunächst genügen, eine flüchtige Einrichtung zu treffen, dass das kleine Instrument aufgestellt, vielleicht auch ein Heliotrop angebracht werden kann.

Erdkrümmung und Strahlenbrechung. Man kann manchmal durch Höhenwinkelmessung entscheiden, ob eine wünschenswerte Richtung überhaupt möglich ist. (Die nötigen Theorien hiezu, mit Erdkrümmung und Strahlenbrechung, haben wir in unserem II. Bande, „Handb. d. Verm." 4. Aufl. 1893, Kap. XI. behandelt).

Durchhau von Wäldern.

Die Fälle, dass einzelne Bäume hindern und gefällt oder wenigstens ausgeästet werden müssen, kommen häufig vor. Von diesen ist hier nicht die Rede, da sie wenig Schwierigkeiten bieten. Anders liegt der Fall, wenn eine Richtung längere Waldstrecken durchschneidet. Solche grössere Durchhaue sind als äusserstes Gewaltmittel zu betrachten und nur durch die höchste Not gerechtfertigt, da sie erhebliche Eingriffe in private Rechte darstellen, viele, oft recht unerquickliche Verhandlungen mit den Besitzern erfordern und endlich grosse Kosten an Zeit und Geld verursachen. Nichtsdestoweniger wird man sich doch mitunter dazu entschliessen müssen, wenn nur dadurch eine wesentliche Verbesserung der Dreiecksformen gewonnen werden kann.

Fig. 3.
Durchhau eines Waldes.
Massstab 1:1200000.



Ein solcher Fall trat beispielsweise im Sommer 1883 bei Erkundung des Wesernetzes mit der Richtung Bremen-Brake ein.

Diese Richtung war der einzige Strahl, welcher zur Vollständigkeit des Polygons um Bremen noch fehlte; ihre Herstellung erschien für die ganze Konfiguration von grossem Werte. Die örtlichen Verhältnisse lagen folgendermassen: Von Brake aus schlossen, etwa 16^{km} entfernt, in der Richtung nach Bremen bewaldete Berge den Horizont. Auch von Bremen aus erschien hochgelegener Wald, etwa 14^{km} entfernt, als Abschluss des Gesichtskreises gegen Brake. Es lag somit ziemlich in der Mitte der 35^{km} langen Richtung als Hindernis ein etwa 5^{km} breites Waldgebiet, über welches hinaus auch die Turmspitzen gegenseitig nicht sichtbar waren. Eine örtliche Erkundung der Hindernisse ergab, dass eine Reihe parallel streichender, ziemlich bedeutender Höhenzüge die projektierte Verbindung der beiden Türme von Bremen und Brake annähernd senkrecht durchschnitt, und dass die ganze Gegend mit vielen einzelnen Waldparzellen bedeckt war, welche besonders auf den Kämmen der Berge sehr hohe Bäume, Eichen und Buchen von $30-40^{m}$ Höhe, enthielten.

Nun musste zunächst durch besondere schärfere Messung und Rechnung die Richtung in horizontaler Beziehung mit einer Genauigkeit von 10—20″ festgelegt werden. In vertikaler Beziehung wurden die Höhen in der Gegend der Hindernisse teils aus älteren Daten, teils durch besondere Messungen festgestellt. Es ergab sich daraus mit Sicherheit, dass nicht etwa die Berge selbst, sondern nur die Bäume das

Hindernis bildeten. Nunmehr wurde zur Markierung und Freilegung der Richtung geschritten.

Das allgemeine Verfahren bei solcher Arbeit ist im Prinzip einfach, in der Ausführung jedoch mitunter recht schwierig und zeitraubend. Man richtet auf beiden Endpunkten Beobachtungsstände ein und bringt in dem Hindernis einige Flaggen auf den höchsten Bäumen an, so dass sie schon möglichst in der Richtung liegen. Um sie nicht mit einander zu verwechseln, müssen sie durch verschiedene Farben oder dergl. kenntlich sein. Die Winkel nach den Flaggen werden gemessen, und aus ihnen unter Zuhilfenahme der angenähert festgestellten, etwa aus der Karte entnommenen Entfernungen die seitlichen Verschiebungen berechnet, welche nötig sind, um die Flaggen in die Richtung zu bringen. (Vgl. hiezu den Abschnitt „Abstecken von langen Geraden" in unserem II. Bande „Handb. d. Verm." 4. Aufl., 1893, § 199).

Bei dem Durchhau Bremen-Brake sind rund 1620 Mark an Entschädigungen gezahlt worden.

Grösse der Dreiecksseiten. Rein theoretisch lässt sich über die Vorzüge oder Nachteile kürzerer oder längerer Dreiecksseiten wenig sagen; so einfache allgemeine Gesetze, wie sie z. B. über die Zielweiten bei Polygonzügen, bei Nivellierung u. s. w. bestehen, giebt es für Triangulierung nicht. (Vergl. hiezu die späteren § 18. und § 19.)

Lange Seiten haben den Vorteil, dass man rasch weiter kommt, und wenn man einmal eine lange Seite aus einer kurzen Basis abgeleitet hat, dann ist es auch für die rein theoretische Genauigkeit besser, mit grossen Dreiecken fortzufahren, sowohl in Hinsicht auf Azimutübertragung als auch in Hinsicht auf Längenübertragung; lange Sichten sind aber schwieriger und seltener zu messen, und werden daher verhältnismässig, d. h. mit Rücksicht auf die aufgewendete Zeit und Mühe ungenauer als kurze.

Die Erfahrung hat dazu geführt, im Mittel nur etwa 20—50^{km} Seitenlänge zu nehmen, jedoch wenn besondere Gründe vorlagen, ist man auch schon bis zu 100^{km}, 200^{m} und noch weiter gegangen.

Einige besonders lange Dreiecksseiten stellen wir im folgenden zusammen:

Dreiecksseite	Meter	Bogen
Trunz-Galtgarben (Preussen, Bessel)	79 644	0° 43′
Brocken-Inselsberg (Hannover, Gauss)	105 977	0° 57′
Kamiensberg-Knibiskow (Afrika, Maclear)	128 028	1° 9′
Campvey-Desierto (Frankreich)	160 903	1° 27′
Slieve Donard-Sca Fell (England, Ord. trig. survey S. 434)	178 932	1° 36′
Ararat-Godarebi (Kaukasus, Struve)	202 384	1° 49′
Mulhacen-Filhaoussen (Mittelländ. Meer, Ibanez). . .	269 926	2° 26′

Nach *Helmert* math. u. ph. Th. d. höheren Geodäsie I. S. 70 sind in Vorder-Indien von den Engländern nach dem Himalaya Sichten bis zu 340^{km} genommen worden.

Von der vorerwähnten trigonometrischen Überspannung des mittelländischen Meeres geben wir in Fig. 4. S. 23 eine Darstellung mit eingeschriebenen Längen, Höhen und Winkeln. Das Unternehmen wurde im Herbst 1879 von Ibanez und Perrier ausgeführt.

Zur Signalisierung reichte Heliotropenlicht nicht aus, es wurde deshalb elektrisches Licht mit Nachtbeobachtung angewendet.



(Weiteres hierüber geben die Verhandl. d. 6. Konf. d. Eur. Gr., General-Bericht für 1880, S. 44—57; vgl. auch zwei Berichte in der „Zeitschr. f. Verm.“, Pattenhausen 1881, S. 247—257 und Fenner 1882, S. 303—308.)

Fig. 4.
Triangulierung über das mittelländische Meer zwischen Spanien und Algier, 1879.
Massstab 1 : 4 500 000.



§ 3. Pfeilerbau und Signalbau.

Nachdem die Triangulierungspunkte ausgewählt sind, hat man Einrichtungen zu treffen, erstens zum festen Aufstellen des Theodolits auf jedem Punkte und zweitens zum gegenseitigen Sichtbarmachen der Punkte für die Winkelmessung.

Diese Einrichtungen sind verschieden, je nachdem man es mit einem Punkte auf dem natürlichen Erdboden, z. B. auf dem Gipfel eines Berges, oder mit einem Punkte auf einem Turme oder ähnlichem Bauwerke zu thun hat.

Zur Sichtbarmachung dient heutzutage fast ausschliesslich das Heliotrop, von welchem später in § 4. die Rede sein wird. Die Einrichtung der Heliotropstände erfolgt gemeinsam mit dem Bau der Theodolitstände.

Zu ebener Erde nahm man früher als Theodolitstände allgemein hölzerne Stative; indessen in neuerer Zeit erbaut man für Messungen erster Ordnung *steinerne Pfeiler*.

Nach Mitteilung von Vermessungs-Dirigent *Erfurth* (vgl. das Citat technischer Betrieb u. s. w. S. 16) hat die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme hiefür folgende Einrichtungen:

„Ein Beobachtungspfeiler der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme



besteht entweder aus einem einzigen behauenen Stein, lang genug, um ihm den nötigen Halt im Erdboden zu geben, oder, da solche Monolithe schwer zu haben und teuer sind, aus mehreren behauenen Bruchsteinen von ganzem Querschnitt, welche mit Zement gemauert und lagenweise durch Dübel oder durch eine oder zwei durchgehende Eisenstangen fest verbunden werden. Aus Ziegelsteinen aufgemauerte Pfeiler sind möglichst zu vermeiden, da sie bei wechselndem Wetter, namentlich durch Regen und Frost, baldiger Zerstörung anheimfallen, auch mutwilligen Beschädigungen mehr ausgesetzt sind. Um den Pfeiler wird eine vierseitige Pyramide errichtet; die Spitze derselben wird mit Brettern bekleidet und schwarz angestrichen. Ausserdem wird ein Fussboden von Brettern gelegt, um bei windigem Wetter das Aufwirbeln von Sand und Staub möglichst zu verhindern."

Über Pfeilerbau und Punktversicherungen, teils auf dem natürlichen Erdboden, teils auf Türmen, können wir einige Erfahrungen mitteilen von den 10 „Gradmessungspfeilern", welche vom Verfasser 1869—1873 erbaut wurden. — Wir benützten dabei auch die von *Nagel* im Generalbericht d. Europ. Gradm. für 1864, S. 39—40 mitgeteilten Erfahrungen.

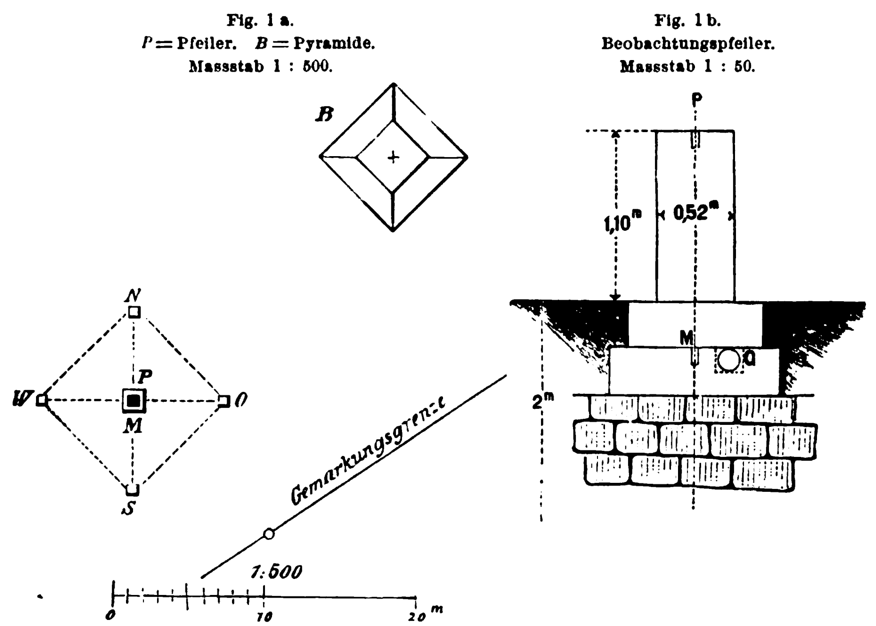
Die badischen Pfeiler mit ihren Versicherungen wurden zugleich an die vorzüglichen Punktfestlegungen der badischen Landes-Triangulierung angeschlossen.

Ein Beispiel für beides ist in Fig. 1 a. und Fig. 1 b. gegeben.

Trigonometrischer Punkt Kandel (Schwarzwald).

Fig. 1 a. P = Pfeiler. B = Pyramide. Massstab 1 : 500.

Fig. 1 b. Beobachtungspfeiler. Massstab 1 : 50.



Die Bezeichnung eines Punktes der (alten) badischen Landes-Triangulierung wurde etwa im Jahr 1820 durch eine von Felsstücken aufgebaute vierseitige abgekürzte Pyramide B bewerkstelligt. Der trigonometrische Punkt ist auf der Mitte der Pyramide



durch ein eingehauenes + bezeichnet. Ferner wurden noch vier solche Zeichen auf der Pyramide angebracht, und ausserdem der Dreieckspunkt gegen 8 benachbarte Gemarkungs-Grenzsteine durch unmittelbare Messung von 11 Entfernungen und 14 Winkeln festgelegt (letzteres ist in unserer Fig. 1 a. *nicht* angedeutet).

Im Jahr 1870 fand ich die Lage der 50 Jahre alten Versicherungspunkte noch auf wenige Centimeter übereinstimmend mit den früheren Messungen; jedoch wurde die Pyramide nun verlassen und ein *neuer* Punkt P auf einem Pfeiler mit einem 2^m tiefen Fundament hergerichtet, wie die Einzelzeichnung Fig. 1 b. zeigt, und ferner wurden 4 Versicherungsquader $S\ W\ N\ O$ auf Fundamentquadern versenkt.

In dem Fundamentquader des Pfeilers bei M und in jedem der 4 anderen Quader ist ein Messingcylinder in Blei eingegossen, und ein sechster Cylinder P lotrecht über M ist oben auf dem Pfeiler eingegossen, um die Theodolitmitte zur Winkelmessung zu bezeichnen.

Unten ist auch ein Glascylinder G eingesenkt, ein Schriftstück enthaltend, das der Nachwelt die Bedeutung der ganzen Anlage übermitteln soll.

Die 4 Versicherungspunkte wurden nicht willkürlich, sondern nach *Nord*, *Ost*, *Süd*, *West* eingewiesen, was leicht auf etwa 1′ genau gemacht werden konnte mit Hilfe der alten badischen Landes-Triangulierung (trigonometrische Richtungswinkel mit Rücksicht auf Meridian-Konvergenz).

Nachdem somit die 5 unteren Punkte auf ihren Fundamentquadern in den Baugruben festlagen, wurden ihre Abstände gemessen:

$$MN = 6{,}059^m \qquad NO = 8{,}579^m$$
$$MO = 6{,}075 \qquad OS = 8{,}427$$
$$MS = 5{,}840 \qquad SW = 8{,}465$$
$$MW = 6{,}125 \qquad WN = 8{,}620$$

Man hat dabei 4 Hypotenusenproben, welche innerhalb weniger Millimeter stimmen sollen.

Um nun nach dem Aufbau des Pfeilers selbst den Punkt P genau lotrecht über M zu bringen, verfuhren wir so: Während der Theodolit centrisch über M stand und die 4 Azimute 0°, 90°, 180°, 270° eingewiesen wurden, musste mindestens ein ferner Punkt H mit angezielt werden, der durch sein berechnetes Azimut jene 4 Einweis-Azimute lieferte. Nach dem Aufbau des Pfeilers wurde der Theodolit *vorläufig* aufgestellt, mit Hilfe des fernen Punktes H orientiert und die 4 nahen Punkte wieder angezielt. Wegen der Excentricität der vorläufigen Theodolitstellung wurden nun nicht wieder genau 0°, 90°, 180°, 270° erhalten, sondern kleine Abweichungen, welche aber mit Zuziehung der 4 Entfernungen vollends zur genauen Centrierung führten.

Vor und nach der Pfeileraufstellung wurden alle Punkte nivelliert.

Das Endergebnis drückt sich in folgenden Coordinaten und Höhen aus, im badischen System $+x$ nach Süden, $+y$ nach Westen, h ungefähr um 2^m zu gross im Vergleich mit Höhen über $N.N.$

Punkt		y	x	h
Pyramide, Kreuz	+	+ 33 403,830^m	+ 158 255,280^m	1247,010^m
Pfeiler oben	P	+ 33 421,215	+ 158 271,909	1244,360
„ unten	M	„	„	1242,986
Versicherung	N	+ 33 421,180	+ 158 265,850	1243,216
„	O	+ 33 415 140	+ 158 271,944	1242.993
„	S	+ 33 421,249	+ 158 277,749	1242,711
„	W	+ 33 427,340	+ 158 271,873	1242,861

Wir haben diese Zahlen beispielshalber hier hergesetzt, weil solche oder entsprechend genaue Angaben, mit Zeichnungen, den amtlichen Triangulierungs-Veröffentlichungen beigegeben werden sollen.

Über *Signalbau* im besonderen haben wir die wertvollsten Mitteilungen in der Abhandlung von *Erfurth*, welche wir schon auf S. 16 citiert haben bei dem Abdruck des ersten Teiles.

Folgendes ist ein Auszug aus dem zweiten Teil von Erfurth:

Der Signalbau muss den Winkelmessungen mindestens ein Jahr voraus sein. Es wird schon im Laufe des Winters, sobald die Projekte festgestellt sind, Auftrag erteilt, welche Signale im folgenden Sommer gebaut werden sollen, damit das nötige Holz noch im Winter geschlagen werden kann. Denn die Bäume müssen vor dem Einschiessen des Saftes gefällt werden.

Der Signalbau umfasst die Herstellung aller Einrichtungen, welche erforderlich sind, um auf den endgültig bestimmten Punkten Beobachtungen machen, sowie auch dieselben von anderen Punkten aus als Zielpunkte benützen zu können. Für gewöhnlich dient der Stand des Theodolits, der Beobachtungsstand, zugleich auch als Stand für den einzustellenden Heliotropen, als Leuchtstand. Es kommt jedoch nicht selten vor, dass für schwierige Richtungen noch besondere Leuchtstände in grösserer Höhe eingerichtet werden müssen. Bei Winkelmessungen erster Ordnung wird zwar in der Regel nur auf Heliotrope eingestellt, nichtsdestoweniger erhält aber jedes auf dem Erdboden erbaute Signal eine schwarze Spitze, welche hauptsächlich für die Messungen der niederen Ordnungen als Einstellungs-Zielpunkt dient.

Signale mit erhöhten Beobachtungs- und Leuchtständen werden bei der trigonometrischen Abteilung aus Holz bis zu ungefähr 25^m Beobachtungshöhe und 30^m Leuchthöhe noch mit solcher Festigkeit gebaut, dass auch bei ziemlichem Winde die Beobachtungen mit vollster Genauigkeit und Zuverlässigkeit gemacht werden können. Es ist dies dadurch möglich, dass die Beamten, welche die Signalbauten ausführen, seit Jahren in diesen Arbeiten thätig sind und reiche Erfahrungen unter den verschiedensten Verhältnissen gesammelt haben.

Bei jedem solchen Signal sind *zwei* vollständig von einander *unabhängige und für sich isolierte* Bauten zu unterscheiden: der Beobachtungspfeiler als Stand für das Instrument, und das den Pfeiler umgebende Gerüst für die Beobachter. Die Pfeiler sind entweder Standpfeiler oder Hängepfeiler.

Standpfeiler werden bei grösseren Beobachtungshöhen errichtet, ein Beispiel giebt die nachfolgende Fig. 4 S. 29.

Hängepfeiler werden seitwärts durch Streben getragen und reichen in der Mitte nicht bis zum Erdboden herab, sondern lassen in der Mitte so viel freien Raum, dass der Beobachtungspunkt von oben herunter gelotet und *centrisch* festgelegt werden kann (was bei *Stand*pfeilern nicht möglich ist). Aus diesem Grunde werden in neuerer Zeit bei der trigonometrischen Abteilung fast nur noch Hängepfeiler gebaut, z. B. Steuerndieb in Band II, 4. Aufl. 1895, S. 256.

Ein gutes Beispiel eines Hängepfeilers werden wir später auch in § 12. als Endpfeiler der Göttinger Basismessung kennen lernen.

Zur Verbindung von Pfeiler und Streben dienen durchgehende eiserne Schraubenbolzen. Zur Befestigung der unteren Stammenden in der Erde werden hölzerne Anker



angebracht; bei leichtem Boden werden ausserdem Steinbrocken in die Löcher geschüttet, schichtweise mit Wasser eingeschlemmt und festgerammt.

Das ganze System von Pfeiler und Streben muss nun noch gegen Winddruck, Durchbiegen und Verziehen besonders gesteift werden. Dies geschieht

1) durch Verbindungen zwischen zwei nebeneinander liegenden Streben, sogen. Kränze und Schwerter, Fig. 2.,
2) durch Verbindungen zwischen Pfeiler und Streben, Kreuze und Quirle, Fig. 3.

Fig. 2.
Kränze und Schwerter.

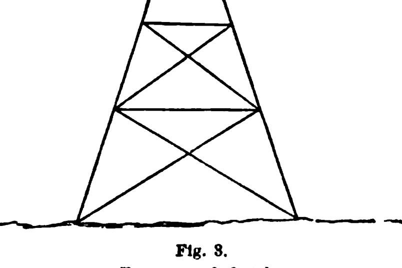
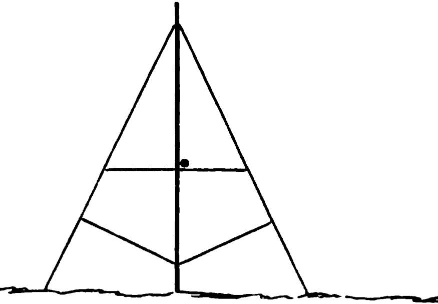


Fig. 3.
Kreuze und Quirle.



Ein Kranz besteht aus vier Hölzern, welche in gleicher Höhe über dem Erdboden von Strebe zu Strebe geführt werden.

Schwerter sind diagonale Verbindungen in den durch die Kränze entstandenen Paralleltrapezen. Bei sehr hohen Signalen können für die unterste Verschwertung noch besondere Hilfsstützen und Unterzüge nötig werden, welche immer in den Erdboden zu führen sind.

Kreuze sind Hölzer, welche je zwei gegenüberliegende Streben unter sich und mit dem Pfeiler verbinden. Quirle werden zwischen Pfeiler und je einer Strebe gesetzt; sie müssen die letztere möglichst rechtwinklig treffen.

Das Beobachtungs-Gerüst.

Um den Pfeiler wird das Beobachtungs-Gerüst unabhängig so errichtet, dass dasselbe nirgends mit dem Pfeilerbau in Berührung kommt. Es besteht aus vier Ständern, welche nicht senkrecht, sondern nach oben zu mit einer Neigung von ungefähr 1 : 15 nach innen gestellt werden. Die Feststellung der Ständer erfolgt wie beim Pfeilerbau durch Kränze und Schwerter; doch können diese selten so regelmässig angebracht sein, sondern müssen den Verhältnissen angepasst werden, da die völlige Isolierung beider Bausyteme von einander streng gewahrt werden muss. In Höhen von 5—8^{m} werden Fussböden gelegt, zu denen man auf Leitern emporsteigt. Der oberste Fussboden bildet den Beobachtungsraum in quadratischer Form von 2,3—2,5^{m} Seite. Die Höhe des Beobachtungs-Punktes über dem obersten Fussboden beträgt 1,12—1,16^{m}. Zum Schutze wird ein Geländer aus starken Latten gezogen. Zwei Meter über dem Fussboden läuft um alle 4 Gerüstständer ein horizontaler Kranz von Latten zum Anbringen von Leinwandplanen, welche später beim Beobachten zum Schutze des Instruments gegen Sonne und Wind ausgespannt werden. Bei der ersten Anlage des Gerüstes muss schon darauf geachtet werden, dass vom Beobachtungspunkt aus gesehen keine der zu messenden Richtungen durch einen Ständer verdeckt wird. Jede dieser

letzteren muss mindestens 5cm daran vorbeistreichen. Auf die Ständer wird eine vierseitige Pyramide aufgesetzt, deren Spitze mit Brettern bekleidet und geschwärzt wird; die Spitze liegt in der Regel 4—5m über der Beobachtungsplatte. Wird für einzelne Richtungen ein erhöhter Leuchtstand notwendig, so muss das Gerüst entsprechend höher und solider gebaut werden. Die Leuchtplatte, welche dieselbe Grösse hat wie die Beobachtungsplatte, wird gewöhnlich auf der Pyramidenspitze befestigt.

Da die Signale der ersten Ordnung auf eine längere Reihe von Jahren bis zur Beendigung aller Vermessungsarbeiten stehen bleiben müssen, so werden diejenigen Holzteile, welche dem Verderben am meisten ausgesetzt sind, d. h. die in oder nahe dem Erdboden befindlichen Stammenden, zum Schutze gegen Fäulnis und Insektenfrass *imprägniert*. Die Imprägnierung erfolgt durch Anstrich der betreffenden Holzteile und ausserdem durch Einguss in das Innere der Hölzer. Der dazu verwendete Stoff besteht aus Chlorzink, kaltem Wasser und Karbolsäure.

Zur besseren Erläuterung des bisher über den Bau erhöhter Signale Gesagten wird nachstehend auf S. 29 die Zeichnung eines solchen gegeben. Auch sei noch hinzugefügt, dass die Gesamtkosten in runden Summen betragen haben:

für das Signal Wöpse . . . . 1300 Mark
„ „ „ Brüttendorf . . . . 1190 „
„ „ „ Wittekind . . . . 1740 „

Ein Pyramiden-Signal von 31m Höhe, auf Steuerndieb bei Hannover, haben wir bereits in unserem II. Bande, „Handb. d. Verm.“ 4. Aufl. 1893, S. 256 gegeben, nebst anderen Angaben über Pfeilerbau u. s. w., welche auch hier hergehörig sind.

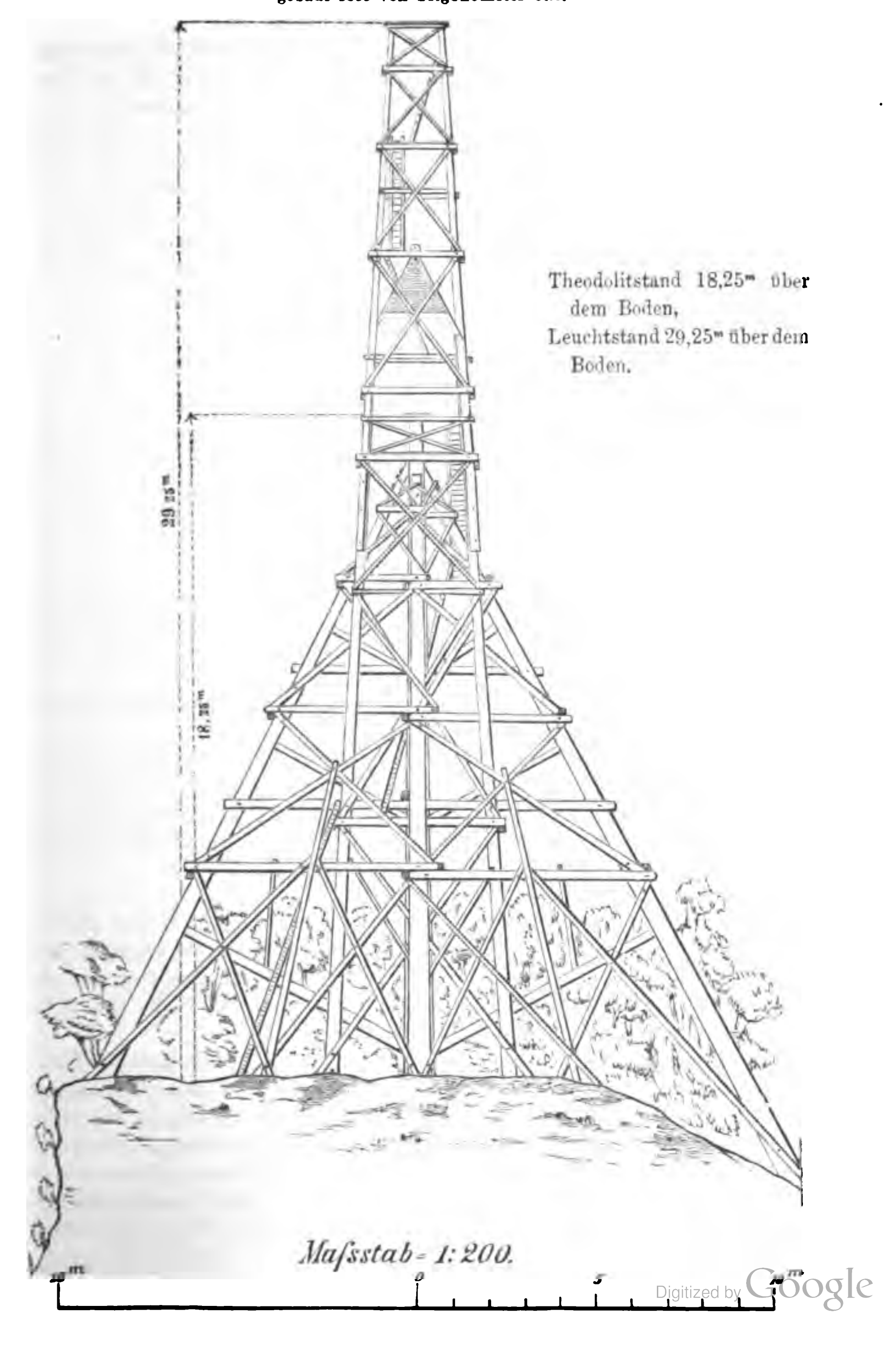
Kleinere Signale von 4—10m Beobachtungshöhe kosten ungefähr 150—500 M., von 10—20m Beobachtungshöhe 500—1000 M. Die Kosten können durch örtliche Verhältnisse, höhere Preise für Fuhrwerk und Arbeitskräfte, sowie namentlich durch etwaigen weiten Transport des Holzes sehr verschieden ausfallen. Was die erforderliche Bauzeit für ein höheres Signal anbetrifft, so kann man bis zu 20m Beobachtungshöhe ungefähr 1 Tag für 1 Meter rechnen, für jedes Meter über diese Höhe hinaus 2 Tage.

Die Einrichtung von *Türmen* und ähnlichen Bauwerken zu Beobachtungszwecken bietet häufig besondere Schwierigkeiten. Es lassen sich für diese Arbeit keine allgemeinen Regeln geben, da dieselbe von der Bauart des Turmes abhängig ist. Als Grundbedingung ist festzuhalten, dass für das Instrument ein besonderer, möglichst fester und isolierter Stand, und für den Beobachter ausreichender und gesicherter Raum geschaffen werden muss. Dabei ist stets auf möglichste Schonung des Turmes Rücksicht zu nehmen und Vorkehrung zu treffen, dass durch die zu machenden Öffnungen nicht Regen und Schnee eindringen kann, damit eine Beschädigung des Turmes verhindert wird.

In dem nördlichen Teil der hannoverschen Kette und des Wesernetzes haben fast durchweg Kirchtürme und Leuchttürme zu Beobachtungs-Stationen eingerichtet werden müssen, und trotz der verschiedenen und mitunter recht mangelhaften Bauart der Türme ist es doch gelungen, die Einrichtungen so zu treffen, dass die Beobachtungen mit genügender Sicherheit gemacht werden konnten. Es trat hierbei nicht selten der Fall ein, dass, um den Horizont rundum zu beherrschen und alle Richtungen einstellen zu können, sogar *zwei* Beobachtungsstände auf einem Turme gebaut werden



Fig. 4.
Signal Wittekind der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme, gebaut 1885 von Trigonometer *Otto*.



mussten, wie z. B. bei den Kirchtürmen von Brake und Westerstede und bei dem Leuchtturm von Neuwerk.

Am einfachsten gestaltet sich der Bau, wenn um den Turm in der erforderlichen Höhe ein Rundgang aus Mauerwerk führt. In diesem Falle wird ein Pfeiler aufgemauert, und für den Beobachter ein Stand geschaffen, indem Balken aus dem Innern des Turmes herausgestreckt werden. — Wenn ein Rundgang nicht vorhanden ist, sondern auf die Mauern des Turmes sich das Dach ohne Absatz aufbaut, so muss letzteres geöffnet werden. Der Pfeiler wird wieder auf Mauerwerk errichtet und der Beobachtungsstand von innen heraus balkonartig konstruiert. Es kann hierbei nötig werden, die Pfeiler zu grösserer Höhe aufzumauern. So hat beispielsweise der Kirchturm von Wangeroog einen gemauerten Pfeiler von 4^m, derjenige von Wildeshausen sogar einen solchen von 5^m Höhe erhalten. Um dem Pfeiler dann den nötigen Halt zu geben, wird eine Eisenbahnschiene oder starke Eisenstange mit eingemauert; auch werden besondere Verstrebungen angebracht. Die Oberfläche des Pfeilers muss 1,10 bis $1{,}16^m$ über dem Fussboden des Beobachtungsstandes liegen.

Hat der Turm eine genügend geräumige Laterne, so pflegt man einen Pfeiler von Holz zu verwenden und denselben wie den hängenden Pfeiler eines erhöhten Signals mit Streben zu versehen, welche sich auf das tiefer liegende Mauerwerk aufsetzen. Diese Einrichtung ist z. B. bei dem Kirchturme von Cloppenburg getroffen worden. Auf dem Ruinenturm der Landskrone im südlichen Elsass wurde der Fussboden der sehr geräumigen freien Plattform durchbrochen und ein gemauerter Pfeiler auf die tiefer gelegenen Gewölbedecken aufgesetzt, darüber eine vollständige Signalpyramide gebaut.

Der Kirchturm von Brake hat zwei Pfeiler auf dem Mauerwerk des Turmes erhalten; die beiden Beobachtungsstände mussten hängend konstruiert werden, wozu starke Balken als Träger aus den höher gelegenen Luken herausgestreckt wurden, dieses ist in Fig. 5. S. 31 dargestellt.

Dieselbe zeigt zugleich die Anbringung mehrerer Leuchtstände in der Spitze des Turmes.

Diese Einrichtung des Turmes von Brake mit zwei Ständen hat rund 520 Mark gekostet. Bei der Einrichtung des Kirchturmes von Twistringen sind beispielsweise für Kupferschmiede- und Dachdecker-Arbeiten besondere Kosten im Betrage von 380 M. entstanden. Weiteres über Turm-Stationen ist schon in unserem II. Bande „Handb. d. Verm.“ 4. Aufl. 1893, § 84. und § 85. mitgeteilt.

Von den Signalen werden genaue Zeichnungen und von den Türmen photographische Aufnahmen gemacht. Zu dem letzteren Zwecke besitzt die trigonometrische Abteilung einen leicht transportablen photographischen Apparat. Die aufgenommenen Platten werden, gegen die Einwirkung des Lichts geschützt, nach Berlin gesandt und dort entwickelt.

Nach dem Wiedereintreffen in Berlin wird durch die Erkundungs-Sektion auf Grund des Erkundungs-Berichtes des Dirigenten und der beim Signalbau gemachten Aufnahmen und Notizen für jeden trigonometrischen Punkt I. Ordnung ein sogenannter *Stammbogen* angelegt. Derselbe enthält die Beschreibung der Örtlichkeit, die topographische Lage, Historisches über ältere Triangulationen, Angaben über bisherige Messungen der Abteilung, bauliche Einrichtungen, Centrierungen, allgemeine Bemerkungen über Festigkeit, schwierige Richtungen, endlich Notizen über Quartier,



bezahlte Entschädigungen, Abmachungen wegen des Stehenbleibens bezw. des Abbruches der Signale und Beobachtungsstände etc. Der Stammbogen ist sozusagen das curriculum vitae des Punktes. Jeder später folgende Beobachter hat für die nötige Vervollständigung Sorge zu tragen.

Fig. 5.
Kirchturm von Brake
mit zwei Theodolitständen und mehreren hohen Leuchtständen.



Drehen der Beobachtungs-Pfeiler.

Bei hohen Türmen und Gerüsten beobachtet man die für Winkelmessungen missliche Erscheinung des *Drehens*, infolge ungleichförmiger Erwärmung durch die Sonne. Vollständig fest stehen auch steinerne Türme nicht, indessen wird das Drehen hauptsächlich bei hölzernen Gerüsten gefunden.

Eine eingehende Untersuchung dieser Sache mit vielen Beobachtungen bei der mecklenburgischen Triangulierung wurde von *Pascher* in den astronom. Nachrichten, 63. Band (1865) Nr. 1492—1493 mitgeteilt.

Es fanden sich bei einem 11 Meter hohen Pfeiler auf der Station Karbow, welcher äusserst haltbar aus vierkantig beschlagenen Balken konstruiert, und vom Standpunkt des Beobachters völlig unabhängig gestellt im Juli 1857 erbaut worden war, bei der Beobachtung im Juni 1858 starke Drehungen, die einen ziemlich regelmässigen Tagesverlauf zeigten, Morgens — 2′, Mittags 0′, Abends + 2′. (Astr. Nachr. 1492, S. 56.)

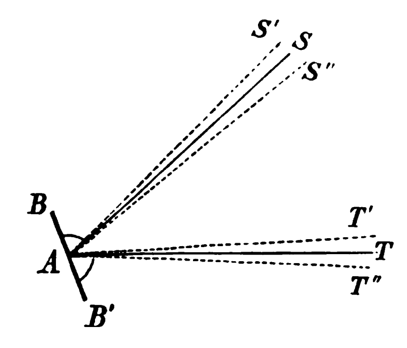
Das Drehen der Beobachtungs-Pfeiler wirkt offenbar am schlimmsten, wenn man lange Sätze nimmt; durch Hingang und Rückgang wird das Drehen zum Teil unschädlich gemacht. Am besten ist es in dieser Hinsicht, immer nur *zwei* Zielpunkte in einen Satz zusammen zu nehmen, d. h. reine „Winkel“-Messungen zu machen.

§ 4. Das Heliotrop.

Während bei kürzeren Entfernungen die Zielpunkte durch Baken mit Fahnen, durch kleine Pyramiden, durch Zieltafeln u. dgl. genügend bezeichnet werden können, ist bei grösseren Entfernungen die Sichtbarmachung der Dreieckspunkte oft eine sehr schwierige Sache. Früher dienten bei grossen Entfernungen hauptsächlich Kirchtürme und besonders erbaute grosse hölzerne Pyramiden als Zielpunkte. In Frankreich und England wurden auch künstliche Lichtsignale bei Nacht als Zielpunkte genommen (auf welche man neuerdings wieder teilweise zurückkommt).

Im Jahr 1821 hat *Gauss* das *Heliotrop* erfunden, welches seit jener Zeit hauptsächlich zur Anzielung von Hauptdreieckspunkten benützt worden ist.

Fig. 1.
Wirkungsweise des Heliotrops.



Die Wirkungsweise des Heliotrops ist einfach zu erklären (Fig. 1.). Wenn von einem Punkte A (Heliotrop) nach einem entfernten Punkte T (Theodolit) ein Signal gegeben werden soll, so stellt man in A einen ebenen Spiegel $B\,B'$ so auf, dass durch ihn die Sonnenstrahlen $S\,A$ nach T geworfen werden. Dieses ist bekanntlich nach dem Reflexionsgesetze der Fall, wenn die Ebene des Spiegels rechtwinklig ist anf der Ebene $S\,A\,T$ und wenn die Winkel $S\,A\,B$ und $T\,A\,B'$ einander gleich sind.

Da die Sonne einen scheinbaren Durchmesser $S'A\,S''$ von etwa $^1/_2{}^\circ$ hat, so sendet der Heliotropenspiegel $B\,B'$ einen Lichtkegel $T'A\,T''$ von ebenfalls etwa $^1/_2{}^\circ$ Öffnung aus, und ein entfernter Punkt T bekommt Licht, wenn er nur wenigstens innerhalb dieses Strahlenkegels fällt, ohne gerade von der Axe $A\,T$ des Kegels getroffen zu werden.

Dieser Umstand ist für die Anwendung des Heliotrops in zweifacher Beziehung günstig; erstens ist infolge hievon bei der Einstellung des Instruments keine grosse Genauigkeit erforderlich, und zweitens kann *eine* Einstellung während der Dauer von nahezu 1 Minute beibehalten werden, obgleich sich während dieser Zeit die Sonne um einen merkbaren Bogen bewegt. (1 Zeitminute entspricht einer Sonnenbewegung von 15′). Das fortgesetzte Einstellen des Heliotrops, entsprechend der Sonnenbewegung, kann zwar durch mechanische Mittel (Heliostat) erzielt werden, doch hat man bei

Triangulierungen bis jetzt im allgemeinen das fortgesetzte Richten durch einen Gehilfen vorgezogen, weil ein solcher Gehilfe zur Bedienung des Instruments aus anderen Gründen ohnehin notwendig ist.

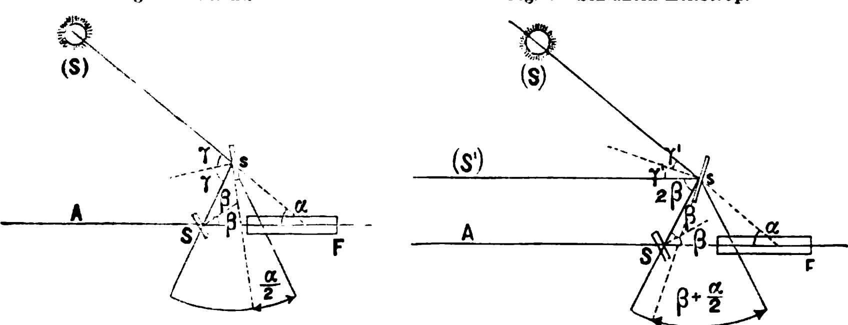
Nach dieser allgemeinen Darlegung wollen wir auf die Beschreibung verschiedener Heliotrope im einzelnen eingehen, und zwar wollen wir, aus geschichtlicher Rücksicht mit einem Werkzeuge beginnen, welches jetzt kaum noch gebraucht wird:

I. Das Sextanten-Heliotrop von Gauss („Vice-Heliotrop").

Dasselbe wird zuerst von Gauss in einem Briefe an Schumacher in den astr. Nachr. 1. Band, S. 106 (Februar 1822) kurz erwähnt. Weiteres hierüber geben die Mitteilungen von Hauptmann Gäde in der „Zeitschr. f. Verm." 1885, S. 125.

Hiernach fiel die Erfindung des Sextanten-Heliotrops in die Zeit der Ausführung des eigentlichen Gauss schen (Spiegelkreuz-) Heliotrops, das wir nachher (S. 34—35) beschreiben.

Gauss schreibt (vgl. „Zeitschr. f. Verm." 1885, S. 125): „Noch vor dessen (des eigentlichen Heliotrops) Vollendung war ich auf die Idee gekommen, einen blossen Spiegelsextanten zu einer Art Vice-Heliotrop einzurichten, freilich viel unvollkommener, als jenes Instrument selbst, aber doch bei geschickter Behandlung gleichfalls brauchbar."



Die Theorie dieses „Vice-Heliotrops" erklärt sich an Fig. 2. und Fig. 3., bei welchen wir die Sextantentheorie selbst als bekannt voraussetzen (vgl. Jordan, Grundzüge der astronomischen Zeit- und Orts-Bestimmung, Berlin 1885, S. 155 und S. 175).

In Fig. 2. ist (S) die Sonne und A der Zielpunkt, welcher Licht erhalten soll, Fig. 2. zeigt also diejenige Sextantenstellung, welche zur Messung des Winkels α zwischen A und (S) erforderlich ist. Der Sextant wird hiebei auf einem festen Stativ gebraucht, und nachdem die Einstellung Fig. 2. gemacht ist, wird die Alhidade um den doppelten Schärfungswinkel, d. h. um 2β vorwärts gedreht (Fig. 3.), worauf man erwarten darf, dass das am grossen Spiegel S reflektierte Sonnenbild (S') nun in die Richtung (S') parallel SA geworfen wird.

Um dieses nach Fig. 2. und Fig. 3. einzusehen, hat man sich des allgemeinen Sextanten-Reflexions-Gesetzes zu erinnern, dass eine Spiegeldrehung (oder Alhidadendrehung) um den Winkel β an dem reflektierten Strahl sS, bzw. $s(S)$ eine Drehung um den doppelten Betrag von β, also um 2β, erzeugt, oder es wird in Fig. 3. der Winkel $Ss(S') = 2\beta$, wie auch daselbst eingeschrieben ist, und damit wird $s(S')$ parallel FA, was man haben will.

II. Das Spiegelkreuz-Heliotrop von Gauss.

Dieses ist das Instrument, welches von Gauss im Jahr 1821 erfunden wurde. Eine Beschreibung desselben wurde von Gauss im 5. Bande der astr. Nachrichten, S. 329—334 (Februar 1827) nebst Zeichnungen gegeben.

Fig. 4.
Grundsatz des Gauss'schen Heliotrops.

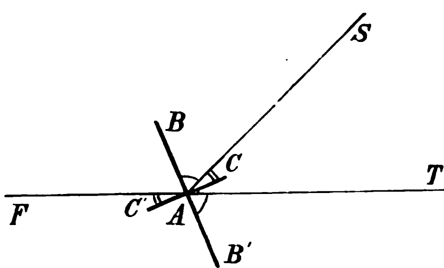
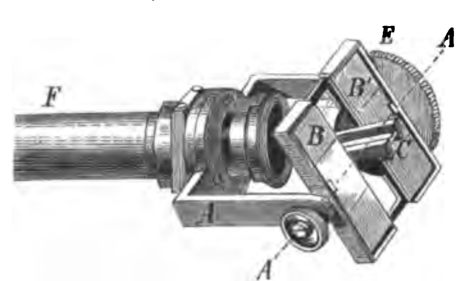


Fig. 5.
Ansicht des Gauss'schen Heliotrops.
(Massstab etwa 1 : 8).



In Fig. 4. haben wir den Grundsatz und in Fig. 5. die äussere Ansicht des Gauss'schen Heliotrops. Wir haben zwei ebene, rechtwinklig gekreuzte Spiegel BB' und CC', welche vor einem Fernrohr F so angebracht sind, dass die gemeinsame Spiegelaxe AA' rechtwinklig zur Fernrohraxe ist, und sich in Fig. 4. als ein Punkt A zeigt. Ein von der Sonne S herkommender Lichtstrahl SA wird nun von dem einen grösseren Spiegel BB' vorwärts nach T reflektiert, und von dem zweiten kleineren Spiegel CC' rückwärts nach F in das Fernrohr; und wegen der rechtwinkligen Kreuzung beider Spiegel ist TAF *eine* ungebrochene Gerade.

Die technische Ausführung des Gauss'schen Heliotrops zeigt Fig. 5., wobei im wesentlichen dieselben Buchstaben-Bezeichnungen wie in Fig. 4. angewendet sind. Der grosse Spiegel BB' erscheint in Fig. 5. in 2 Teile B und B' zerlegt, deren Ebenen jedoch zusammen fallen. Der Spiegelapparat wird mit dem Fernrohr verbunden, und das Fernrohr muss dann um seine Axe drehbar sein.

Die Anwendung besteht in Folgendem: Man richtet das Fernrohr für sich allein nach dem entfernten Punkt T, welcher Licht erhalten soll, und zwar hat man hiebei den kleinen Spiegel C parallel der Fernrohraxe zu stellen, so dass er zwar einen Teil des Objektivs verdeckt, aber immer noch genügend Licht auf dasselbe fallen lässt. Von da an bleibt das Fernrohr in seiner Richtung unverändert, und es wird vor das Okular desselben eine Sonnenblendung vorgeschoben. Nun stellt man zuerst die Spiegelaxe AA' rechtwinklig zu der Ebene SAT von Fig. 4., und zwar beurteilt man dieses darnach, dass eine Scheibe E (Fig. 5.), welche auf der Axe AA' rechtwinklig aufgesteckt ist, keinen Flächenschatten wirft, sondern im Sonnenschatten als Linie erscheint. Sobald nämlich eine zu AA' rechtwinklige Ebene keinen Schatten mehr wirft, kann man durch Drehen der Spiegel um die Axe AA' ein Sonnenbild im Fernrohr zum Vorschein bringen, und das Heliotrop ist dann gerichtet.

Was die Prüfung und Berichtigung des Apparates betrifft, so hat Gauss selbst im 5. Band d. astr. Nachr. S. 329—334 dieselbe sehr ausführlich behandelt und zwar mit Unterscheidung von folgenden 8 Forderungen:

1. 2. Die Absehlinie des Fernrohrs soll mit der Drehaxe des Fernrohrs zusammenfallen (oder wenn das Fernrohr fest und der Spiegelapparat um das Fernrohr drehbar ist, soll die Absehlinie des Fernrohrs mit der Drehaxe des Spiegelapparats zusammenfallen).

3. Die Drehaxe $A\,A'$ (Fig. 5.) der Spiegel soll rechtwinklig zur Fernrohraxe sein.

4. 5. 6. Die Ebenen der Spiegel sollen parallel dieser Drehaxe $A\,A'$ sein.

7. Die beiden Bestandteile B und B' (Fig. 5.) des grossen Spiegels sollen parallel sein.

8. Die Ebene des grossen Spiegels und die Ebene des kleinen Spiegels sollen rechtwinklig zu einander sein.

Die Ausführung wird so gemacht:

1. 2. Centrierung des Fernrohrs wie bei einem Nivellier-Instrument.

3. $A\,A'$ rechtwinklig zur Fernrohr-Axe, wird von Gauss mit Hilfe einer angehängten Libelle gemacht, worauf wir hier nicht weiter eingehen.

4. 5. 6. 7. Kann nötigenfalls rein äusserlich, durch angelegte Lineale und rechte Winkel untersucht werden.

8. Die Hauptforderung, ob die beiden Spiegel gegenseitig rechtwinklig sind, kann man dadurch erfüllen, dass man die beiden Spiegel zusammen wie ein Spiegelkreuz oder Prismenkreuz beim Feldmessen behandelt (vgl. Band II. 4. Aufl. 1895, S. 35 und S. 38).

Zu der Heliotrop-Prüfung schrieb Mechaniker Meyerstein im Januar 1876 im 87. Band, Nr. 2080, der astr. Nachrichten folgendes:

„Die Methode, welche Gauss zur Berichtigung des für die Geodäsie so wichtigen Instrumentes im 5. Bande der astr. Nachr. angegeben hat, lässt bekanntlich im Resultate nichts zu wünschen übrig. Soll aber dieses Resultat erzielt werden, so ist es nur durch eine so grosse Sorgfalt möglich, mit welcher Gauss diese Berichtigung vornahm, welche aber einen sehr bedeutenden Zeitaufwand erfordert. Diese letzte Bemerkung hat der selige Gauss mir gegenüber, indem ich ihm bei der Berichtigung der Heliotrope sehr häufig assistierte, oft gemacht." Meyerstein giebt dann eine andere Prüfungsmethode mit einem Hilfsfernrohr, das, mit beleuchtetem Fadenkreuz, auf das Heliotropen-Fernrohr eingerichtet wird.

Es ist hiezu auch über einige Bemerkungen zu berichten, welche von Helmert in dem Berichte über die wissenschaftlichen Apparate auf der Londoner internationalen Ausstellung 1876, Berlin 1878, S. 165 ff. zu dem Gauss'schen und zu anderen Heliotropen gemacht hat. Für das Gauss'sche Heliotrop findet Helmert den Einstellfehler $\Delta = 2\sqrt{f^2 + \delta^2}$, wenn f die Neigung der Spiegelaxe in der Ebene der Fernrohraxe und δ der Fehler in der Rechtwinkligkeit der beiden Spiegel ist; es wirkt also auch f als Grösse erster Ordnung.

Da das Gauss'sche Heliotrop nur noch historisches Interesse hat, und in der Anwendung namentlich durch das Bertram'sche Heliotrop ersetzt ist (s. u. S. 37 und 38) schliessen wir damit ab.

III. Das Heliotrop von Steinheil.

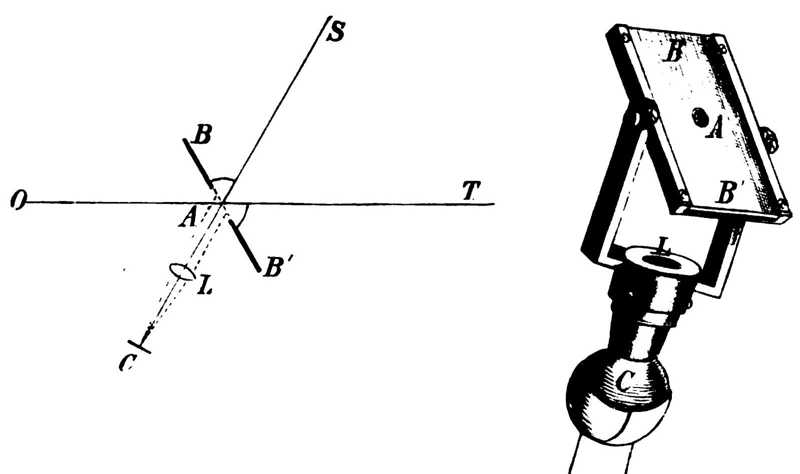
Auch dieses, zuerst in Schumachers astr. Jahrbuch 1844, S. 13 beschriebene Instrumentchen ist praktisch kaum von Bedeutung, doch lohnt die sinnreiche Einrichtung wohl eine kurze Beschreibung:

Der Spiegel $B\,B'$ hat in der Mitte bei A eine unbelegte Stelle, so dass die von S herkommenden Sonnenstrahlen durchgehen, und auf eine hinter dem Spiegel

angebrachte Sammellinse L fallen können. Diese Linse L erzeugt ein Sonnenbild in C, welches durch eine matte Fläche aufgefangen wird. Das Sonnenbild in C sendet seinerseits wieder Strahlen zurück nach der Linse L, welche von da wieder parallel austreten, auf die unbelegte Rückseite des Spiegels in A fallen, und nach O zurückgeworfen werden. Infolgedessen sieht das Auge O ein mattes Sonnenbild in der Richtung $A\,T$. Die nach O gelangenden Sonnenstrahlen machen hiernach folgenden Weg: $S\,A\,L\,C$, dann zurück $C\,L\,A$ und reflektiert nach O.

Fig. 6.
Grundsatz des Steinheil'schen Heliotrops,
S = Sonne, T = Zielpunkt.

Fig. 7.
Ansicht des Steinheil'schen Heliotrops.
(Massstab ungefähr 1:2.)



Andererseits werden die von S auf den *belegten* Teil der Spiegelfläche $B\,B'$ fallenden Strahlen in der Richtung $A\,T$ vorwärts reflektiert, und daraus giebt sich folgende Anwendung:

Das Instrument wird unter Benützung eines Gelenkes bei C Fig. 7. so gestellt, dass die Linse L durch die unbelegte Stelle bei A Sonnenlicht erhält. Dann zielt das Auge O hinter dem Spiegel durch die Öffnung A nach dem Zielpunkt T, welcher Licht erhalten soll, und der Spiegel wird teils im Kugelgelenk C, teils um seine durch A gehende Axe so gedreht, dass in der Richtung $A\,T$ das oben erwähnte matte Sonnenbild erscheint.

IV. Das Heliotrop von Bertram.

Diese einfache Vorrichtung, welche keine Prüfung und Berichtigung braucht, und ohne Fernrohr von jedem Gehilfen bedient werden kann, ist zur Zeit die am meisten gebrauchte.

Das Instrument wird zuerst von Bessel in der „Gradmessung in Ostpreussen“ S. 65 erwähnt mit den Worten: „Die benützten Heliotrope waren teils von der Einrichtung, welche der Erfinder (Gauss) dieser unschätzbaren Methode ihnen gegeben hat, teils waren sie von einer sehr leicht ausführbaren Konstruktion, welche von Herrn Ingenieur-Geographen Bertram herrührt.“ Die erste Beschreibung und Zeichnung dieses Bertram'schen Heliotrops findet sich in General Baeyers „Küstenvermessung“ S. 52

bis 53 und Tafel III. (Über den Urheber der Erfindung wurde eine Erörterung geführt von Nagel bzw. Baeyer, „Zeitschr. f. Verm.“ 1878, S. 34 und von Bertram selbst S. 193.)

Wir geben im Nachfolgenden zwei Zeichnungen des Bertram schen Heliotrops.

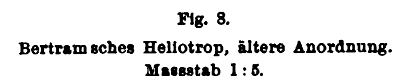
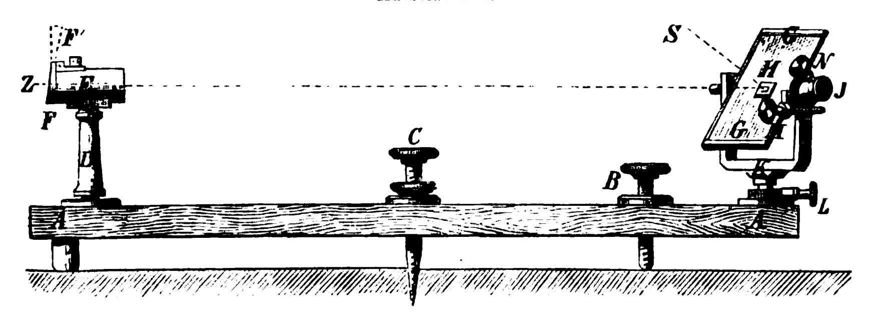


Fig. 8.
Bertram sches Heliotrop, ältere Anordnung.
Massstab 1 : 5.



Die Konstruktion des Bertram schen Heliotrops beruht auf dem einfachen Grundgedanken, dass ein entfernter Punkt Z dann Licht durch einen Spiegel H erhält, wenn ein Zwischenpunkt E, welcher sich auf der Ziellinie HZ befindet, von der Lichtlinie getroffen wird.

In Fig. 8. ist GG der Spiegel, welcher, wie immer, so gestellt wird, dass seine Ebene rechtwinklig ist auf der Leuchtebene SHZ, wobei S die Sonne, H die Spiegelmitte und Z der entfernte Punkt ist, welcher Licht erhalten soll, und dass die Strahlen SH und HZ gleiche Winkel mit der Spiegelebene machen.

Der Spiegel GG hat in der Mitte ein kleines Loch H, welches zwei Zwecken dient, wie wir nachher sehen werden.

Der Holzrahmen AA, auf welchem rechts der beschriebene Spiegel drehbar angebracht ist, trägt auf der anderen Seite links, durch Vermittlung der Säule D, ein kleines Rohr E in gleicher Höhe mit der Spiegelmitte H. Im Innern dieses Rohres ist ein Fadenkreuz E angebracht, welches in Verbindung mit dem Okularloche H des Spiegels als Diopter zum Anzielen eines entfernten Punktes Z dient.

Nachdem dieses geschehen ist, wird links am Ende der Röhre E eine Klappe F, welche vorher geöffnet (in der Lage F') war, vor die Öffnung gebracht, und nun muss der Spiegel G so gestellt werden, dass sein Licht auf die Innenseite der genannten Klappe F fällt, und genauer noch so, dass die Klappe im allgemeinen hell ist, in der Mitte aber einen dunkeln Fleck zeigt, herrührend von dem *nicht* reflektierenden Loche H in der Spiegelmitte.

Das Loch H in der Spiegelmitte dient also zwei verschiedenen Zwecken: erstens ist es Okular beim Zielen längs der Geraden HE, und zweitens dient es zur Bezeichnung der Licht*mitte*. Die Bewegung des Spiegels wird in horizontalem und vertikalem Sinn bei K, L, M, N gehandhabt.

Die zwei Schrauben C und B dienen zum Centrieren und zum Einstellen nach der Höhe. (Ältere Konstruktion Fig. 8.)

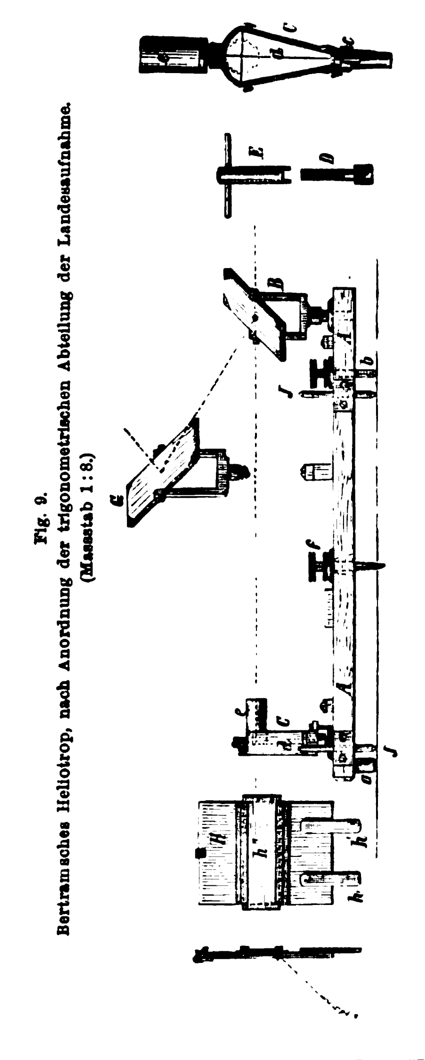


Fig. 9.
Bertramsches Heliotrop, nach Anordnung der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme.
(Massstab 1:8.)

Hilfsspiegel (G Fig. 9.).

Wenn die Sonnenstrahlen sehr schief auf einen Heliotropenspiegel auffallen, welcher nach dem entfernten Punkte Licht senden soll, so wird dieses Licht sehr schwach (es ist überhaupt immer nur die Projektion der Spiegelfläche auf eine Ebene rechtwinklig zur Strahlenrichtung als wirksam zu betrachten). In diesem Falle hilft man sich dadurch, dass man das Sonnenlicht zuerst mittelst eines günstig gestellten Hilfsspiegels (G Fig. 9.) auffängt und durch dessen Vermittlung dem eigentlichen Heliotropenspiegel zuführt. Dasselbe ist notwendig, wenn der Heliotropenspiegel im Schatten, z. B. im Innern eines Turmes, steht.

Fig. 9. giebt eine Darstellung des Bertram schen Heliotropes in *neuerer* Anordnung, wie sie zur Zeit bei der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme im Gebrauch ist.

A Holzrahmen, 52^{cm} lang, 10^{cm} breit,
B Leuchtspiegel, $8{,}2^{cm}$ lang, $8{,}2^{cm}$ breit,
G Hilfsspiegel bei ungünstiger Sonnenstellung u. s. w., s. o.),
H Vorsteck-Rahmen für das grüne Glas h'' (selten gebraucht, vgl. Gitterblenden S. 40),
C Objektivdiopter mit Fadenkreuz d und Leuchtröhre e (in der Nebenfigur rechts ist e aufgeschlagen),
f Axenschraube zum unmittelbaren Centrieren über Holz,
b. Höhenstellschraube,
D Leuchtaxe mit Schlüssel E zum schärferen Centrieren statt f (unterhalb D kommt die hier nicht mehr dargestellte „Leuchtschraube").

V. Das Heliotrop von Reitz.

Dieses ist im wesentlichen auf dasselbe Prinzip gegründet wie das Bertram sche, es wird aber im Gegensatz zu letzterem in Verbindung mit einem Fernrohr gebraucht.

Das Instrument besteht im wesentlichen in einer Verbindung von zwei Spiegeln mit einem Fernrohre. Der grosse Spiegel A lässt sich in jede beliebige Lage bringen und reflektiert das Sonnenlicht nach dem entfernten Zielpunkt. Bei a ist die Folie des Spiegels A abgenommen, der kleine Spiegel B ist rechtwinklig zur Fernrohraxe, b und c sind die Richteschrauben zur Erzielung dieser rechtwinkligen Lage.

In Fig. 11. (s. S. 39) sind die beiden Spiegel A und B gezeichnet nebst dem Ring R, welcher durch Vermittlung von 3 Schrauben S_1 S_2 S_3 zur Befestigung des

Apparates an der Objektivfassung eines Fernrohrs dient. Der grosse Spiegel A ist in Fig. 11. parallel der Fernrohraxe gestellt (wie er beim Gebrauch nicht steht).

Fig. 10.
Grundsatz des Reitz schen Heliotrops.

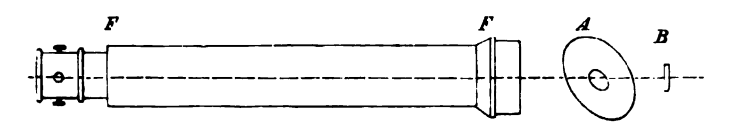


Fig. 11.
Ansicht des Reitz schen Heliotrops.

Ein zu Anfang angezielter, also in der Fernrohraxe liegender Punkt erhält Licht von dem grossen Spiegel A, wenn im Fernrohr (nach Vorschieben eines Blendglases) ein Sonnenbild gesehen wird, das durch den kleinen Spiegel B ins Fernrohr zurückgeworfen wird. Die Sonnenstrahlen, welche nach dem entfernten Punkt gesendet werden, machen also den Weg von der Sonne zum grossen Spiegel A, und von da an dem kleinen Spiegel B vorbei zu dem Zielpunkt; ein Teil der Strahlen aber, welche von dem grossen Spiegel A ausgehen, trifft den kleinen Spiegel B, und wird von diesem zurück ins Fernrohr gebracht.

Wenn der Apparat richtig wirken soll, so muss die Ebene des kleinen Spiegels B rechtwinklig zur Fernrohraxe sein. Zur Prüfung und Berichtigung giebt *Reitz* folgendes Verfahren an:

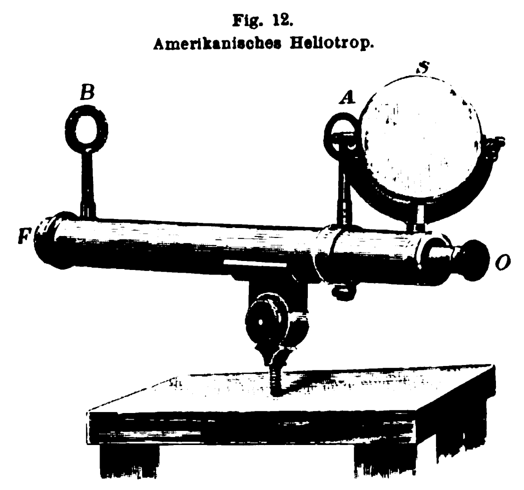
Man richtet das Fernrohr auf einen nahen (etwa 10^m entfernten) Gegenstand, und dreht den grossen Spiegel A so, dass das Sonnenbild sichtbarlich auf denselben Gegenstand fällt. Man stellt dann das Okular auf unendliche Entfernung ein. Sieht man nun, nachdem ein Sonnenglas vorgeschoben, in das Fernrohr, so lässt sich durch Drehung der Richteschrauben b und c das Sonnenbild, welches von B reflektiert wird, in das Gesichtsfeld des Fernrohres bringen. Geschieht dies, so sieht man zugleich im Gesichtsfelde auch das von B reflektierte Spiegelbild des Fadenkreuzes, welches nun durch die Schrauben b und c zur Deckung mit dem Fadenkreuz selbst gebracht wird.

Die Thatsache, dass man am Fadenkreuz des Fernrohrs ein Bild dieses Fadenkreuzes selbst wahrnimmt, erklärt sich dadurch, dass bei der Einstellung des Fernrohrs auf Unendlich, die vom Fadenkreuz nach dem Objektiv gehenden Strahlen nach der Brechung parallel austreten, und nach der Reflexion durch den kleinen Spiegel B auf ihrem eigenen Wege wieder zurückkehren. Zugleich wird durch eben diesen kleinen Spiegel B so viel Licht auf das Fadenkreuz geworfen, dass die beschriebene Bilderzeugung überhaupt wahrnehmbar wird.

Ein ähnliches Instrument wurde von Reitz beschrieben in der „Zeitschr. f. Instrumentenkunde", 1881, S. 338—340. In derselben Zeitschrift 1883, S. 265—268 giebt Reitz auch die Beschreibung und Zeichnung eines „Periheliotrops", welches rings umher zeitweise jedem Punkte des Horizontes einen Blitz reflektierten Sonnenlichtes zusendet.

VI. Amerikanisches Heliotrop.

Fig. 12.
Amerikanisches Heliotrop.



Zum Schluss geben wir noch in Fig. 12. die Zeichnung eines amerikanischen Heliotrops nach der Beschreibung und Zeichnung des Werkes: „The final results of the triangulation of the New-York State survey u. s. w. Albany 1887“ S. 127.

Wie Fig. 12. zeigt, besteht das Instrument aus einem Fernrohr *O F* mit aufgesetztem Spiegel *S* und 2 Ringen *A* und *B*. Der Spiegel soll sein Licht in der Axe der beiden Ringe fortsenden und dabei muss der Schatten des Ringes *A* den Ring *B* decken.

Ob das Ganze richtig wirkt, wird untersucht durch Leuchten nach einem *nahen* Zielpunkte, indem beobachtet wird, ob der Punkt richtig Licht erhält. Dieses Instrument wird namentlich zu Erkundungszwecken angewendet.

Heliotropen-Telegraphie.

Durch Auf- und Zudecken des Spiegels und Verabredung der Aufeinanderfolge der dadurch erzeugten Lichtblitze wird eine einfache Telegraphie erzielt, welche zur Verständigung zwischen dem Winkelbeobachter und dem Heliotropisten sehr wichtig ist.

Regulierung der Lichtstärke.

Da das Heliotropenlicht unter verschiedenen Umständen sehr *verschieden* stark ist, muss man ein Mittel haben, nach Bedarf das Licht zu verstärken oder namentlich zu schwächen. Die Verstärkung des Lichtes kann durch Anwendung eines grösseren Spiegels oder durch günstigere Stellung eines Hilfsspiegels erzielt werden. Die Verkleinerung des Lichtes machte man früher auch am Heliotrope selbst durch teilweises Decken des Spiegels, oder durch Vorsetzen farbiger Gläser u. s. w. Das hat aber namentlich den Übelstand, dass die Lichtänderung vom Theodolite aus umständlich durch Heliotropen-Telegraphie befohlen werden muss.

In neuerer Zeit ist ein viel einfacheres und besseres Mittel der Lichtschwächung im Gebrauch, welches am Theodolit selbst gehandhabt wird, nämlich das Vorsetzen von *Gitterblenden*, bestehend aus mehreren Lagen eines losen Gewebes, wie Flortuch, Musselin u. s. w. (farbige Gläser dürfen vor dem Theodolit nicht angewendet werden wegen der Gefahr der Lichtablenkung). Professor Bruns berichtet hierüber in der „Zeitschr. f. Instrumentenkunde“ 1883, S. 308 mit der Bemerkung, dass dieses Mittel schon vor einem halben Jahrhundert in der astronomischen Praxis Anwendung gefunden hat.

Dauer der Heliotrop-Lichter.

Die Winkelmessung nach Heliotrop-Lichtern ist nur während eines beschränkten Teiles eines Tages möglich, etwa von 3 Uhr Nachmittags bis Sonnen-Untergang, ausnahmsweise auch unmittelbar nach Sonnen-Aufgang. Vormittags und unmittelbar nach Mittag ist die Messung auf weite Entfernung nicht möglich wegen des Schwirrens und der Unruhe der Bilder.

Da auch in der günstigen Tageszeit noch viele Zeit verloren geht wegen mangelnden Sonnenscheins, so ist die Winkelmessung nach Heliotrop-Licht eine langwierige Arbeit. Nach einer von der Landesaufnahme angestellten Vergleichung („Zeitschr. f. Verm." 1879, S. 111) ist die mittlere Leistung für 1 Tag und 1 Instrument nur etwa zwischen 12 und 17 Einstellungen (in je zwei Lagen).

Nacht-Beobachtungen.

Man ist in neuerer Zeit wieder teilweise von der Signalisierung durch Heliotrope zur Anwendung nächtlicher Lampensignale zurückgekommen. Im Generalbericht d. Eur. Gr. f. 1875, S. 140—150 wird von Perrier eine „Etude comparative des observations de jour et de nuit" mitgeteilt, welche den Nacht-Beobachtungen den Vorzug giebt.

Die elektrische Nacht-Signalisierung zwischen Spanien und Algier haben wir bereits auf Seite 22—23 erwähnt.

Eine Abhandlung: „Die Winkelmessungen bei Tage und bei Nacht" von *W. Werner* ist in der „Zeitschr. für Instrumentenkunde" 1883, S. 225—237 erschienen.

§. 5. Anordnung der Winkelmessung.

Die Winkelmessung, das wichtigste Element der Triangulierung, ist in ihrer Anordnung durch zwei wesentlich verschiedene Umstände bedingt, erstens durch die mechanischen und optischen Verhältnisse des Messens selbst, und zweitens durch die Ausgleichung.

In geschichtlicher Beziehung hat sich die Winkelmessung für Triangulierung etwa so entwickelt:

Schon vor der Anwendung des Fernrohrs konnte man an geteilten Kreisen von grossem Halbmesser Winkel auf etwa 1′ genau messen (*Snellius* 1615, vgl. unsere Einleitung S. 5), bald stieg die Genauigkeit so, dass man einzelne Sekunden in Rechnung nahm.

Das im vorigen Jahrhundert von *Tobias Mayer* in Göttingen erfundene und von den Franzosen weiter entwickelte Verfahren der Repetitions-Messung mit Nonienablesung galt bis zur Mitte dieses Jahrhunderts im allgemeinen als das beste und die Genauigkeit stieg auf 1″.

Das Wesentlichste über Repetitions-Messung haben wir schon in unserem II. Bande „Handb. d. Verm." 4. Aufl. 1893 § 72 mitgeteilt, zugleich sei über die hannoverschen Repetitions-Messungen von *Gauss* verwiesen auf Gäde, „Zeitschr. f. Verm." 1885, S. 121 und 205 und „Zeitschr. f. Verm." 1882, S. 431. Über den älteren „cercle répétiteur", vgl. Jordan, Grundzüge der astr. Zeit- und Ortsbestimmung, Berlin 1885, S. 219 und S. 206. Eine neuere gründliche Arbeit hiezu ist: Über das Mitschleppen des Limbus und verwandte Fehler bei Repetitionstheodoliten, von Friebe, „Zeitschr. f. Verm." 1894, S. 333—348.

Struve und Bessel gingen etwa 1820—1830 zur „Richtungs-Messung" über, welche später mit Mikroskop-Ablesung (etwa seit 1840, vgl. Küsten-Vermessung S. 51) weiteste Verbreitung fand. Man nahm möglichst viele Sichten in einen Satz zusammen



und wiederholte die Sätze mit verstelltem Limbus. In neuester Zeit ist die reine „Winkelmessung“ (mit nur *zwei* Sichten in einem Satze) mit Vorteil angewendet worden.

Nach dieser allgemeinen Übersicht wollen wir einzelne Verhältnisse näher betrachten:

Richtungs-Messungen.

Die Messung von möglichst vollen Sätzen, wie man sie im einzelnen Falle bekommen kann, wurde von Bessel bei der Gradmessung in Ostpreussen angewendet und seitdem Jahrzehnte lang fortgesetzt. Bessel schreibt (Gr. in Ostpr. S. 69):

„Wenn man immer *alle* auf einem Dreieckspunkt zu beobachtende Richtungen hätte einstellen können, so würde das Resultat aller daselbst gemachten Beobachtungen ganz einfach das Mittel aus allen Ablesungen jeder Richtung gewesen sein. Dieses war aber sehr selten möglich; man musste sich auf die Beobachtung derjenigen Punkte beschränken, welche gerade sichtbar waren und nicht zu unruhig erschienen“.

Für die Messungen selbst scheint nun ein solches Anpassen an die Umstände das beste, allein die Ausgleichungen werden dadurch ungemein verwickelt.

Wir können heute davon absehen, dass es mehrerer Jahrzehnte bedurft hat, bis die formelle Theorie der Ausgleichung von Triangulierungen mit solchen unvollständigen Satzbeobachtungen fertig gestellt, und unbestritten anerkannt war (Bessel, Hansen, Andrä u. A. 1834—1870, man vgl. unseren I. Band „Handb. d. Verm.“ 4. Aufl. 1895, Kap. II, zusammenhängende Entwicklung aller hierher gehörenden Theorien). Aber auch wenn diese Theorien nun vorliegen und die ganze Ziffernmenge mit den Coëfficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ u. s. w. berechnet ist, ist sie doch in sich kaum konsequent zu nennen, weil die mittleren Fehler *nach* der Ausgleichung immer grösser ausfallen, als *vor* der Ausgleichung, wozu noch andere Übelstände kommen.

Null-Marke.

Um die vorerwähnten Richtungs-Messungen etwas geschmeidiger und von zufälligen Umständen unabhängiger zu machen, hat man in jeden Satz einen naheliegenden Zielpunkt, welcher gar nicht zu der Triangulierung selbst gehört, aufgenommen.

Über dieses Mittel wurde zuerst von Struve (astr. Nachr. 2. Band, 1824, S. 435) berichtet. Die Nullpunktsmarke wurde von Struve in 500 bis 1000^m Entfernung gesetzt; sie bestand aus einem vertikalen Rechteck von 10″ Breite und 20″ Höhe mit weisser Farbe auf schwarzem Grunde angelegt; da der Vertikalfaden des Fernrohrs 6″ deckte, so blieb links und rechts von dem Rechteck ein Streifen von 2″ Breite übrig.

Die ausgedehnteste Anwendung fand dieses Mittel der Nullmarke bei den Triangulierungen des geodätischen Instituts, etwa 1870—1880, namentlich bei dem „Rheinischen Dreiecksnetz“; es hat sich aber gefunden, „dass die Beobachtungen der Nullmarke auf den Stationen des Rheinischen Dreiecksnetzes erheblich schlechter sind, als die der übrigen Objekte. („Zeitschr. f. Verm.“ 1879, S. 149.)

Ein Teil dieser Nullmarkenfehler mag jedenfalls darin liegen, dass die Nullmarken nicht immer in genügend gleicher Höhe mit dem Theodolit angebracht werden konnten; wenn indessen eine Nullmarke unter einem starken Neigungswinkel erscheint, so sollte man den Horizontal-Axenfehler (i *tang* h Band II, 4. Aufl. 1893, S. 203) hiefür in Rechnung bringen.



Winkelmessungen in allen Kombinationen.

Dieses Mittel, welches schon von Gauss und Gerling als Ideal gepriesen wurde, ist von General Schreiber etwa seit 1871 angewendet worden und bildet jetzt den Grundton der Haupttriangulierungen der Landesaufnahme.

Die Theorie hiezu haben wir bereits in unserem I. Bande, „Handb. d. Verm.“ 4. Aufl. 1895, § 77 behandelt, auch alle Citate hiezu gegeben.

Hiernach sind die Vorteile der Winkelmessung in allen Kombinationen doppelt: Erstens werden die Messungen selbst so genau als möglich, durch Beschränkung auf kürzeste Dauer (nur *zwei* Zielpunkte) des einzelnen Satzes; zweitens aber werden dadurch alle Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\,\alpha]$, $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. gleich *Null*, und die Netzausgleichung, welche bei unvollständigen zerstreuten Sätzen eine unerfreuliche starre Masse bildet, wird nun, bei Wahrung aller formellen Strenge, so übersichtlich und geschmeidig, wie wenn man es mit unabhängigen Richtungs-Messungen zu thun hätte.

§ 6. Schraubenfehler und Teilungsfehler.

Das Wichtigste über das Schrauben-Mikroskop haben wir schon in unserem II. Bande, 4. Aufl. 1893, § 63. mitgeteilt, d. h. alles das, was man unbedingt wissen muss, um mit einem Mikroskop-Theodolit messen zu können. Auch ist da noch an die weiteren Ausführungen zu erinnern, welche im II. Band, 3. Aufl. 1888, S. 150—151 und S. 213—214 gegeben waren.

Nach diesem wollen wir noch die Fehleruntersuchung der Schrauben behandeln.

Man hat zu fragen, ob die Schrauben der Mikroskope durchaus gleichförmige Verschiebungen der Fäden erzeugen, oder im einzelnen:

1) ob die verschiedenen Schraubengänge alle gleich sind (fortschreitende Fehler),

2) ob in der einzelnen Umdrehung die Drehungswinkel den Fadenverschiebungen proportional sind (periodische Fehler).

Die erste Frage, fortschreitende Fehler betreffend, kann man dadurch beantworten, dass man ein und denselben Teilwert des Kreises an verschiedenen Stellen der Schraube misst. Die Untersuchung wird bei den wenigen Umdrehungen, welche bei Theodolit-Mikroskopen gewöhnlich nur gebraucht werden, selten merkliche Fehler ergeben, und ist jedenfalls nicht schwierig. (Eine sehr feine Untersuchung dieser Art findet man in „Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures, Tome V, Paris 1886, S. 47—60, erreurs progressives d'une vis micrométrique.“)

Dagegen sind die *periodischen Fehler*, welche von unsicherer Führung der Schrauben u. s. w. herrühren, oft bedeutend und müssen stets untersucht werden.

Man braucht dazu ein Intervall, welches *nicht* einer ganzen Umdrehung oder einem Vielfachen einer Umdrehung entspricht, sondern am besten einen runden Bruchteil, z. B. ein Viertel, ein Fünftel oder dergl. einer Umdrehung giebt.

Die Theodolitkreise haben meist keine Teilstriche für solche Zwecke, und es wäre zu wünschen, dass die Mechaniker bei Herstellung der Teilungen darauf Rücksicht nähmen, indem an irgend welcher Stelle einige Hilfsstriche in Abständen von 1′, 2′, 3′, 4′ u. s. w. angebracht würden.

Statt eines Hilfs*striches* auf der Teilung kann man auch einen Hilfs*faden* (bzw. Doppelfaden) im Gesichtsfelde des Mikroskopes anwenden, indem dann der Haupt-



Faden und der Hilfs-Faden (bzw. die beiden Faden-Mitten) nacheinander auf denselben Strich der Teilung eingestellt werden.

Manchmal kann man auch irgend ein nicht zur Teilung selbst gehöriges Zeichen auf dem Teilkreise als Hilfsstrich benützen; z. B. giebt Reinhertz in der „Zeitschr. f. Vermessungswesen", 1887, S. 549, an, dass er den Mittelstrich der Ziffer 1 als Hilfsstrich genommen habe. Ähnlich haben wir bei dem nachfolgenden Beispiel die Ziffer 2 benützt, welche im Gesichtsfeld erschien, indem auf das rechts unten an 2 befindliche vertikale Abstossstrichchen eingestellt wurde.

Der Abstand dieses Hilfsstriches von dem nächsten Teilstriche war rund $i = 1'$, und die Mikroskop-Trommel hat 5' auf einer Umdrehung. Nun wurde das Hilfsintervall i auf der Schraube 5mal gemessen, indem nach jeder Messung die Alhidade wieder um i zurückgedreht wurde. Das Ganze wurde mehrfach hin und zurück wiederholt, doch geben wir hier nur die *Mittel*zahlen s mit ihren Differenzen i, woran sich auch die leichtverständliche Berechnung anschliesst.

Schrauben-ablesungen s	Differenzen i	Verbesserungen $i_0 - i = v$	Δs	Schrauben-ablesung rund s
0′ 0,00″			0,00″	0′
	1′ 6,15″	— 1,06″		
1′ 6,15″			— 1,06″	1′
	1′ 8,75″	— 3,66″		
2′ 14,90″			— 4,72″	2′
	1′ 3,95″	+ 1,14″		
3′ 18,85″			— 3,58″	3′
	1′ 3,75″	+ 1,34″		
4′ 22,60″			— 2,24″	4′
	1′ 2,85″	+ 2,24″		
5′ 25,45″			0,00″	5′
Mittel i_0 =	1′ 5,09″	0,00″		

(1)

Die Trommelteilung geht von 10″ zu 10″, einzelne Sekunden werden geschätzt, (Doppelsekunden sind nicht angewendet), die Dezimalen bis auf 0,05″ bei den Ablesungen s sind nur durch Wiederholungen und Mittelbildung entstanden. Das Mittel i_0 nehmen wir nun als richtig an (obgleich $s = 5'\ 25''$ statt $5'\ 0''$ am Schlusse abgelesen ist), berechnen die Differenzen $i_0 - i = v$, deren Summe $= 0$ sein muss, und dann die Verbesserungen Δs als Summen der v, indem das erste $s = 0{,}00''$ gesetzt wird, dann $0{,}00 - 1{,}06 = 1{,}06$, $1{,}06 - 3{,}36 = 4{,}72$ u. s. w.

Nach dem Ergebnis dieser Untersuchung ist also jede Schrauben-Ablesung in der Gegend von 2′ um 4,7″ zu vermindern u. s. w.

Wenn die Verbesserungen Δs so gross werden, wie in diesem Beispiel, so ist es bedenklich, sie zu vernachlässigen; eine Korrektions-Tabelle anzulegen und alle Ablesungen darnach zu verbessern, wäre sehr mühsam, vielleicht kann man den Grund der Ungleichheit in der mechanischen Lagerung der Schraube u. s. w. finden und verbessern, oder man muss schlechte Schrauben entfernen und durch bessere ersetzen lassen.

Es ist hier zu citieren:

Westphal, Übersicht über die Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen von Mikrometer-Schrauben, „Zeitschr. f. Instrumentenkunde", 1881, S. 149, 229, 250, 397.



Einige Beispiele hiefür giebt auch die erwähnte Abhandlung von Reinhertz in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1887, S. 545—553, mit der Anordnung, die periodischen Schraubenfehler durch planmässige Anwendung *verschiedener Trommelstellungen* zu eliminieren, was gleichzeitig mit der Verteilung der Richtungen auf verschiedene Kreislagen geschehen kann.

Wir wollen beispielshalber annehmen, man wolle mit unserem Instrumente, dessen Trommel $5' = 300''$ Umdrehung hat, eine Richtungs-Messung in 8 Kreislagen machen; dann muss man nach jedem Satze die Trommelstellung um $300'' : 8 = 37{,}5''$ ändern, oder man bekommt für die 8 Kreislagen folgende Anfangs-Ablesungen:

1.	0° 0′ 0″	5.	90° 2′ 30″	(2)
2.	22° 30′ 38″	6.	112° 33′ 8″	
3.	45° 1′ 15″	7.	135° 3′ 45″	
4.	67° 31′ 52″	8.	157° 34′ 22″	

Stellt man diese Anfangs-Ablesungen ein, so werden auch alle anderen Ablesungen je um 37,5″ verschoben, und damit die periodischen Schraubenfehler mit derselben Wahrscheinlichkeit eliminiert, wie man das bei den Kreisteilungs-Fehlern durch die planmässigen Kreisverstellungen erwartet.

Ausgleichung der periodischen Schraubenfehler.

Bei unserem vorstehenden Beispiele ist die ganze Berechnung in der kleinen Tabelle (1) enthalten, und man kann nötigenfalls die erhaltenen Δs auch noch graphisch ausgleichen.

Jedenfalls bietet aber auch die rechnerische Ausgleichung (welche in dieser Form von *Bessel* eingeführt wurde) viele Vorteile; wir wollen eine solche als Beispiel hier vornehmen. Dieses Beispiel bezieht sich nicht auf einen Theodolit, sondern auf den Repsoldschen Komparator der K. Normal-Aichungs-Kommission, und wurde von uns im April 1881 erhalten.

Dieses Beispiel kann indessen auch die Schraubenfehler-Ausgleichung für Theodolit-Messungen veranschaulichen.

Fig. 1. Schrauben-Mikroskop.

In Fig. 1. soll t das Intervall einer Teilung bedeuten, welche durch ein Schrauben-Mikroskop gemessen wird. K sei der optische Mittelpunkt des Mikroskop-Objektives, und s sei der Schraubenwert, den man durch Einstellen auf den linken und rechten Strich des Intervalls t findet.

Hat die Schraube keine Fehler, so wird man immer *denselben* Wert s erhalten, welche Teile der Schraube auch benützt werden (abgesehen von den unregelmässigen Einstellfehlern), wenn dagegen die Schraube selbst Fehler enthält, so werden die Werte s verschieden ausfallen.

Wir bezeichnen allgemein eine Schrauben-Ablesung mit S und wir nehmen an, die zu S gehörige Schrauben-Verbesserung lasse sich durch folgende Gleichung darstellen:

$$\Delta S = \varphi(S) = r \sin(A + S) = r \sin A \cos S + r \cos A \sin S \tag{3}$$

Setzt man hier $r \sin A = \alpha$ und $r \cos A = \beta$

$$\text{oder } \operatorname{tang} A = \frac{\alpha}{\beta} \quad , \quad r = \frac{\alpha}{\sin A} = \frac{\beta}{\cos A} \tag{4}$$

so kann man (3) auch in diese Form schreiben:

$$\Delta S = \varphi(S) = \alpha \cos S + \beta \sin S \tag{5}$$



Zur Bestimmung der Konstanten α und β wird nun die Messung von t, entsprechend Fig. 1., an verschiedenen Stellen der Schraube vorgenommen, so dass verschiedene Werte s entstehen.

Wenn S die Anfangsstellung einer solchen Messung, folglich $S+s$ die Endstellung ist, so hat man für die Anfangsstellung die Gleichung (5) und für die Endstellung die zugehörige Gleichung:

$$\varphi\,(S+s) = \alpha \cos(S+s) + \beta \sin(S+s) \tag{6}$$

Wenn man aus (5) und (6) die Differenz bildet, so erhält man:

$$\varphi\,(S+s) - \varphi\,(S) = -2\alpha \sin\left(S+\frac{s}{2}\right)\sin\frac{s}{2} + 2\,\beta \cos\left(S+\frac{s}{2}\right)\sin\frac{s}{2}$$

Wir setzen:
$$-2\,\alpha \sin\frac{s}{2} = x \quad , \quad +2\,\beta \sin\frac{s}{2} = y \tag{7}$$

$$\text{und } S+\frac{s}{2} = \sigma \tag{8}$$

folglich ist die Verbesserung für den Schraubenwert s:

$$\varphi\,(S+s) - \varphi\,(S) = x \sin\sigma + y \cos\sigma \tag{9}$$

Es sollen 4 symmetrisch gelegene Beobachtungen von s gemacht werden mit den Ergebnissen s_1, s_2, s_3, s_4 und wir setzen:

$$\frac{s_1+s_2+s_3+s_4}{4} = s_0 \tag{10}$$

Dieses ist auch, wie wir nachher sehen werden, der wahrscheinlichste Wert von s überhaupt, indessen wollen wir vorläufig (um die Zahl der Unbekannten sicher zu stellen) den wahrscheinlichsten Wert $= s_0 + \xi$ setzen, und haben daher durch Vergleichung mit (9), nun die Fehlergleichung:

$$v = (s + x \sin\sigma + y \cos\sigma) - (s_0 + \xi)$$

Wir setzen wie gewöhnlich $s_0 - s = l$ und haben dann in 4facher Anwendung:

$$\left.\begin{aligned} -v_1 &= \xi - x \sin\sigma_1 - y \cos\sigma_1 + l_1 \\ -v_2 &= \xi - x \sin\sigma_2 - y \cos\sigma_2 + l_2 \\ -v_3 &= \xi - x \sin\sigma_3 - y \cos\sigma_3 + l_3 \\ -v_4 &= \xi - x \sin\sigma_4 - y \cos\sigma_4 + l_4 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Wenn nun aber die 4 Beobachtungen symmetrisch liegen, d. h. wenn die 4 Werte σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 nach (8) je um 90° gegen einander verschoben sind, so wird die Ausgleichung dieser 4 Fehlergleichungen sehr einfach, wie wir schon an einem ähnlichen Beispiel in Band II. 4. Aufl. § 70. gesehen haben, die Ausgleichung des Systems (11) giebt nämlich in diesem Falle:

$$\xi = 0 \qquad x = \frac{[l \sin\sigma]}{2} \qquad y = \frac{[l \cos\sigma]}{2} \tag{12}$$

und die Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler wird:

$$[v\,v] = [l\,l] - \frac{[l \sin\sigma]^2}{2} - \frac{[l \cos\sigma]^2}{2} \tag{13}$$

Rechnet man ausserdem die einzelnen v und v^2 aus, so erhält man in ihrer Summe eine Rechenprobe.

Der mittlere Fehler einer Bestimmung von s wird, weil 3 Unbekannte ξ, x, y vorhanden sind:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{4-3}} = \sqrt{[v\,v]} \tag{14}$$

Aus x und y kann man nach (12) und (7) auch α und β herstellen, nämlich:

$$\alpha = -\frac{[l \sin \sigma]}{4 \sin \frac{s}{2}} \qquad \beta = +\frac{[l \cos \sigma]}{4 \sin \frac{s}{2}} \tag{15}$$

und nach (4) kann man auch die ursprünglichen Unbekannten A und r wieder herstellen:

$$tang\ A = \frac{-[l \sin \sigma]}{+[l \cos \sigma]}\ , \quad r = \frac{-[l \sin \sigma]}{4 \sin \frac{s}{2} \sin A} = \frac{+[l \cos \sigma]}{4 \sin \frac{s}{2} \cos A} \tag{16}$$

Bei unseren Messungen am Repsold schen Komparator (Mikroskop I. rechts, mit 25facher Vergrösserung) war ungefähr $s = 4{,}6239$ Umdrehungen, (und zwar herrührend von der Beobachtung eines Intervalls = 0,2 Pariser Linien = $0{,}4511658^{mm}$, also 1 Umdrehung = $97{,}57^{\mu}$ oder rund 1 Umdrehung = $0{,}1^{mm} = 100^{\mu}$).

Da jedoch hier die ganzen Umdrehungen nicht in Betracht kommen, rechnen wir mit dem Wert $s = 0{,}6239$ Umdrehungen oder:

$$s = 0{,}6239 \text{ Umdrehungen} = 0{,}6239 \times 360° = 224° 36' \tag{17}$$

Es wurde immer mit 0,00 angefangen, folglich sind nun die Werte σ:

$$\sigma_1 = \frac{s}{2} = 112° 18' \qquad \sigma_2 = \frac{s}{2} + 90° = 202° 18'$$

$$\sigma_3 = \frac{s}{2} + 180° = 292° 18' \qquad \sigma_4 = \frac{s}{2} + 270° = 22° 18'$$

Ein Messungsversuch am Mikroskop I. (rechts) gab folgendes:

1)				
	$s_1 = 0{,}6254$	$l_1 = -15$	$l_1^2 = 225$	
	$s_2 = 0{,}6311$	$l_2 = -72$	$l_2^2 = 5184$	
	$s_3 = 0{,}6232$	$l_3 = +7$	$l_3^2 = 49$	
	$s_4 = 0{,}6158$	$l_4 = +81$	$l_4^2 = 6561$	
Mittel	$s_0 = 0{,}6239$	$[l] = +1$	$[ll] = 12019$	(18)
		soll = 0		

Da $s = 1$ rund $= 100^{\mu}$, also s_1 nahezu $= 62{,}54^{\mu}$ ist, sind die l hier rund in Einheiten von 100^{μ} oder $0{,}1^{mm}$ gezählt, oder rund $l_1 = 0{,}15^{\mu}$.

Nun rechnet man:

nach (12):	$x = +18{,}85$	$y = +74{,}955$	(12*)
nach (13):	$[v v] = 12\,019 - 710{,}6 - 11236{,}5 = 71{,}9$		(13*)
nach (15):	$\alpha = -10{,}187$	$\beta = +40{,}507$	(14*)
nach (16):	$A = 345° 53'$	$r = 41{,}768$	(16*)

Man hat also nun nach (3) die Korrektionsformel:

$$\Delta S = 41{,}768 \sin (345° 53' + S) \tag{19}$$

Wenn man hier für S die 4 Anfangswerte 0°, 90°, 180°, 270° und dann die 4 Endwerte $s = 224° 36'$, $90° + s$, $180° + s$, $270° + s$ einsetzt, so bekommt man:

für die Anfangswerte	− 10,2	+ 40,5	+ 10,2	− 40,5	(20)
„ „ Endwerte	− 21,2	− 36,0	+ 21,2	+ 36,0	
Differenzen ΔS:	− 11,0	− 76,5	+ 11,0	+ 76,5	
Beobachtungen (18), l:	− 15	− 72	+ 7	+ 81	
übrig bleibende Fehler v:	+ 4,0	− 4,5	+ 4,0	− 4,5	

Die Quadratsumme dieser 4 Werte ist $[v\,v] = 72{,}5$, was mit (13*) hinreichend stimmt. Nach dieser Bestätigung rechnen wir den mittleren Fehler einer Messung nach (14):

$$m = \sqrt{72{,}5} = \pm 8{,}5 \text{ (nahezu } = 0{,}085^{\mu}) \tag{21}$$

Nach der Formel (19) kann man nun eine Korrektionstafel für das betreffende Mikroskop berechnen, deren 4 Hauptwerte schon in (20) enthalten sind. Indessen reduziert man nun alles auf den Anfang, da es sich doch immer nur um Schrauben-*Differenzen* handelt. So bekommt man (Mikroskop I, rechts):

Schrauben-Ablesungen	Verbesserung nach (20)	Verbesserung reduziert
0,0000·0	— 10·2	0·0
0,2500·0	+ 40·5	+ 50·7
0,5000·0	+ 10·2	+ 20·4
0,7500·0	— 40·5	— 30·3
1,0000·0	— 19·2	0·0

(22)

In gleicher Weise wurde auch das andere Mikroskop behandelt und dann für beide Mikroskope ausführliche Korrektionstafeln berechnet. Die später in § 9. mitzuteilenden Mikroskop-Ablesungen sind nach diesen Reduktions-Tabellen reduziert.

Ein sehr feines Beispiel solcher Bestimmung und Ausgleichung periodischer Schraubenfehler ist mitgeteilt in dem Werke: „travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures, tome II, Paris 1883, Seite C 104—C 118". Es wurden drei Hilfsstriche I, II, III in Abständen von 20μ und zwei Fäden 1 und 2 im Abstande von 30μ angewendet. Damit wurde gemessen:

1) Faden-Abstand 1—2 = 30μ an einem beliebigen Strich,
2) Strich-Abstand I—II = 20μ mit demselben Faden,
3) „ „ II—III = 20μ „ „ „
4) „ „ I—III = 40μ „ „ „

Alles dieses wurde in den verschiedensten Trommelstellungen sehr oft wiederholt.

Ein weiteres Citat hiezu ist:

Müller. Untersuchungen über Mikrometerschrauben mit besonderer Anwendung auf das Fadenmikrometer des neunzölligen Äquatoreals der Berliner Sternwarte. Berlin, Dümmler.

Kreisteilungsfehler.

Zu den kurzen Angaben über Teilungsfehler diametraler Striche und Bestimmung von Teilungsfehlern durch Repetition, die schon in unserem II. Bande 4. Aufl. 1893, S. 217—218 enthalten sind, können wir hier noch einiges weiteres, was hierüber veröffentlicht worden ist, berichten:

General Schreiber hat in der Abhandlung „Richtungs-Beobachtungen und Winkelbeobachtungen" („Zeitschr. f. Verm." 1879, S. 118 u. ff.) Teilungs-Untersuchungen mitgeteilt. Er sagt:

Nach den Erfahrungen, die sich auf die Untersuchung verschiedener aus unseren ersten Werkstätten hervorgegangener Teilungen stützen, ist der unregelmässige Teilungsfehler ein sehr bedeutender Teil des Gesamtfehlers einer unter günstigen Beobachtungen gemachten Beobachtung. Es fand sich im Mittel aus 16 Instrumenten der Firmen Pistor und Martins, Repsold u. Söhne, J. Wanschaff, C. Bamberg folgendes:

Mittlerer Gesamtfehler einer beobachteten Richtung . . . . . . $\tau = \pm 0.78''$
Mittlerer unregelmässiger Teilungsfehler einer beobachteten Richtung $\tau' = \pm 0{,}50''$



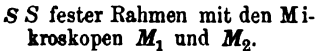
Diese Werte sind aus wirklichen trigonometrischen Gebrauchsmessungen berechnet, und der regelmässige Teil des Teilungsfehlers ist durch einen 8 gliedrigen periodischen Ausdruck von τ' abgesondert worden („Zeitschr. f. Verm.“ 1879, S. 120).

Ferner ist von General Schreiber hier zu citieren: „Untersuchung von Kreisteilungen mit zwei und vier Mikroskopen“ („Zeitschrift für Instrumentenkunde“, 1886, S. 1—5, S. 46—55, S. 93—104.)

Die Untersuchungen sind angestellt mit einem Instrument, welches 1879 besonders zu diesem Zwecke von J. Wanschaff konstruiert wurde, dasselbe ist beschrieben und abgebildet in dem „Berichte über die wissenschaftlichen Instrumente auf der Berliner Gewerbe-Ausstellung im Jahre 1879“, herausgegeben von Löwenherz, 1880, S. 74 bis 76, und in der „Zeitschr. f. Instrumentenkunde“ 1881, S. 67, wornach unsere Fig. 2. als Kopie gemacht wurde.

Fig. 2.
Kreisteilungs-Untersucher
nach Angabe von General Schreiber konstruiert von Mechaniker *Wanschaff*.
(Massstab etwa 1 : 7,5, Kreisdurchmesser = 42 cm.)

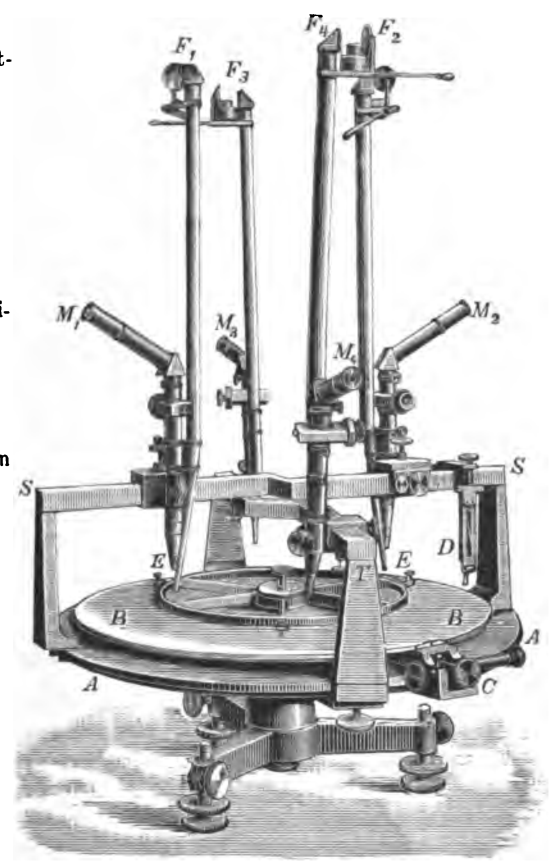
$F_1\,F_2\,F_3\,F_4$ Lampenbeleuchtungen für die Mikroskope.


$S\,S$ fester Rahmen mit den Mikroskopen M_1 und M_2.

$T\,T$ drehbarer Rahmen mit den Mikroskopen M_3 und M_4.

D Fühlhebel.
$E\,E$ Unterlagsschrauben.

B beweglicher Kreis.
A fester Kreis.





Das Instrument hat unten einen unbeweglichen Kreis A und damit fest verbunden eine Schiene SS mit zwei Mikroskopen M_1 und M_2.

Eine zweite Schiene TT mit zwei Mikroskopen M_3 und M_4 ist drehbar gegen den Unterlagskreis A, so dass die Schienen SS und TT unter jedem Winkel gegen einander gestellt werden können.

Auf den beweglichen Kreis B kann ein zu untersuchender Teilkreis mit den Unterlagsschrauben FF aufgeschraubt werden, und ob der Kreis sich dann beim Umdrehen von B richtig in einer *Ebene* dreht, kann mit dem Fühlhebel D untersucht werden.

Die 4 Mikroskope $M_1 M_2 M_3 M_4$ werden nicht mit Tageslicht, sondern mit künstlicher Lampenbeleuchtung $F_1 F_2 F_3 F_4$ abgelesen.

Noch eine Eigentümlichkeit ist zu erwähnen: Man kann zwar die zwei Schienen SS und TT, und damit auch die Mikroskop-Ebenen $M_1 M_2$ und $M_3 M_4$ beliebig gegen einander drehen, doch wäre es nicht möglich, den Winkel zwischen $M_1 M_2$ und $M_3 M_4$ auch = *Null* zu machen, wegen der Dicke der Mikroskope, wenn nicht besondere Vorsorge getroffen wäre, darin bestehend, dass zwar die Mikroskope M_1 und M_2 rechtwinklig zur Kreisebene B gerichtet sind, die beiden anderen Mikroskope M_3 und M_4 aber ein wenig *schief* gestellt werden können, so dass man z. B. mit M_1 und M_3 *denselben* Strich einer Kreisteilung einstellen kann.

Eine ähnliche Anordnung mit Messungsreihen seit 1872, hat Nagel in Dresden mitgeteilt in der Zeitschrift „Civilingenieur“, 33. Band, 1887, 8. Heft. Es ist an einem Repsold schen Theodolit mit gewöhnlichen Mikroskopen, noch ein beweglicher *Hilfs*-Arm mit zwei diametralen Mikroskopen angebracht, der in 4 Stellungen gegen den Haupt-Arm zur Teilungs-Untersuchung benützt wurde.

Hiezu gehört auch:

Schmidt. Bestimmung der Teilungsfehler am Pistor schen Meridiankreise der Berliner Sternwarte. Berlin, Dümmler.

Broch. Über die Etalonnierung der Unterabteilungen eines Stabes, die Bestimmung der progressiven Fehler einer Mikrometerschraube. Trav. et mém. du bureau intern. des poids et mesures. 5. 1886, S. 1. Bespr. in d. Beibl. zu d. Annalen d. Physik u. Chemie 1887, S. 487.

Änderung von Teilstrichen. Bei dieser Gelegenheit mag auch erwähnt werden, dass man bei den feinsten metronomischen Untersuchungen an Strichmassen Andeutungen gefunden hat, dass die Teilstriche sich mit der Zeit *ändern*. Diese zunächst unglaublich klingende Behauptung kann aber begründet sein, denn die Striche, welche in poliertes Metall gerissen werden, erzeugen in der gleichförmigen molekularen Struktur des Metalls gewissermassen Wunden, welche kleine molekulare Änderungen als Nachwirkung hervorbringen können. Es kommt dabei auch darauf an, ob und wie weit die Risse geglättet („ebarbiert“) werden. Die optische Strichmitte, auf welche man die Fäden einstellt, ist nun jedenfalls abhängig von der Beschaffenheit der Strichränder, und wenn hier kleine Änderungen durch allmähliche Ausgleichung molekularer Spannungen eintreten, so kann die Strichmitte für mikroskopisches Ablesen sich ändern.

§ 7. Normal-Masse.

Ein *Massstab* ist ein Werkzeug zur Ausführung von Längenmessungen. Ein Massstab, welcher diesem Zwecke nicht unmittelbar dient, sondern mittelbar dadurch, dass andere Massstäbe nach ihm reguliert werden, heisst ein *Normal*-Massstab.

Ein Massstab an und für sich genügt noch nicht zur Festsetzung eines Masses, weil der Stab bei verschiedenen Temperaturen verschiedene Länge hat, es muss deswegen noch angegeben werden, bei welcher Temperatur der Massstab die normale

Länge hat, und damit der Massstab auch bei anderen Temperaturen brauchbar ist, muss die Ausdehnung bekannt sein.

Die Normal-Temperatur ist bei verschiedenen Massen verschieden; insbesondere haben wir:

beim Metermass	Normal-Temperatur	$= 0° C = 0° R$,
beim alten Pariser Mass	„	$= 13° R = 16{,}25° C$,
beim englischen Mass	„	$= 62° F = 16{,}67° C = 13{,}33° R$.

Der Ausdehnungs-Coëfficient.

Wenn ein metrischer Stab bei der Temperatur 0° die Länge L_0 hat und bei der Temperatur $t°$ die Länge L_t, so setzt man eine Gleichung fest von der Form:

$$L_t = L_0 (1 + \alpha t) \tag{1}$$

und man nennt α den Ausdehnungs-Coëfficienten des Stabes.

Dieses ist die gewöhnliche Annahme, und wenn für alle Gebrauchs-Temperaturen t, der Coëfficient α denselben Wert hat, so ist hiezu nichts weiteres zu bemerken. Für die feineren Untersuchungen ist aber die Annahme eines *konstanten* α nicht mehr genügend, und man nimmt dann statt (1) eine quadratische Funktion:

$$L_t = L_0 (1 + \alpha t + 2 \beta t^2) \text{ oder } L_t = L_0 (1 + (\alpha + 2 \beta t) t) \tag{2}$$

Um in solchen Fällen eine unzweideutige Definition zu haben, citieren wir nach dem Werke: „Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures“, Tome II, Seite C. 30 und Tome III, Seite C. 19 folgendes:

Man nennt in Bezug auf die vorstehende Gleichung (2):

$\alpha + 2 \beta t$ wahrer Ausdehnungs-Coëfficient bei $t°$

$\alpha + \beta t$ mittlerer Ausdehnungs-Coëfficient von 0° bis $t°$.

Als Beispiel nehmen wir aus: „travaux et mémoires“ III, Seite C. 19 für einen Platin-Iridium-Stab, der an und für sich mit I_2 bezeichnet wurde:

$$\alpha = 0{,}000\,008\,594\,6 \qquad \beta = 0{,}000\,000\,001\,26$$
$$\pm \qquad 13\,5 \qquad\qquad \pm \qquad 56$$

es ist also der mittlere Ausdehnungs-Coëfficient von 0° bis $t°$:

$$\text{Stab } I_2: \qquad \alpha_{(t)} = 10^{-9} (8\,594{,}6 + 1{,}26\, t) \tag{3}$$

und der wahre Ausdehnungs-Coëfficient bei $t°$:

$$\text{Stab } I_2: \qquad \alpha_t = 10^{-9} (8\,594{,}6 + 2{,}52\, t) \tag{4}$$

Bei weniger scharfen Messungen lässt man das zweite Glied (mit β) fort, und redet dann von dem Ausdehnungs-Coëfficienten α schlechthin, doch muss man denselben für jeden Stab besonders bestimmen, weil verschiedene Stäbe aus demselben Metall oder derselben Legierung doch nicht genau gleiche Ausdehnungen haben, z. B. hat ein anderer in „travaux et mémoires“ III. Seite C. 43 erwähnter Platin-Iridium-Stab, der mit I bezeichnet ist, statt des obigen (3) den Wert:

$$\alpha_{(t)} = 10^{-9} (8\,602{,}9 + 2{,}09\, t).$$

Da man aber durchaus nicht immer in der Lage ist, Ausdehnungs-Coëfficienten zu bestimmen, nimmt man für viele Zwecke die *Mittelwerte*, welche bereits bestimmt worden sind. Namentlich ist es wichtig, Ausdehnungs-Coëfficienten, die einmal an-

genommen sind, in demselben Falle unverändert beizubehalten, damit wenigstens die *Differenzen* von Ausdehnungen in der Rechnung richtig bleiben.

Die Kaiserl. Normal-Aichungs-Kommission hat in den metronomischen Beiträgen Nr. 1, herausgegeben von Foerster, Berlin 1870, Seite 17, folgende Werte angenommen:

Kupfer	Ausdehnungs-Coëfficient		$\alpha =$ 0,000 017 17	(5)
Messing	„	„	0,000 018 86	
Zinn	„	„	0,000 024 83	
Eisen	„	„	0,000 011 26	

Aus den „travaux et mémoires", III. Seite C. 43—C. 44 entnehmen wir folgende Mittelwerte:

Platin-Iridium	Ausdehnungs-Coëfficient		$\alpha =$ 0,000 008 573	(6)
Platin	„	„	0,000 008 898	
Silber	„	„	0,000 018 340	
Eisen	„	„	0,000 011 063	
Stahl	„	„	0,000 010 420	
Glas	„	„	0,000 008 392	

Einige andere zuweilen in Frage kommende Mittelwerte sind:

Blei	Ausdehnungs-Coëfficient		$\alpha =$ 0,000 028	(7)
Bronce	„	„	0,000 018	
Gold	„	„	0,000 014	
Guss-Eisen	„	„	0,000 011	
Zink	„	„	0,000 033	
Tannenholz	„	„	0,000 004	

Endmasse und Strichmasse.

Die Längenmasse werden in zwei wesentlich verschiedene Gattungen eingeteilt, die man Endmasse und Strichmasse nennt.

Ein Endmass bestimmt eine Länge als äussersten Abstand seiner Teile in der Axrichtung.

Ein Strichmass bestimmt eine Länge als Querabstand zweier auf seiner Oberfläche eingerissener Parallelstriche.

Verschiedene Mass-Systeme.

Jedes Einheitsmass ist ursprünglich willkürlich, und deshalb ist die grosse Mannigfaltigkeit der Masse erklärlich. Die älteren Masse sind meist vom menschlichen Körper hergenommen, z. B. der Fuss, die Elle u. s. w. und insofern willkürlich.

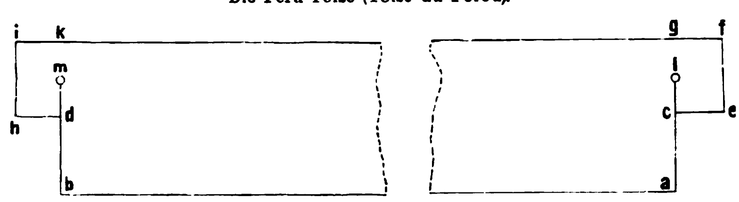
Auch das Meter, welches die früheren Masse jetzt fast verdrängt hat, ist ursprünglich willkürlich, und der Umstand, dass 1 Meter nahezu der zehnmillionste Teil des Erdquadranten ist, ist metronomisch gleichgültig.

Wir geben in Folgendem einen Abriss der Geschichte der französischen Masse, aus welchen das heutige internationale Metersystem hervorgegangen ist. (Zunächst nach Nr. 5 der metronomischen Beiträge, zur Geschichte und Kritik der Toisenmassstäbe, von C. F. W. Peters, herausgegeben von der K. Normal-Aichungs-Kommission, Berlin 1885.)

Am Anfang des 18. Jahrhunderts befand sich in Paris am Fuss der Treppe des Grand Chatelet als Normalmass für öffentlichen Gebrauch eine eiserne Schiene mit zwei Vorsprüngen, zwischen welche ein Massstab von der Länge einer Toise hindurchgeschoben werden konnte.

Etwa um 1735, vor dem Abgang der Gradmessungs-Expedition nach Peru, wurden nach dem rohen Chatelet-Normal zwei feinere Toisen angefertigt in der Form der nachstehenden Fig. 1.

Fig. 1.
Die Peru-Toise (Toise du Pérou).



Die beiden Toisen bestanden aus eisernen Stangen, an den Enden $b\,d$ und $a\,e$ hälftig eingeschnitten, so dass $a\,b = c\,d$ die Toisenlänge vorstellt. Die eine dieser Stangen, später unter dem Namen „Toise du Pérou" bekannt, hatte auch noch zwei Punkte m und l, deren Abstand als Toise in Wirklichkeit in Peru gedient hat. Die andere Toise, später „Toise du Nord" genannt, sollte ursprünglich als Kontroll-Normal in Paris zurückbleiben, während die erste nach Peru abging, indessen nach dem Abgang der Peru-Expedition entschloss man sich rasch auch zu der Polar-Expedition, welcher man 1736 die zweite Toise mitgab.

Diese kam schon 1737 wieder nach Paris zurück, während die Peru-Toise erst 1748 wieder ankam.

Die Vergleichung ergab im Jahr 1752, dass die Peru-Toise um 0,04 Linien länger war, als die nordische; man erklärte das durch Rosten der letzteren bei einer Havarie im bottnischen Meerbusen.

Im Jahre 1766 erschien eine Verfügung des Königs Ludwig XV, nach welcher die Toise du Pérou an Stelle der Toise du Chatelet als Normalmass in Frankreich eingeführt wurde. (1 Toise = 6 Pariser Fuss = 72 Pariser Zoll = 864 Pariser Linien.) Von 1813—1831 wurden verschiedene Kopieen der Toise genommen.

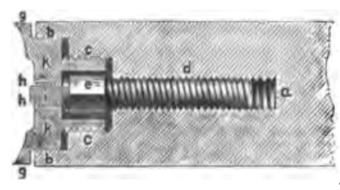
Die Toise kam später in Vergessenheit, und ob die im Jahre 1854 neu gereinigte, jetzt als „Toise du Pérou" betrachtete Stange wirklich die Stange von 1735 oder nur eine Kopie derselben ist, blieb eine Zeit lang zweifelhaft, ist aber jetzt durch die Ermittelungen von Wolf in Paris als erwiesen anzusehen. Jedenfalls sind die vorhandenen Kopieen der ursprünglichen Peru-Toise von Wichtigkeit. C. F. W. Peters hat 14 solcher Kopieen in Betracht gezogen und durch Zusammenstellung dessen, was über die Vergleichung dieser Stäbe mit der alten Peru-Toise oder der Kopieen unter sich bekannt ist, Endergebnisse gefunden, z. B. diese:

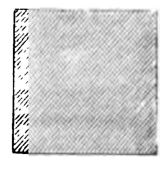
Ursprüngliche Peru-Toise	= 864,00000	Pariser Linien
Dänische Toise, Fortin = D	= 864,00238	„ „
Besselsche Toise = B	= 863,99920	„ „
Dänische Toise Gambey = G	= 863,99493	„ „
Englische Ordnance-Toise = T^2	= 864,06228	„ „

Die Normal-Temperatur des Toisen-Masses ist 13° *R.* = 16,25° *C.*; dieses stammt von der Gradmessung in Peru 1735 her, wo die Mittel-Temperatur = 13° *R.* angenommen wurde.

Die Besselsche Toise, welche hier mit genannt ist, wurde von Bessel dazu benützt, um ein preussisches Normalmass in einem Stabe von 3 preussischen Fuss herzustellen. Unsere Fig. 2 zeigt die Einzelheiten desselben nach Tafel II des Werkes: „Darstellung der Untersuchungen und Massregeln, welche in den Jahren 1835—1838 durch die Einheit des preussischen Längenmasses veranlasst worden sind, von F. W. Bessel, Berlin 1839".

Fig. 2.
Besselsche Normal-Stange (natürl. Grösse).
Längenschnitt. Querschnitt.





Erklärungen zu Fig. 2.:
Hauptkörper *b*, *c*, *a* von Gussstahl,
e d eingedrehte Eisenschraube,
i Sapphir-Kegel,
h Goldbettung,
g k Pressschraube.

Bessel hielt ein Endmass für sicherer als ein Strichmass, indem er die massgebenden Enden möglichst hart machte, nämlich von Sapphir (*i* Fig. 2.), und die Verbindung durch Gold vor Rost schützte.

Der Stahlstab hat die Aufschrift:

„Urmass der preussischen Längeneinheit 1837. Dieser Stab, in der Wärme von 16,25° des hundertteiligen Thermometers, in seiner Axe gemessen, ist 0,00063 Linien kürzer als drei Fusse."

Dieser Stab wurde durch das Gesetz vom 10. März 1839 als preussisches Urmass bestimmt.

Die Temperatur-Ausdehnung des Normalmasses fand Bessel = 0,004375 preuss. Linien für 1° C., oder da der Stab 432 preuss. Linien lang ist, Ausdehnung = 0,000010127 der Länge für 1° C.

Der preussische Fuss selbst ist dadurch = 139,13 Pariser Linien bestimmt.

Ausser der schon oben genannten „Darstellung" u. s. w. sind hier noch weitere Besselsche Schriften zu citieren: „Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels", Berlin 1828. S. 126. „Gradmessung in Ostpreussen", S. 22. „Populäre Vorlesungen über wissenschaftliche Gegenstände", Hamburg 1848, S. 307—325.

Nach dieser Abschweifung, betreffend das preussische Normalmass von 1837, kehren wir zur Geschichte des Toisen- und Metermasses zurück:

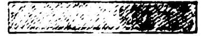
Das neue französische Massystem vom Jahr 1791 bestimmte als Einheit das Meter, welches möglichst genau der zehnmillionste Teil des Erdmeridian-Quadranten sein sollte. Das Dekret, welches den von der Akademie vorgeschlagenen Plan annahm, ist vom 26. März 1791 und die Genehmigung erfolgte 4 Tage nachher („Delambre, Base du système métrique" I. S. 19).

Nach vorübergehender Anwendung eines provisorischen Meters von 443,44 Par. Linien wurde auf Grund der Delambreschen Gradmessung das „wahre und definitive" Meter (mètre vrai et définitiv) = 443,296 Pariser Linien festgesetzt. Die Normal-

temperatur für das Metermass wurde anders gewählt als bei dem alten Pariser Mass. Während nämlich letzteres die Normaltemperatur 13° R. = 16,25° C. hat, ist die Normaltemperatur des Metermasses = 0° R. = 0° C., d. h. gleich der Temperatur des schmelzenden Eises.

Demzufolge wurde ein Platinstab hergestellt, dessen Länge bei 0° ist = $\frac{443,296}{864}$ derjenigen Länge, welche die Peru-Toise bei 13° R. hat. (Base du système métrique Band III. S. 622.) Der genannte Platinstab, dessen Querschnitt (Fig. 3.) ein Rechteck von 25^{mm} Breite und 4^{mm} Höhe ist, befindet sich noch in Paris, er heisst gewöhnlich „mètre des archives".

Fig. 3.
Querschnitt des „mètre des archives" in natürlicher Grösse.



Obgleich hiernach das Metermass längst sicher gestellt zu sein scheint, so sind doch erst in neuerer Zeit die nötigen Vorkehrungen zu einer befriedigenden Sicherstellung desselben in Angriff genommen worden. Das französische Urplatinmeter (mètre des archives) entspricht nämlich in mehrfacher Beziehung nicht den heutigen wissenschaftlichen Anforderungen.

Um die damit verbundenen Übelstände zu heben, versammelte sich im Sommer 1870 eine internationale Kommission, welche jedoch wegen des Krieges zu keinen Resultaten kam. Die Kommission ist zum zweitenmale im Herbst 1872 in Paris zusammengetreten, jedoch erst im Jahr 1875 kamen die Verhandlungen zum Abschluss. Dieselben haben eine internationale Meter-Konvention ergeben, woran sich allmählich fast alle Kulturstaaten der Erde angeschlossen haben.

Der Wortlaut der Konvention ist mitgeteilt in dem Deutschen Reichsgesetzblatt Nr. 19 vom 5. Sept. 1876, S. 191—212, derselbe ist abgedruckt in der „Zeitschr. f. Verm." 1877, S. 280—290. Die neuesten Bestimmungen für das metrische Masssystem in Deutschland sind enthalten in dem Gesetze vom 11. Juli 1884 (Reichsgesetzblatt 1884, Nr. 20).

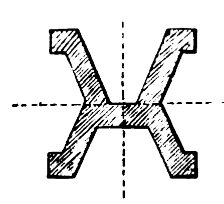
Die Verhandlungen der internationalen Kommission, welche vom 24. Sept. bis 12. Okt. 1872 in Paris stattfanden, sind mitgeteilt in den „Annales du conservatoire des arts et métiers", Nr. 37, Tome X, 1er fascicule. Paris 1873. Wir entnehmen hieraus folgendes:

Es sollen 30 Meterstäbe hergestellt werden, welche möglichst gleich dem Pariser Archiv-Meter zu machen und unter sich zu vergleichen sind, worauf sie unter die beteiligten Staaten verteilt werden, und künftig die Grundlage aller Massvergleichungen bilden werden.

Als Material für diese Normalmeter ist eine *Legierung* von 90% Platin mit 10% Iridium gewählt. Das aus reinem Platin bestehende mètre des archives hat eine sehr poröse Struktur, dagegen hat die erwähnte Legierung von Platin und Iridium folgende Vorzüge: 1) Diese beiden Metalle krystallisieren in demselben System, nämlich dem regulären, und haben die gleiche Dichte 21,15. 2) Die Legierung hat noch nahezu dieselbe Dichte wie die einzelnen Metalle, wodurch eine innige Verbindung gesichert ist. 3) Von allen Metallen (mit Ausnahme des hier nicht in Betracht kommenden Arsen und Osmium) haben Platin und Iridium die geringste Ausdehnung durch die Wärme, nämlich etwa 0,000009 für 1° C.

Die Stäbe werden prismatisch hergestellt mit einem in Fig. 4. (S. 56) in natürlicher Grösse gezeichneten Querschnittsprofil. Die Wahl dieses Profils ist das Ergebnis vieler Erwägungen, es fand sich nämlich für dasselbe das günstigste Verhältnis des Träg-

Fig. 4.
Querschnitt der internationalen Platin-Iridium-Meterstäbe, natürliche Grösse.



heitsmomentes zur Profilfläche, oder es hat der so konstruierte Stab die grösste Tragfähigkeit bei kleinstem Volumen. (Das fragliche Verhältnis ist 26 mal günstiger als bei dem mètre des archives, Fig. 3.). Das gewählte Profil (Fig. 4.) hat noch einen Vorzug, es liegt nämlich die obere Fläche der Querverbindung (in Fig. 4. durch eine punktierte horizontale Linie hervorgehoben) in der neutralen Axe des Körpers, so dass bei eintretender Biegung keine Verlängerung oder Verkürzung in dieser Fläche stattfindet, insoweit es sich dabei um die mit den Biegungen verbundenen Drehungen des Querschnitts handelt. Die genannte Oberfläche ist zur Aufnahme der Striche bestimmt, welche zur Massbezeichnung dienen.

Die Unterlage der neuen Normalmeter soll nicht eine kontinuierliche sein, sondern aus zwei Rollen bestehen, damit der Temperatur-Ausdehnung keinerlei Hindernis bereitet wird. Allerdings findet bei dem Auflager auf zwei Rollen ein Einschlagen durch das Eigengewicht des Stabes statt, doch ist dasselbe sehr klein. Die Verteilung der Stützen ist am günstigsten, wenn (entsprechend Fig. 5.) die Beziehung stattfindet:

Fig. 5.
Rollen-Unterlage der internationalen Massstäbe.

$$l' = 0{,}394\, l \quad \text{oder} \quad l = 0{,}559\, L$$

Wenn diese Verhältnisse eingehalten werden, so beträgt für das in Fig. 4. gezeichnete Profil die Einschlagtiefe nur 0,008 63^{mm} und die entsprechende Verkürzung des Stabes nur 0,000 000 4^{mm}.

Über den neuesten Stand dieser Sache wird Auskunft gegeben in folgenden Schriften:

Mitteilungen der Kaiserl. Normal-Aichungskommission, 1. Reihe, Berlin 10. Dezember 1890 Nr. 10. Die Beziehungen der metrischen, der altfranzösischen und der englischen Längeneinheit zu einander, abgedruckt in „Zeitschr. f. Vermessungsw." 1890, S. 265—269.

Die internationale Organisation des Mass- und Gewichtswesens und die neuen Prototype. Mitt. d. K. Norm.-Aich.-Komm. 1890, Nr. 11, S. 139. Bespr. in d. „Zeitschr. f. Instrumentenkunde" 1890, S. 296—298; d. „Zeitschr. f. Vermessungsw." 1890, S. 506—508.

Weitere Litteraturangaben s. „Zeitschr. f. Verm." 1892, S. 473, Normal-Aichungs-Kommission, und „Zeitschr. f. Verm." 1895, S. 433, Bureau international des poids et mesures.

§ 8. Komparatoren.

Ein Komparator ist ein Apparat zur Vergleichung zweier Längenmasse. Entsprechend der Einteilung der Längenmasse in Endmasse und Strichmasse hat man verschiedene Komparatoren.

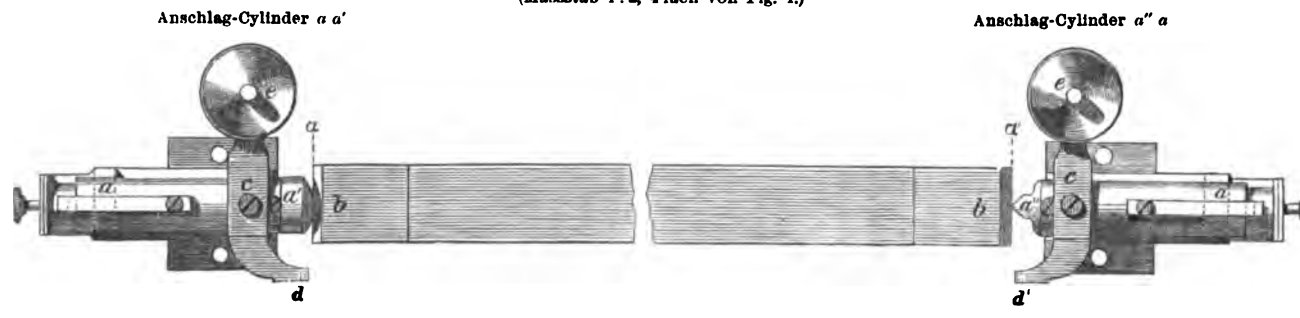
Ein Komparator für Strichmasse, welcher aber zugleich auch zur Vergleichung von Endmassen eingerichtet werden kann, ist in Fig. 1. und Fig. 2. S. 57, gezeichnet. Derselbe ist von Mechaniker Reichel in Berlin konstruiert, und gehört dem Gr. bad. Oberaichungsamt Karlsruhe. (Mit ähnlichen Komparatoren sind alle deutschen Oberaichungsämter ausgerüstet.)

Fig. 1. zeigt den eigentlichen Komparator in Längs- und Queransicht.

Fig. 1.
Komparator des Gr. Ober-Aichungs-Amtes Karlsruhe (von Mechaniker *Reichel* in Berlin).
(Masstab 1:8, Länge $EE = 1$ Meter.)



Fig. 2.
Besondere Einrichtung zum gegenseitigen Vergleichen von Strichmassen und Endmassen.
(Masstab 1:2, 4 fach von Fig. 1.)



Auf der hölzernen Unterlage *A A B B* erheben sich zwei eiserne Säulen *C C*, welche eine gut gehobelte eiserne Schiene von ⊥förmigem Querschnitt tragen. Auf dieser Schiene gleiten vermittelst zweier Schlitten die zwei Mikroskope *E E*. Das Fadennetz des einen (rechtseitigen) Mikroskops ist nicht fest, sondern vermittelst einer Mikrometerschraube *F* beweglich. Dieses Mikroskop hat im wesentlichen dieselbe Einrichtung wie die bekannten Theodolit-Mikroskope.

Auf dem hölzernen Untergestell sind ferner zwei tischartige eiserne Platten *G G* aufgesetzt, und zwar mit Zwischenlage je zweier horizontaler Cylinder *K K*, welche um excentrische Axen drehbar sind, und dadurch die Tischplatten *G G* innerhalb eines Spielraums von 1—2^{cm} zu heben oder senken gestatten. Dieses Heben oder Senken ist notwendig, damit die Oberflächen der Massstäbe *J J'*, welche verglichen werden sollen, immer in die deutliche Sehweite der Mikroskope gebracht werden können. Zwischen *J J'* und *G G* sind noch Unterlagsplatten *H H* angebracht.

Vergleichung zweier Strich-Masse.

Wenn es sich um Vergleichung zweier Strich-Masse *J J'* handelt, so werden dieselben in der beschriebenen Weise neben einander aufgelegt, so dass ihre Oberflächen in eine Ebene zusammenfallen, und zusammen mittelst der Mikroskope beobachtet werden können. Da die Unterlagsplatten *H H* mittelst besonderer Schrauben der Länge nach etwas Spielraum haben, kann man es dahin bringen, dass man mit dem einen (etwa dem linkseitigen) Mikroskop die zusammenfallenden Nullstriche beider Strichmasse zwischen den Mikroskopfäden sieht. Dann hat man zum Zweck der Vergleichung nur noch das andere (rechtseitige) Mikroskop auf die Endstriche der beiden Strichmasse einzustellen, und dabei den Abstand dieser beiden Endstriche mit der Mikrometerschraube zu messen.

Hiebei ist also vorausgesetzt, dass die einander entsprechenden Striche der zu vergleichenden Massstäbe *gleichzeitig* in das Gesichtsfeld der Mikroskope gebracht werden können, und dieses ist deswegen gewöhnlich thunlich, weil die Striche auf die eine Kante ausmündend gezogen sind.

Vergleichung eines Strich-Masses mit einem Endmass.

Mit Hilfe der besonderen Einrichtung, welche in Fig. 2. in 4mal grösserem Massstab als Fig. 1. gezeichnet ist, kann man auch Strichmasse und Endmasse vergleichen.

Das zu vergleichende Endmass wird hiebei ganz in der vorher beschriebenen Weise behandelt, es ist *J* oder *J'*, und liegt auf einer der beiden Platten *H*. Die andere Platte *H* wird weggenommen, und statt derselben werden nun die in Fig. 2. links und rechts gezeichneten Anschlag-Cylinder aufgeschraubt.

Diese Cylinder *a'* und *a''* stecken in Hülsen *a* und haben infolge von eingelegten Federn das Bestreben, in der Richtung gegen einander aus den Hülsen herauszutreten, d. h. sie drücken beiderseits gegen das Endmass *b b*, welches in Fig. 2. dazwischen gelegt ist.

Wenn *b* in horizontale Schneiden endigt, so wird man *a''* in eine vertikale Schneide oder *a'* in eine Rundung endigen lassen u. s. w.; für die Betrachtung der Wirkungsweise des Apparates ist diese Unterscheidung unwesentlich.



Auf den Cylindern *a'* und *a''* sind Platten *c* aufgesetzt, welche nach vorn vorgebogen und mit feinen Strichen *d* und *d'* versehen sind. (Die auf der anderen Seite befindlichen Schrauben *e* dienen zur Höhenregulierung für die Striche *d*.)

Man denke sich nun die Cylinder *a'* und *a''* auf der einen Tischplatte *G* befestigt, und ein Endmass *bb* zwischen die Cylinder-Enden *a'* und *a''* eingelegt. Auf der anderen Tischplatte *G* (bzw. auf der Zwischenplatte *H*) liegt ein Strich-Massstab *J*, und man bringt es nun dahin, dass die Indexstriche *d* und *d'* der Cylinder an der Kante des Strichmasses anliegen und gleichzeitig mit den benachbarten Strichen des Strichmasses in den Mikroskopen erscheinen. Man behandelt dann die Striche *d* und *d'* wie die Anfangs- und Endstriche eines Strichmasses und macht die Strichmass-Vergleichung in der früher angegebenen Weise.

Es handelt sich noch darum, die Länge *d d'* auf die Länge *α α'* zwischen den Enden der Anschlag-Cylinder zu reduzieren, und dieses geschieht dadurch, dass man nach Entfernung des Massstabes *b b* den einen Cylinder abnimmt und ihn unmittelbar an den anderen Cylinder anstossend wieder befestigt. Es stossen dann die Cylinder-Enden *α* und *α'* zusammen, während die Indexstriche *d* und *d'* einen kleinen Zwischenraum zwischen sich lassen, den man misst und an der vorhergehenden Vergleichung in Rechnung bringt.

Einige andere, zum Teil sehr sinnreiche und doch einfache Verfahren zur gegenseitigen Vergleichung von Endmassen und Strichmassen berichtet „Zachariae, Die geodätischen Hauptpunkte", deutsch von Lamp, Berlin 1878, S. 96—98.

Komparator für hölzerne Latten.

Im wesentlichen nach demselben Grundgedanken wie der vorher beschriebene aichamtliche Meter-Komparator, jedoch länger und stärker, ist der Komparator für Nivellierlatten und ähnliche Massstäbe, dessen Querschnitt in Fig. 3. gezeichnet ist.

Der Hauptteil ist eine Eisenschiene *A A'* (aus einer Eisenbahnschiene hergestellt), 3,5^m lang und mit einer durchlaufenden Millimeterteilung versehen. *D D'* und *E E'* sind zwei Träger, welche durch die auf der anderen Seite angebrachten Schrauben *J* und *J'* durch Hebel *H G* und *H' G'* der Höhe nach gestellt werden können.

N ist ein aufgelegter Massstab, der durch das Mikroskop *M* verglichen wird.

Weiteres hierüber haben wir früher in der „Zeitschrift für Instrumentenkunde", 1881, S. 41—47 mitgeteilt.

Fig. 3.
Latten-Komparator.
Querschnitt, Massstab 1:6.

(Karlsr. u. Hannov. Sammlung, Mechaniker *Sickler*.)

Normalstellung der Mikroskop-Axen.

Wenn man bei einem Längen-Komparator der bisher beschriebenen Art die Laufschiene der Mikroskope und die Unterlagsplatten mit Libellen gut horizontal stellt, so ist nur noch die Frage zu beantworten, ob die Mikroskop-Axen vertikal sind. Wenn letzteres nur wenigstens genähert der Fall ist, so kann man bereits Vergleichungen machen, weil kleine Neigungen der Mikroskop-Axen bei den immer nahezu gleichen Höhen-Einstellungen wenig ausmachen.

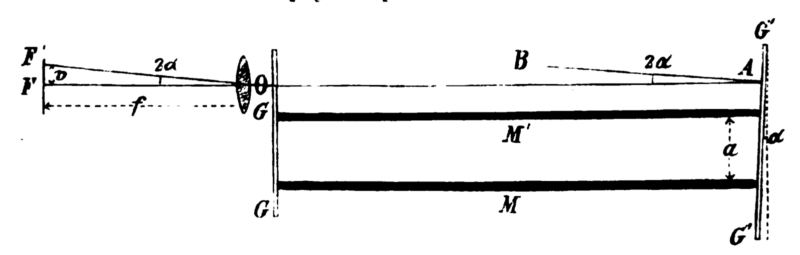
Um jedoch die Mikroskop-Axen genau vertikal zu stellen, hat man das Mittel des Quecksilber-Horizontes; man stellt nämlich unter ein Mikroskop ein Gefäss mit Quecksilber und beobachtet darin das Spiegelbild der Fäden, welches sich mit den Fäden selbst decken soll. Jedoch muss man dazu die Fäden *beleuchten*; das geschieht durch einen kleinen seitwärts angebrachten Spiegel, den wir aus anderer Veranlassung beschrieben haben in „Grundzüge der astr. Zeit- und Ortsbestimmung", Berlin 1885, S. 225.

Eine andere Untersuchung über Mikroskop-Axen-Neigung u. s. w. gab die frühere, 3. Auflage dieses Bandes, 1890, § 9. Auch ist hier zu citieren: „*Weinstein*, Handbuch der physikalischen Massbestimmung", II. Band, Berlin 1888, S. 72—89.

Fühlspiegel-Komparator von Steinheil.

Ein anderes Prinzip der Massvergleichung, für Endmasse geeignet, ist das des Fühlspiegels, von dem wir in Fig. 4. wenigstens den Grundgedanken darstellen (nach einem Berichte von Steinheil in dem „Gen.-Ber. d. Europ. Gradm. für 1869", S. 76 bis 80 und „Tinter, Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Vereins", 1871, S. 40, und „Publ. des geod. Instituts. Massvergleichungen", II. 1876).

Fig. 4.
Fühlspiegel-Komparator von *Steinheil.*



In Fig. 4 sind M und M' zwei Endmasse, welche verglichen werden sollen. Dieselben befinden sich in paralleler Lage im Abstand a, und stossen links mit ihren Enden gegen eine ebene Glasplatte $G\,G$ an. Wenn diese Masse M und M' *gleich* lang sind, so wird eine zweite Glasplatte $G'\,G'$, welche gegen die anderen Enden (rechts) gedrückt wird, mit der ersten Platte $G\,G$ *parallel* sein; andernfalls machen die Platten $G\,G$ und $G'\,G'$ einen kleinen Winkel α, entsprechen der Gleichung:

$$\sin \alpha = \frac{M' - M}{a}$$

Nun hat man ein Fernrohr $F\,O$, rechtwinklig zur Glasplatte $G\,G$ gerichtet; und wenn $G'\,G'$ parallel $G\,G$ ist, so wird $F\,O\,A$ mit $F\,O$ gemeinsam nach F reflektiert. Wenn dagegen der erwähnte kleine Winkel α vorhanden ist, so bekommt man *zwei*

Reflexionspunkte F und F', deren Abstand $v = 2f \sin\alpha$ ist, also in Verbindung mit der ersten Gleichung:

$$M' = M = \frac{a\,v}{2f}$$

Insofern a erheblich kleiner ist als f, giebt ein Fehler an v einen entsprechend kleinen Einfluss auf die Massvergleichung $M' - M$.

Man hat die Fühlspiegel-Vergleichung von Endmassen früher namentlich deswegen gewählt, weil man dabei die Stäbe in einer *Flüssigkeit* vergleichen kann, was das beste Mittel zur sicheren und gleichmässigen Temperatur-Bestimmung ist; indessen in neuer Zeit macht man auch mikroskopische Strich-Vergleichungen in der Flüssigkeit, wie aus dem Nachfolgenden zu ersehen ist.

Mass-Vergleichungen des internationalen Mass- und Gewichts-Bureaus.

Zum Abschluss unserer Betrachtungen über Massvergleichung wollen wir noch einen Auszug vorführen aus dem Werke: „Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures“, Tome II, Paris 1883, Seite C 3 — C 147, und Tome III, 1884, Seite C 3 u. ff. mesures de dilatation et comparaisons des règles métriques.

1. Verfahren im Allgemeinen. Die Messungen der Ausdehnungen der metrischen Strichmasse wurden nach dem von dem schwedischen General Wrede, Mitglied des internationalen Mass- und Gewichts-Bureaus angegebenen Verfahren ausgeführt, welches im wesentlichen in der aufeinander folgenden Vergleichung zweier Stäbe besteht, welche nach einander unter die Objektive zweier vertikaler im Abstand von 1^m befestigter Mikrometer-Mikroskope gebracht werden. Die Messungen werden wie bei gewöhnlichen Vergleichungen zweier Meter gemacht, mit dem einzigen Unterschied, dass jeder der Stäbe in einen besonderen Trog mit Flüssigkeit eingeschlossen ist, und dass die Stäbe hierin im allgemeinen verschiedene Temperaturen haben, welche nach Umständen reguliert werden können. Auch kann die Temperatur des einen Stabes während der Dauer der Vergleichungen konstant erhalten werden, und man erhält dadurch die Ausdehnung des anderen Stabes unmittelbar. Der Vorteil der Methode besteht darin, dass ihre Ergebnisse unabhängig von dem absoluten Abstand der Mikroskop-Axen sind, dieser Abstand braucht nur während der kurzen Zeit des Übergangs von einem Stab zum anderen als konstant oder während abwechselnden Übergangs als gleichförmig veränderlich angenommen zu werden.

Der Vergleich-Apparat besteht hiernach im wesentlichen aus zwei fest aufgestellten Mikroskopen und einer zwischen beiden befindlichen Schienen-Wagen-Einrichtung, mittelst welcher die in Tröge eingeschlossenen Meterstäbe rasch unter die Mikroskope geschoben werden können.

2. (C. 4.) Der Komparator besteht aus zwei Mikroskopen, welche auf Steinpfeilern im Abstand von 1^m gut fundiert sind; dazwischen bewegt sich ein Wagen auf Schienen, welcher die Vergleichs-Stäbe mit ihren Trögen unter die Mikroskope bringt.

3. (C. 12.) Richtigstellung aller Teile.

4. (C. 13.) Die Mikroskope. Objektiv von 36^{mm} Brennweite, Ganghöhe der Schraube $= 0{,}75^{mm}$, 1 Umdrehung giebt $0{,}1^{mm}$, die Trommel ist in 100 Teile geteilt, giebt also sehr nahe $0{,}001^{mm} = 1^{\mu}$, Gesichtsfeld $= 1{,}1^{mm}$, Okular Ramsden, Vergrösserung 90- bis 95fach.

5. (C. 14.) Neben-Apparate zur Regulierung der Temperatur in den Trögen mit Hilfe von Wasser-Zirkulation.

6. (C. 16 und Tome III C. 11.) Als Flüssigkeit wurde zuerst Glycerin genommen, aber wieder aufgegeben, weil die Klebrigkeit sich als Hindernis gleichförmiger Temperatur-Verteilung zeigte; ähnlich verhält es sich mit vegetabilischen Ölen. Petroleum stört durch die gesundheitschädlichen Dämpfe. Reines Wasser wurde schliesslich ausreichend gefunden für Platin, Messing und Bronce, dagegen für Eisenstäbe wurde als nicht angreifende Flüssigkeit nach verschiedenen Versuchen, gesättigte Borax-Lösung genommen.

Die Stäbe sind in der Regel 25mm tief in die Flüssigkeit eingetaucht, und die mikrometrische Messung durch eine 25mm tiefe Flüssigkeits-Schichte geschieht nahezu mit derselben Genauigkeit wie durch Luft.

7. (C. 20 und Tome III. C. 6.) „Künstliche Beleuchtung in der Axe der Mikroskope, durch einen Spiegel unter 45°."

8. (C. 26.) Einstellen auf deutliche Sehweite, nach Foersters Theorie „l'influence de la mise au foyer sur les mesures mikrométriques".

9. (C. 30.) Ausdehnungs-Coëfficienten (vgl. unseren früheren § 7. S. 53—54).

10. u. ff. (C. 30) Thermometer und (C. 62) Barometer.

30. (C. 104 und Tome III. C. 7.) Periodische Schraubenfehler (vgl. unseren früheren § 6. S. 48—50).

31. (C. 118 und Tome V. Seite 47) Fortschreitende Schraubenfehler.

§. 9. Ältere Basis-Messungen.

Die ersten Basis-Messungen waren nichts anderes als Linien-Messungen im wesentlichen von ähnlicher Art, wie sie der Landmesser mit Messlatten heute noch macht, jedoch mit besonderer Sorgfalt ausgeführt.

So begann Snellius 1615 (vgl. unseren Band I. 4. Aufl. 1895, S. 478); und auch die Franzosen massen im 17. und auch noch im 18. Jahrhundert mit hölzernen Latten.

Ähnliche Messungen kamen in Deutschland auch noch in diesem Jahrhundert vor; so berichtet z. B. Benzenberg aus dem Jahre 1805 in dem Buche „Über das Cataster", Bonn 1818, S. 20—21: „Die Standlinien wurden mit hölzernen Messstangen gemessen, die 12 Fuss lang waren, mit Ölfarbe angestrichen und an beiden Seiten mit Kupfer beschlagen. Diese wurden über kleine Brücken gelegt, die in eine Länge von 1000 Fuss durchs Feld gebaut wurden, und auf denen sich eine viermalige Messung fortsetzte, während dass hinten die Brücken abgebrochen und vorne wieder angebaut wurden. 22 Feldmesser wurden bei der Messung der Standlinien gebraucht."

Folgendes sind Benzenbergs Angaben für die 4malige Messung bei Mündelheim, wobei wir sogleich die Reduktion in Metermass und eine Genauigkeits-Berechnung zufügen:

	Fuss	Zoll	Linien	Meter	v	v^2
1.	24062	1	8,1	= 7551,9867	+ 14,9mm	222
2.	24062	1	5,0	= 7551,9799	+ 21,7	471
3.	24062	3	3,6	= 7552,0292	— 27,6	762
4.	24062	2	7,1	= 7552,0107	— 9,1	83
Mittel	24062	2	3	= 7552,0016		1538 = $[v^2]$

Man berechnet hieraus:

Mittlerer Fehler einer Messung:

$$m = \sqrt{\frac{1538}{3}} = \pm 22{,}6^{mm}$$

Mittlerer Fehler des Mittels aus allen 4 Messungen:

$$M = \frac{m}{\sqrt{4}} = \pm 11.3^{mm}$$

Mittlerer Fehler einer Messung von 1km Länge:

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{7.552}} = \pm 8{,}2^{mm} \qquad (1)$$

Diese Genauigkeits-Angaben beziehen sich *nur* auf die unregelmässigen, durch die Handhabung der Stangen und etwaige Änderungen derselben während der Messungen erzeugten Fehler; einseitig wirkende Fehler und namentlich die Unsicherheiten der Latten selbst sind hier *nicht* mitgerechnet.

Trotzdem schien es nicht unzweckmässig, an diesem, wie es scheint, zuverlässigen Beispiele zu zeigen, wie genau man mit den einfachsten Mitteln im Felde messen kann, wenn man gute Messungs-Unterlagen hat.

Die Schweizer Basis bei Aarberg von 1880 ist von *Koppe* auch mit gewöhnlichen 5 Meter-Latten längs gespannter Schnüre gemessen worden, wobei sich für 1^m der mittlere unregelmässige Fehler $\pm 0{,}28^{mm}$ fand, also für eine Messung von 1^{km} der mittlere Fehler:

$$m_1 = 0{,}28 \sqrt{1000} = \pm 8{,}9^{mm} \tag{2}$$

(vgl. Koppe: „Der Basis-Apparat des General Ibanez und die Aarberger Basismessung", Zürich 1881, S. 7—8).

In jüngster Zeit ist eine wertvolle Untersuchung dieser Art gemacht worden, indem *Reinhertz* die Bonner Basis mit gewöhnlichen Messlatten und Stahlbändern nachgemessen hat. Die Vergleichungen der so erhaltenen Ergebnisse unter sich und mit den feinen geodätischen Messungen des geodätischen Institutes und der Landesaufnahme (welche bereits in unserem I. Band, 4. Aufl. 1895, S. 514 kurz erwähnt sind) gaben sehr überraschende Resultate betreffs der verhältnismässig grossen Genauigkeit der gewöhnlichen Latten- und Band-Messung, und betreffs der im wesentlichen proportional den Längen auftretenden Fehler-Fortpflanzung. Reinhertz hat über seine Messungen berichtet auf der 19. Hauptversammlung des deutschen Geometervereins in Bonn 1895 („Zeitschr. f. Verm." 1895, S. 508) und der ausführliche Bericht wird in der „Zeitschr. f. Verm." Anfang 1896 gegeben.

Nach diesen Bemerkungen über das Messen mit gewöhnlichen Messlatten, geben wir eine kurze Darlegung der Entwicklung der Basismessungs-Verfahren zunächst von den französischen Messungen im 17. und 18. Jahrhundert bis zum Anfang dieses Jahrhunderts.

Picard wandte 1669 4 hölzerne je 2 Toisen lange Massstäbe an, die er mit Hilfe von Schrauben zu 2 je 4 Toisen langen Messlatten verband. Diese legte er unmittelbar eine vor die andere auf den (horizontalen) Boden. Da sie im Querschnitt rund, und leicht von Gewicht waren, so war eine Verschiebung auf dem Boden kaum zu vermeiden. (La Condamine, Mesure des trois premiers degrés u. s. w. S. 249).

Bei den Gradmessungen in Peru und Lappland (1736) wurden ebenfalls hölzerne Latten, und zwar deren *drei* zusammen angewendet. Dieselben waren 15 oder 20 Fuss lang, 2 Zoll breit, $1^1/_2$ Zoll dick und mit Eisen beschlagen; sie wurden auf je zwei Stützen, jede einzeln horizontal, gelegt. (La Condamine S. 250.)

Bei der im Jahre 1739 vorgenommenen Nachmessung der Picardschen Basis von Juvisy bediente sich Cassini zum erstenmal metallener Massstäbe, nämlich 4 eiserner Stäbe, deren Temperatur-Ausdehnung er aus Quecksilber-Thermometerangaben ermittelte. (La Condamine S. 251.)



Der englische General *Roy* mass im Jahre 1784 eine Grundlinie bei Hounslow-Heath, zwischen London und Greenwich, 7 530^m lang, mehrmals mit verschiedenen Hilfsmitteln:

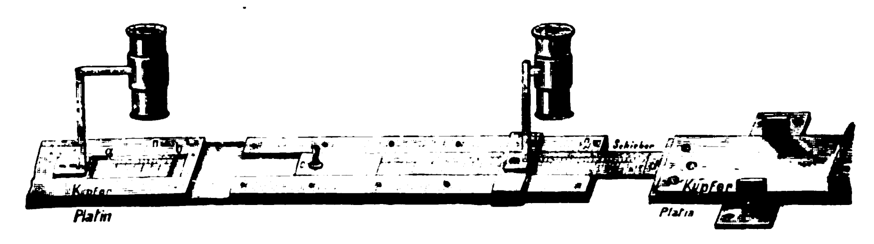
erste Messung mit einer Kette	. . .	27 408,22 Fuss
zweite „ „ Holz-Massstäben	. .	27 406,60 „
dritte „ „ Glasröhren	. . .	27 404,72 „

Ferner im Jahre 1787 eine Basis bei Romney-Marsh wieder mit der Kette, 28 532,92 Fuss, und 1794 bei Salisbury 36 574,4 Fuss.

Doppelmetall-Stange von Borda.

Den Übergang von der unvollkommenen Temperatur-Bestimmung Cassinis („le thermomètre à la main") zu der heute noch in Gebrauch befindlichen Verbindung zweier *verschiedener* Metalle zu einer Messstange fand *Borda*, dessen aus Platin und Kupfer zusammengesetzte Stäbe bei der grossen französischen Gradmessung von 1792 u. ff. von Delambre und Méchain angewendet wurden.

Fig. 1.
Platin-Kupfer-Stange von Borda.
(Platinstab 12 Fuss lang, 6 Linien breit, 1 Linie dick.)



Wir geben in Fig. 1. die Zeichnung der Borda schen Stangen nach „Puissant, traité de géodésie", 2me édition, Paris 1819, I. S. 203—207. Die eigentliche Messstange ist von Platin, 2 Toisen = 12 Fuss = 3,898^m lang, 6 Linien = 18,5^{mm} breit und 1 Linie = 2,3^{mm} dick. Auf dieser Platinstange befindet sich eine Kupferstange, und zwar am linken Ende mit der Platinstange fest verbunden, während das rechte Kupfer-Ende sich frei ausdehnen kann, und etwa 0,16^m vom rechten Ende entfernt, mit einer Teilung ab und Nonius n in seiner Stellung gegen das Platin abgelesen wird. Die so gemachten Ablesungen geben nun das Mass für die Ausdehnung, denn da Platin den Ausdehnungs-Coëfficient $\alpha = 0{,}000\,0089$ und Kupfer $\alpha' = 0{,}000\,0172$ (für 1° C.) hat, also α' etwa das Doppelte von α ist, lässt sich aus der Ausdehnungs-*Differenz* die Ausdehnung des Platins selbst berechnen. (Wir werden dieses bei den Bessel schen Stangen mit Eisen und Zink in § 11.—12. ausführlicher behandeln.)

Ausser dem Temperatur-Massstab ab zeigt Fig. 1. noch einen Massstab an dem Schieber cd, welcher dazu dient, den Zwischenraum je zweier aufeinander folgender Stangen ohne Stoss zu messen.

Solcher Stangen wie die hier beschriebene wurden je 4 zusammen auf Stativen mit Mikrometer-Schrauben eingerichtet; die Stangen-Neigungen wurden durch Libellen und Gradbogen bestimmt, und in Rechnung gebracht.



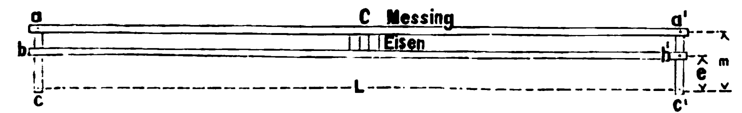
Mit diesen Borda schen Stangen sind (nach den Verh. d. 5. allg. Konf. d. Eur. Gr., Gen.-Ber. für 1877, S. 40) 7 Grundlinien gemessen worden, nämlich:

1798	Grundlinie	bei	Melun	11 842^m
„	„	„	Perpignan	11 706
1804	„	„	Ensisheim	19 044
1818	„	„	Brest	10 527
1826	„	„	Bordeaux	14 119
1827	„	„	Gourbera	12 220
1828	„	„	Aix	8 067

Colby s Kompensations-Stangen.

Eine sinnreiche Anwendung des Grundgedankens der aus zwei verschiedenen Metallen zusammengesetzten Basismessstangen hat der englische General *Colby*, etwa um 1827, gemacht, indem er zwei Ausdehnungen von Eisen und Zink einander gegenseitig aufheben liess, so dass der Apparat selbstthätig kompensierend wird.

Fig. 2.
Colby s Kompensations-Stange.
(Länge = 10 Fuss = 3,048 *m*.)



Nach Andeutung von Fig. 2. hat man eine Messing-Stange und eine Eisen-Stange in der Mitte bei C fest verbunden, so dass sich die Enden links a und b, rechts a' und b' frei ausdehnen können. Nun sind Hebel $a\,b\,c$ und $a'\,b'\,c'$ angebracht in den Verhältnissen:

$$\frac{a\,c}{b\,c} = \frac{a'\,c'}{b'\,c'} = \frac{m}{e}$$

wo m und e die Ausdehnungs-Coëfficienten für Messing und Eisen sind (etwa $m =$ 0,000 019 und $e = 0{,}000\,011$ für 1° C.). Nun ist leicht einzusehen, dass der zwischen c und c' gemessene Abstand L unabhängig von den Ausdehnungen ist.

Solcher Stangen in Holzkästen wurden 6 zusammen angewendet, und die Zwischenräume der Stangen wurden mikroskopisch gemessen.

Mit diesem Apparat wurden 2 Linien in England gemessen: Longh Foyle, nördl. Irland, 1827, 41 641 Fuss, und Salisbury, westl. von London, 1849, 34 841 Fuss; ferner 10 Linien in Indien.

Näheres hierüber giebt „Ordnance trig. survey" (vgl. S. 10) S. 200 u. ff. mit Plate II, sowie im Auszug Clarke, Geodesy (vgl. S. 14) S. 163 u. ff.

Für die *Bayerische* Landesvermessung lieferte das mechanische Institut von *Utzschneider* und *Reichenbach* im Anfang dieses Jahrhunderts einen Apparat, welcher aus fünf in hölzernen Kästen eingelegten je 4 Meter langen in polierte Stahlkanten auslaufenden eisernen Stangen bestand. Die Zwischenräume der bei der Messung sich nicht berührenden Stäbe wurden durch stählerne Keile (12^{cm} lang, hinten 6,5^{mm}, vorn 0,5^{mm} dick), die Neigungswinkel durch Libellen, und die Temperatur durch auf den Stangen ruhende Thermometer bestimmt (Generalbericht der Europ. Gradmessung 1867, S. 25). Die genaue Beschreibung und Zeichnung dieses Reichenbach schen Apparates

findet sich in dem Werke: „Die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage", München 1873, S. 3—65.

Ähnlich diesem Reichenbach schen Apparat, in einzelnen Teilen noch sinnreicher ausgedacht, war Schwerds Apparat, den er beschrieben hat in dem Werke: „Die kleine Speyerer Basis" u. s. w. Speyer 1822.

Der Württembergische Basis-Apparat von Bohnenberger.

Auch dieser Apparat ist grösstenteils nach dem Reichenbach schen Muster unter Bohnenbergers Leitung im Jahr 1818 gearbeitet (s. „Die Landesvermessung des Königreichs Württemberg", herausgegeben von Kohler. Stuttgart 1858, S. 45).

Die schon 1792 von Borda erfundene Verbindung zweier Metalle zur Bestimmung der Temperatur-Ausdehnung kam bei dem Reichenbach schen und Bohnenbergerschen Apparat nicht zur Verwendung, sondern es wurden nur gewöhnliche Thermometer benützt.

Die Messstangen sind je 2 Toisen lang, 32 Pfund schwer und „genau nach der Peru-Toise auf 13° R. reguliert" (hierüber haben sich später Bedenken erhoben).

Fig. 3.
Eiserne Messstange in einem Holzkasten.

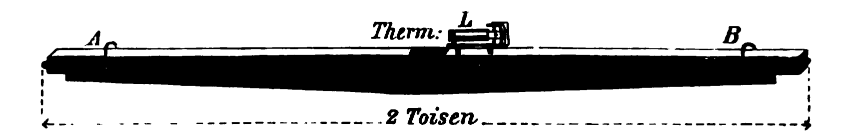
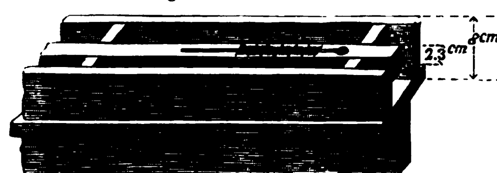


Fig. 4.
Eiserne Stange mit Thermometer im Holzkasten.

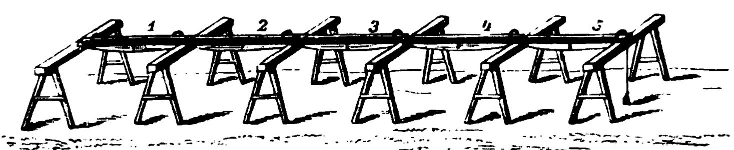


Der Querschnitt der Stangen ist ein Quadrat von 2,3cm Seite. Jede Stange endigt einerseits in eine horizontale, andererseits in eine vertikale Schneide. Die Stangen sind in hölzerne Gehäuse eingeschlossen, wobei jedoch die Schneiden beiderseits hervorragen. Die Gehäuse haben unten Verstärkungsrippen *F* und oben Handhaben *A B* (Fig. 3.). In jede Stange ist ein Thermometer eingelassen (Fig. 4.), welches mittelst einer durch Glas verschlossenen und beim Nichtgebrauch bedeckten Öffnung in dem Holzgehäuse beobachtet werden kann. Bei *L* ist eine Libelle mit Gradbogen angebracht.

Der Messkeil ist von gehärtetem Stahl, abgesehen von der Handhabe ist er 12cm lang, 5mm breit, vorn 0,5mm und hinten 6,2mm dick.

Die Messungsbrücke bestand aus einfachen hölzernen Böcken.

Fig. 5.
Messungs-Brücke.



Die Basis Solitude-Ludwigsburg von 6687 Toisen oder rund 13 Kilometer Länge wurde in der Zeit vom 18. September bis 12. Oktober 1820 in 19 Arbeitstagen einmal gemessen.

Weiteres und Ausführlicheres über die älteren Basismess-Apparate giebt *Westphal* „Basisapparate und Basismessungen“, Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1885, S. 257—274, S. 333—345, S. 373—385, S. 420—432. Ferner 1888, S. 189—203, S. 225—236, S. 337—346.

Reduktion einer Basislänge auf den Meereshorizont.

Ausser den Reduktionen für Temperatur, Stangenneigung, Zwischenräume u. s. w., welche bisher erwähnt worden sind, hat man bei Basismessungen, um sie unter sich trigonometrisch vergleichbar zu machen, auch noch die Reduktion auf dem Meereshorizont (bzw. auf *N. N.*) anzubringen.

Wenn h das arithmetische Mittel der Höhen der einzelnen Stangenlagen über dem Vergleichs-Horizont ist, und r der Erdkrümmungs-Halbmesser, wenn ferner B die Summe der horizontalen Stangenlagen und B_0 deren centrale Projektion auf den Horizont ist, so besteht die Beziehung:

$$\frac{B}{B_0} = \frac{r+h}{r} = 1 + \frac{h}{r}$$

oder auch hinreichend genähert:

$$B - B_0 = B\,\frac{h}{r}$$

Zur Übersicht geben wir hiezu einige Zahlenwerte:

h	$log\left(1+\frac{h}{r}\right)$	h	$log\left(1+\frac{h}{r}\right)$	
0^m	0.0000000·0	500^m	0.0000340·3	Differenz
100	68·1	600	408·4	68·1
200	136·1	800	544·5	für 100^m
500	340·3	1000	680·6	

Für die Basislänge $B = 1000^m$ und die Höhe $h = 100^m$ beträgt die Reduktion — $0{,}0157^m$.

§ 10. Der Bessel sche Basis-Mess-Apparat.

Als Bessel im Jahre 1834 zu seiner „Gradmessung in Ostpreussen“ einen Basis-Mess-Apparat bauen liess, standen ihm die Erfahrungen von Borda, Reichenbach, Repsold, Schwerd u. A. zu Gebote (Platin und Kupfer, Messkeil u. s. w.).

Bessel hat zu diesen Erfahrungen sein eigenes Verständnis hinzugefügt, er hat alle Einrichtungen und Berechnungen so scharfsinnig erdacht und so folgerichtig durchgeführt, dass der Apparat immer als klassisches Beispiel gelten wird, obgleich er natürlich jetzt nach 60 Jahren nicht mehr der beste sein kann.

Mit dem Bessel schen Apparat sind bis jetzt 14 Grundlinien gemessen worden, nämlich 1) bei Königsberg 1834, 2) Kopenhagen 1838, 3) Upsala 1840, 4) Berlin 1846, 5) Bonn 1847, 6) Lommel in Belgien 1851, 7) Ostende 1853, 8) Strehlen in Schlesien 1854, 9) Braak in Holstein 1871, 10) Grossenhain in Sachsen 1872, 11) Ensisheim im Elsass 1877, 12) Göttingen 1880, 13) Meppen 1883, 14) Bonn, Neumessung 1892.



Obgleich der Apparat bei allen diesen Messungen in seinen Hauptteilen derselbe geblieben ist, und obgleich damit die Art der Basismessung einen gewissen konservativen Charakter angenommen hat, ist doch auch hier die Wissenschaft nicht stehen geblieben; seit der Braaker Basis ist die Art der Massvergleichung und die Ausführung der Messung (z. B. die Ablotung) gegen früher stetig vervollkommnet worden, und vor der Göttinger Messung hat der Chef der trigonometrischen Abteilung, *Schreiber*, den (1830 mit den rohesten technischen Hilfsmitteln hergestellten) Apparat und alle Einzelheiten seiner Anwendung eingehender Kritik unterworfen, woraus die drei letzten Messungen bei Göttingen, Meppen und Bonn hervorgegangen sind, welche zur Zeit als die beste Ausnützung des Bessel schen Gedankens zu betrachten sind.

Wir geben im Folgenden die Beschreibung und die wichtigsten Zeichnungen des Apparates, teils nach der ersten Mitteilung von Bessel selbst („Gradmessung in Ostpreussen", S. 1—51 und Tafel I—V), teils nach den vor Göttingen angebrachten Verbesserungen.

Der Bessel sche Basis-Mess-Apparat.

(Darstellung in natürlicher Grösse.)

Fig. 1.
Ansicht der Stangen-Enden (Anordnung von 1834).
E = Eisen, Z = Zink, St = Stahl, T = Tragstange, R = Rollen.

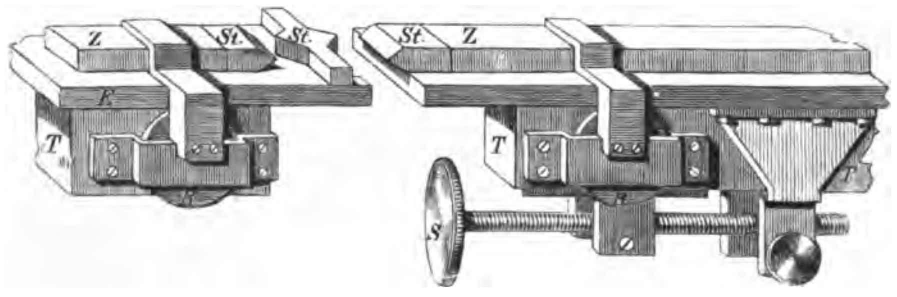


Fig. 2.
Querschnitt der Stangen mit Massen in Pariser Linien (1 Par. Linie = 2,26 *mm*). (Anordnung von 1834.)

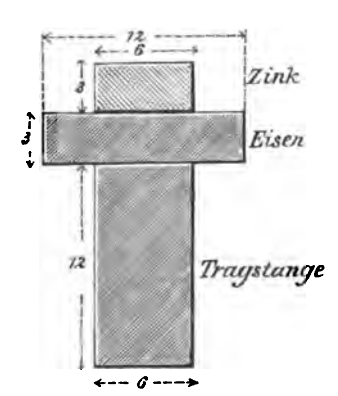


Fig. 3.
Einweis-Scheibe $E\ E$ mittelst des Rahmens R auf das vordere Stangenende aufgeschraubt. (Anordnung von 1880.)

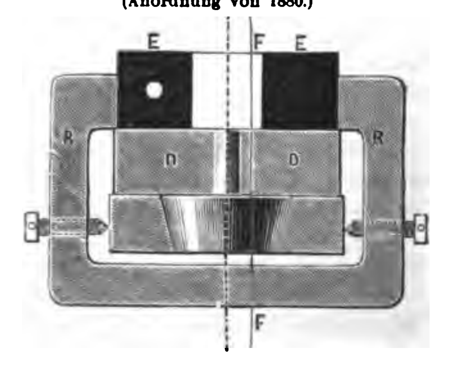


Fig. 4.

Vorderes und hinteres Stangen-Ende (Anordnung von 1880) im Längsschnitt und im Grundriss (natürl. Grösse).

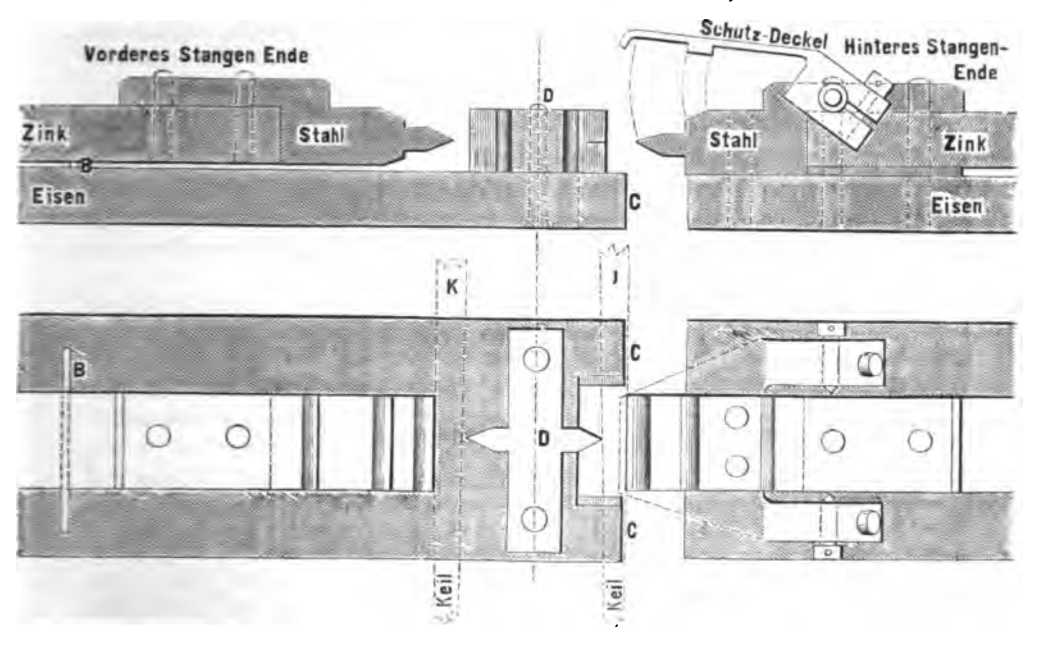


Fig. 5.

Der gläserne Messkeil (natürl. Grösse).

(20 = 2 Par. Linien = 4,5 *mm*   8 = 0,8 Par. Linien = 1,8 *mm*)

(Ordinaten-Differenz, zwischen 2 Strichen, = 0,01 Par. Linien = 0,0226 *mm*.)

I. Die Messstangen.

Es werden 4 Messstangen zusammen gebraucht, jede Messstange ist $3{,}898^{m}$ (= 2 Toisen) lang, 27^{mm} breit und 7^{mm} dick. Dieses bezieht sich auf die eigentliche *eiserne* Messstange, auf welcher aber eine zweite, halb so breite *Zink*-Stange aufliegt, wie aus dem Querschnitt Fig. 2. zu ersehen ist.

Die Zinkstange ist an dem einen Ende mit der Eisenstange fest verbunden, im übrigen liegt sie frei auf und kann sich gegen die Eisenstange ausdehnen. Die horizontale Fuge zwischen Eisen und Zink gab aber zu Reibungen Veranlassung, und deswegen wurde diese Fuge später auf etwa 1^{mm} erweitert, und durch kleine Rollen ausgefüllt, welche in Fig. 4. links durch *B* angedeutet sind.

Da die flachen Eisen- und Zinkstangen sich auf eine Länge von nahe 4^{m} nicht freitragen könnten, ist ihnen eine Tragstange hochkantig unterlegt, jedoch durch Vermittlung von mehreren Rollenpaaren, nach Andeutung von Fig. 1. Die Bewegung auf den Rollen ist aber nur eine geringe, und wird durch die Mikrometer-Schraube *S* (wie an der Alhidade eines Theodolits) geregelt.

Die Holzkästen, in welche die Stangen eingelegt werden, sind in unseren Figuren S. 68 und 69 nicht gezeichnet, sie sind etwa 23^{cm} breit und ebenso hoch.

Libellen sind auf den 4 Stangen zur Neigungs-Bestimmung angebracht. Gewöhnliche Quecksilber-Thermometer wurden mit in die Kästen gelegt, obgleich sie neben der Zink- und Eisen-Verbindung nicht unbedingt nötig sind, und nur ausnahmsweise abgelesen wurden.

Aus den erwähnten Holzkästen ragen nun die Stangen nur mit ihren Enden hervor. Fig. 1. zeigt zwei Stangen-Enden und man erkennt daraus die Art des Aneinanderlegens der Stangen. Es endigt nämlich die linke Stange in eine vertikale Stahlschneide, und die rechte Stange in eine horizontale Stahlschneide, und diese beiden Schneiden werden einander so nahe gebracht, dass der übrig bleibende Zwischenraum durch einen Messkeil gemessen werden kann.

Fig. 4. zeigt die neuere Anordnung der Stahlschneiden und deren Verbindung mit den Eisen- und Zinkstangen. Dabei wurden auch die horizontalen Schneiden der 4 Stangen mit gelenkartig niederzuklappenden Schutzdeckeln versehen, wodurch dem früher nicht seltenen Falle von Beschädigung dieser Schneiden vorgebeugt wird, während die vertikalen Schneiden durch die vorspringenden Enden C der darunter befindlichen Eisenstangen schon genügend geschützt sind. (Der Schutzdeckel ist in dem Grundriss von Fig. 4. nur teilweise gezeichnet, indem dessen linker Teil nur punktiert angedeutet ist, damit die darunter liegende horizontale Schneide nicht dem Anblick entzogen wird.)

Die auf jeder Eisenstange aufliegende *Zinkstange* ist am einen (linkseitigen) Ende durch Schrauben und Lötung mit der Eisenstange verbunden, von diesem Ende bis zum andern Ende ist sie ohne Verbindung mit der Eisenstange. Auf der entgegengesetzten (rechten) Seite endigt die Zinkstange in eine horizontale Stahlschneide, deren jeweiliger Abstand von einer vertikalen, auf der Eisenstange befestigten Stahlschneide durch einen horizontal eingeschobenen Keil gemessen wird.

Hier ist auch noch die kleine Einweis-Scheibe $E E$ Fig. 3. S. 68, zu erwähnen, welche mittelst eines umgreifenden Rahmens R an dem rechtseitigen Ende D jeder Stange befestigt ist. Von dieser Scheibe mit ihren drei schwarzen und weissen Feldern wird bei der Geradrichtung der Basis weiter die Rede sein.

II. Die Messkeile.

Die bei der Göttinger Messung 1880 gebrauchten Glaskeile sind in Fig. 5. S. 69 in natürlicher Grösse gezeichnet.

Die Zunahme der Keildicke von einem Strich zum folgenden ist = 0,01 Pariser Linien, und da man noch 0,1 des Intervalls schätzen kann, so hat man Ablesungen von 0,001 Linien für die Keildicken (0,001 Par. Linien = 2,256$^{\mu}$).

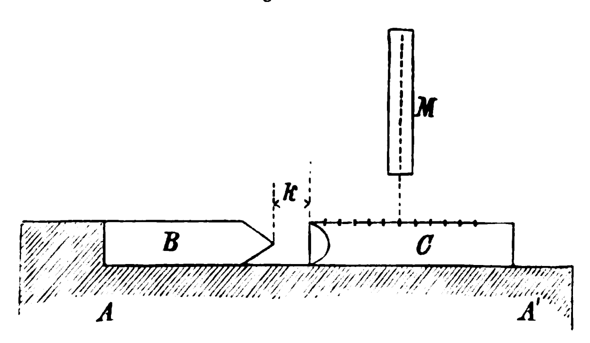
Die Bestimmung der Keildicken geschah durch eine Einrichtung, welche durch die schematische Fig. 6. S. 71 angedeutet ist.

Auf einer festen Unterlage $A A'$ befindet sich ein Cylinder B mit horizontaler Schneide befestigt, und ein zweiter Cylinder C, welcher der horizontalen Schneide des Cylinders B eine vertikale Schneide gegenüberstellt, ist auf dieselbe Unterlage $A A'$ beweglich aufgelegt. Dieser bewegliche Cylinder C trägt auf seiner oberen Fläche eine Teilung, welche durch ein lotrecht darüber angebrachtes Mikroskop M abgelesen



werden kann. Man schiebt den Cylinder *C* mit seiner Schneide gegen den Cylinder *B* berührend an und liest die Teilung auf *C* am Faden des Mikroskopes ab; zieht man dann den Cylinder *C* ein wenig zurück, und füllt den Zwischenraum *k* zwischen den beiden Schneiden durch den zu untersuchenden Messkeil aus, wobei eine zweite Ablesung auf *C* gemacht wird, so ist die Differenz der Ablesungen auf *C* gleich der betreffenden Keildicke *k*.

Fig. 6.
Bestimmung der Keildicken *k*.



Auf diese Weise wurde jeder Keil an mehreren Stellen in Bezug auf seine Dicke untersucht, es zeigte sich, dass die Keildicken auf 0,01 Linien genau proportional den Keillängen waren, dass also die Keilflächen bis zu dieser Genauigkeit eben geschliffen waren. Nach diesen Bestimmungen, welche in Fig. 6. angedeutet sind, wurden Tabellen angelegt, aus denen für jede Keilablesung die zugehörige Keildicke entnommen werden kann.

Die Messkeile dienen zwei verschiedenen Zwecken: erstens werden damit die Zwischenräume zwischen je zwei Stangen-Enden gemessen (Keil *J* Fig. 4. S. 69) und zweitens werden damit die Verschiebungen der Zinkstangen gemessen (Keil *k* Fig. 4. S. 69.)

Die ganze Einrichtung von Zink und Eisen mit Keilmessung ihrer Differenz nennt man auch „Metall-Thermometer."

III. Die Messungs-Brücke.

Als Auflager für die Stangenkästen benützte Bessel kleine hölzerne Böcke, welche jedoch nicht geradezu auf den Boden gestellt wurden, sondern es wurden zuerst je drei 20^{cm} lange eiserne Nägel in den Boden geschlagen, darauf ein Brett gelegt und darauf ein Bock gestellt, der ausserdem mit etwa 50^{kg} belastet wurde, um seine Standesfestigkeit zu erhöhen.

Auf je zwei Böcke wurden dann die einzelnen Stangenkästen aufgelegt und sowohl nach der Höhe, als der Quere nach, eingerichtet. Dieses Einrichten geschah von der Königsberger Messung 1834 bis zur Braaker Messung 1871 von freier Hand, und war daher sehr mühsam. Nach den Erfahrungen von Braak wurden die hölzernen Böcke mit Kurbelschrauben versehen, zum raschen mikrometrischen Regulieren der Höhen sowohl als auch der Geradrichtung. Diese verbesserten Böcke sind seitdem bei Grossenhain in Sachsen und bei Oberhergheim im Elsass mit Vorteil gebraucht, zur Basismessung bei Göttingen und Meppen aber durch neue, aus Schmiedeeisen kon-

struierte Böcke ersetzt worden. Die hölzernen Unterlagsbretter und die eisernen 20cm tief in den Boden einzuschlagenden Nägel, auf welchen diese Bretter ruhen, blieben dieselben wie bei Bessel. („Gradm. i. Ostpr.“ Tafel IV.)

Wegen der Standfestigkeit ist die Auflegung der Stangen so *nieder* als möglich gehalten. Die Böcke sind nur 0,63m hoch, so dass mit Zurechnung der Unterlagsbrettdicke und der halben Kastenhöhe die Stangenschneiden nur 0,77m über dem Erdboden zu liegen kommen, was gerade noch Handhabung und Ablesung der Keile ohne zu unbequeme Körperlage gestattet.

§ 11. Massbestimmungen des Besselschen Apparates.

I. Das Metall-Thermometer.

Wir betrachten zunächst das Metall-Thermometer in seiner einfachsten Gestalt (Fig. 1.). Eine Eisenstange von der Länge l und eine Zinkstange von der Länge l' werden so aufeinander gelegt, dass die linkseitigen Enden zusammentreffen, dann ist der Abstand k der beiden rechten Enden die Angabe des Metall-Thermometers.

Fig. 1. Metall-Thermometer.

Bei irgend welcher Temperatur wird $l = l'$ werden, und die gemeinsame Länge beider Stäbe sei in diesem Falle $= L$. Zählt man nun die Temperatur t' von jenem Stand rückwärts, nennt e und z die Ausdehnungs-Coëfficienten von Eisen und Zink, so ist:

$$l = L(1 - e\,t') \qquad l' = L(1 - z\,t') \tag{1}$$

Die Differenz ist:

$$l - l' = L(z - e)\,t' = k \tag{2}$$

Durch Elimination von t' erhält man:

$$l = L - \frac{e}{z - e}\,k \tag{3}$$

Den relativen Ausdehnungs-Coëfficienten, welcher hier Coëfficient von k ist, bezeichnen wir mit m, d. h.:

$$\frac{e}{z - e} = m \tag{4}$$

und damit haben wir:

$$l = L - m\,k \tag{5}$$

Eine Gleichung von der Form (5) gilt für jede der 4 Stangen.

Dürfte man auf die *Gleichheit* der Ausdehnungen bei allen 4 Stangen (die aus einem Stück geschnitten sind) rechnen, so wären die Ausdehnungs-Coëfficienten e und z, für Eisen und Zink als konstant zu betrachten. Bessel nimmt jedoch für jede Stange besondere Werte e und z, also auch einen besonderen Wert m an, und demnach bestehen entsprechend (5) für die 4 Stangen folgende 4 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= L_1 - k_1\,m_1 \\ l_2 &= L_2 - k_2\,m_2 \\ l_3 &= L_3 - k_3\,m_3 \\ l_4 &= L_4 - k_4\,m_4 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

wo k_1, k_2, k_3, k_4 die Keilmasse der Metall-Thermometer der 4 Stangen bedeuten.



Für die Längen L_1, L_2, L_3, L_4 werden andere Formen eingeführt:

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = L + x_1 \\ L_2 = L + x_2 \\ L_3 = L + x_3 \\ L_4 = L + x_4 \end{array}\right\} \tag{7}$$

dabei sind x_1, x_2, x_3, x_4 die Korrektionen, welche an einem gemeinsamen Wert L noch anzubringen sind. Dieser Wert L ist willkürlich; man kann deswegen z. B. L als arithmetisches Mittel der 4 Werte L_1, L_2, L_3, L_4 annehmen, also:

$$L = \frac{L_1 + L_2 + L_3 + L_4}{4} \tag{8}$$

und damit wird für die Korrektionen x die Bedingung erhalten:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \tag{9}$$

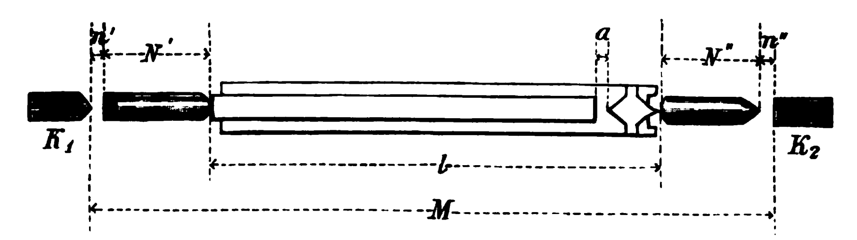
damit gehen die Gleichungen (6) über in die folgenden:

$$\begin{array}{rl} & l_1 = L + x_1 - k_1 m_1 \\ & l_2 = L + x_2 - k_2 m_2 \\ & l_3 = L + x_3 - k_3 m_3 \\ & l_4 = L + x_4 - k_4 m_4 \\ \text{Mittel:} & l = L \qquad - k m \end{array} \tag{10}$$

Hier hat L für das Mittel aus allen 4 Stangen dieselbe Bedeutung, wie L_1, L_2, L_3, L_4 nach (6) für die einzelnen Stangen.

II. Gegenseitige Vergleichung der 4 Stangen. Bestimmung der x und m.

Fig. 2.
Stangen-Vergleichung.



In Fig. 2. bedeuten K_1 und K_2 zwei möglichst unveränderliche, auf gemeinsamer Unterlage befestigte Stahlkeile, welche zum Zweck des scharfen Anstossens in Schneiden endigen. Der Abstand M der Schneiden ist etwas grösser als die Stangenlänge l, so dass zum Ausfüllen ausser der Stange l noch zwei Cylinder N' und N'' und die Keilmasse n' und n'' nötig sind. (Die Ausfüll-Cylinder N' und N'' sind nur aus Gründen der Bequemlichkeit angebracht und für das Prinzip des Apparates unwesentlich.) Denkt man sich nun die Stange Nr. 1 in den Vergleich-Apparat Fig. 2. eingelegt, so erhält man eine Gleichung:

$$M = l_1 + (N' + N'') + (n_1' + n_1'' \tag{11}$$

Es ist aber nach (10):

$$l_1 = L + x_1 - k_1 m_1 \tag{12}$$

Nun wird, um alles Gleichartige zusammenzufassen, gesetzt:

$$\left.\begin{array}{r} M-(N'+N'')-L=C \\ n_1'+n_1''=n_1 \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Damit erhält man aus den zwei vorhergehenden Gleichungen (11) und (12) die folgende:

$$n_1 = C - x_1 + k_1\, m_1 \qquad (14)$$

Wenn man nach einander die 4 Stangen einlegt, so erhält man entsprechend (14) folgende 4 Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} 0=-n_1+C-x_1+k_1\, m_1 \\ 0=-n_2+C-x_2+k_2\, m_2 \\ 0=-n_3+C-x_3+k_3\, m_3 \\ 0=-n_4+C-x_4+k_4\, m_4 \end{array}\right\} \qquad (15)$$

Z. B. gaben die 4 ersten solchen Vergleichungen folgende erste Gruppe von Gleichungen dieser Art, mit eingesetzten Beobachtungswerten:

$$\text{Gruppe I.}\quad \left.\begin{array}{l} 0=-3{,}9693+C_1-x_1+1{,}8960\, m_1 \\ 0=-3{,}8600+C_1-x_2+1{,}9957\, m_2 \\ 0=-3{,}4875+C_1-x_3+1{,}8387\, m_3 \\ 0=-3{,}4506+C_1-x_4+1{,}8377\, m_4 \end{array}\right\} \qquad (16)$$

Alle Keilmasse, z. B. 3,9693 und 1,8960, sind hier in Pariser Linien (= 2,2558^{mm}) gezählt.

Ähnlich wie (16) wurden noch 8 andere Gruppen von Vergleichungen unter möglichst verschiedenen Umständen gewonnen, und die 36 Gleichungen nach der M. d. kl. Q. aufgelöst. Dabei sind folgende Unbekannte zu bestimmen:

1) $C_1\ C_2\ \ldots\ C_9$. für jede Gruppe ein *besonderes* C (nach 13), damit den Änderungen des Apparates von Gruppe zu Gruppe Rechnung getragen wird,

2) $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ mit $x_1+x_2+x_3+x_4=0$, also nur *drei* unabhängige x,

3) $m_1\ m_2\ m_3\ m_4$.

Man hat also in den 36 Gleichungen die Anzahl von $9+3+4=16$ Unbekannten. Die Auflösung nach der M. d. kl. Q. gab die verschiedenen C und ferner:

$$\left.\begin{array}{lll} x_1=-0{,}3015 & \text{Par. Linien} & m_1=0{,}54038 \\ x_2=+0{,}3986 & \text{„} & m_2=0{,}55976 \\ x_3=-0{,}0718 & \text{„} & m_3=0{,}57575 \\ x_4=-0{,}0258 & \text{„} & m_4=0{,}58103 \\ \hline \text{Summe}=0{,}0000 & & \text{Mittel } m=0{,}56422 \end{array}\right\} \qquad (17)$$

und den mittleren Fehler einer Vergleichung:

$$m = \pm\, 0{,}00353 \text{ Par. Linien} = \pm\, 0{,}0080^{mm} \qquad (18)$$

oder relativ:

$$\frac{m}{l} = \frac{0{,}00353}{1728} = 0{,}000\,002 = 2 \text{ Milliontel} \qquad (18a)$$

Diese mittleren Fehler sind hier zunächst reine Rechnungsgrössen, welche nicht alle Fehlerquellen zum Ausdruck bringen.

III. Vergleichung der Stangen mit dem Normalmass.

Da durch die $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ die 4 Stangen bereits unter sich verglichen sind, genügt es, *eine* der 4 Stangen mit dem Normalmass zu vergleichen. Das Normalmass



war eine von ***Arago*** und ***Zahrtmann*** in Paris mit der Peru-Toise verglichene Toise, deren Gleichung ist:

$$T = 863{,}835\,384\,(1 + 0{,}000\,014\,588\,R) = 863{,}999\,205\,\big(1 + 0{,}000\,014\,588(R - 13)\big) \quad (19)$$

wo die Länge in Pariser Linien und die Temperatur R in Réaumur-Graden gemessen ist.

Hiezu nimmt man die Stange Nr. 1, welche nach (10) und (17) die Gleichung hat:

$$l_1 = L - 0{,}3015 - 0{,}54033\,k_1 \quad (20)$$

Legt man diese Stange Nr. 1. und die Toise T nach einander in den Vergleich-Apparat Fig. 2., so erhält man durch die verschiedenen Keilmasse n eine Vergleichung, und eine Beziehung zwischen den Gleichungen (19) und (20), aus welcher eine Bestimmung von L hervorgeht.

Es wurden 12 solcher Bestimmungen gemacht, und im Mittel erhalten:

$$L = 1729{,}1167 \pm 0{,}000\,984 \text{ Pariser Linien} \quad (21)$$

und der mittlere Fehler *einer* solchen Vergleichung

$$\mu_1 = \pm\, 0{,}003\,407 \text{ Par. Linien} = \pm\, 0{,}0077^{mm} \quad (22)$$

oder relativ:

$$\frac{\mu_1}{L} = 0{,}000\,0020 = 2 \text{ Milliontel} \quad (23)$$

$$\frac{0{,}000984}{L} = 0{,}000\,000\,6 = 0{,}6 \text{ Milliontel} \quad (23a)$$

Nun kann man für jede der 4 Stangen ihre Gleichung bilden, nämlich nach (10), (17) und (21):

$$\left.\begin{array}{ll} & l_1 = 1728{,}8152 - 0{,}54033\,k_1 \\ & l_2 = 1729{,}5153 - 0{,}55976\,k_2 \\ & l_3 = 1729{,}0454 - 0{,}57575\,k_3 \\ & l_4 = 1729{,}0909 - 0{,}58103\,k_4 \\ \text{Mittel} & l = 1729{,}1167 - 0{,}56422\,k \\ \text{Allgemein} & l = L - m\,k \end{array}\right\} \quad (24)$$

IV. Vergleichung der Metall-Thermometer und der Quecksilber-Thermometer.

Obgleich die Kenntnis der Temperatur der Messstangen und der Einzel-Ausdehnungen des Eisens und des Zinks, aus welchen sie zusammengesetzt sind, nicht durchaus nötig ist, da ja jede Stangenlänge l nach einer Gleichung von der Form (24) sich als Funktion des inneren Keilmasses k ergiebt, war es doch erwünscht, auch eine Beziehung zwischen den Metall-Thermometer-Keilmassen k und den gewöhnlichen in die Kästen mit eingelegten Quecksilber-Thermometern zu erhalten. Es wurden hiezu bei möglichster Temperatur-Ruhe 160 Vergleichungen angestellt, welche im Mittel für die 4 Stangen gaben:

$$k = 2{,}1249 - 0{,}045489\,R \quad (25)$$

$$\text{oder } R = 46{,}712^\circ - 21{,}983\,k \quad (25a)$$

Dabei ist k das Keilmass, welches für die 4 Stangen einzeln mit k_1, k_2, k_3, k_4 bezeichnet wurde, und R die Angabe des Quecksilber-Thermometers in Réaumur-Graden.

Diesem entspricht folgendes:

$R =$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	46,71°
$k =$	2,125	1,897	1,670	1,443	1,215	0,988	0,760	0,000 Par. L.

(25b)

V. Bestimmung der Einzel-Ausdehnungen von Eisen und Zink.

Wenn man eine Beziehung zwischen dem Keilmass k und der Temperatur t (z. B. in R° oder C°) gefunden hat, von der Form (25) oder allgemeiner geschrieben

$$k = k_0 - p\,t \tag{26}$$

so kann man auch den relativen Ausdehnungs-Coëfficienten m in seine Bestandteile e und z zerlegen. Wir haben nämlich nach (4), (5) und (24):

$$m = \frac{e}{z - e} \qquad l = L - m\,k$$

also wegen (26):

$$l = L - m\,k_0 + m\,p\,t = (L - m\,k_0)\left(1 + \frac{m\,p}{L - m\,k_0}\,t\right) \tag{26a}$$

Daraus giebt sich zu erkennen, dass der Ausdehnungs-Coëfficient e der Eisenstange l ist:

$$e = \frac{m\,p}{L - m\,k_0} = \frac{m\,p}{l_0} \tag{27}$$

und da $z - e = e : m$ ist, hat man nun auch:

$$z - e = \frac{p}{L - m\,k_0} = \frac{p}{l_0} \quad . \tag{28}$$

Hiebei ist $L - m\,k_0 = l_0$ diejenige Stangenlänge l, welche für $t = 0$ stattfindet.

Für die Mittelwerte der Besselschen Stangen haben wir $k_0 = 2{,}1249$ (für t in R°), $m = 0{,}56422$, womit berechnet wird $l_0 = 1727{,}9178$ und insbesondere:

$$e = 0{,}000\,014\,854 \qquad \text{und} \qquad z = 0{,}000\,041\,180$$

Die letzten Stellen dieser Zahlen sind nur genähert richtig, wegen des Einflusses der in Fig. 1. S. 72 vernachlässigten Zwischenstücke D in Fig. 4. S. 69 u. s. w. vgl. unsere 2. Auflage 1878, S. 89—90 Gleichungen (1)—(6).

Nun hat man für die Messstangen *zwei* Arten von Längen-Bestimmungen, erstens mit den Metall-Thermometern nach der Gleichung (24) und zweitens mit den eingelegten Quecksilber-Thermometern nach (26a).

Bessel hat die Königsberger Basis nach *beiden* Arten berechnet, und gefunden, dass die Quecksilber-Thermometer mehr gaben, nämlich:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{für die erste Messung:} & +\,16{,}346' = 20^{mm} \text{ für } 1^{km} \\ \text{für die zweite Messung:} & +\;\;7{,}406' = \;\;9^{mm} \text{ für } 1^{km} \\ \text{Mittel:} & +\,11{,}876' = 15^{mm} \text{ für } 1^{km} \end{array}\right\} \tag{29}$$

Der Grund dieser erheblichen Unterschiede wurde darin gefunden, dass die eingelegten Quecksilber-Thermometer den Temperatur-*Änderungen* Morgens und Abends viel rascher folgen, als die massiven und trägen Eisen- und Zinkstangen. Insofern nun diese Stangen ihr eigenes Thermometer sind, wurde ihren Angaben der Vorzug gegeben und die Quecksilber-Thermometer nicht weiter berücksichtigt.

Die Basis wurde in zwei Abschnitten je zweifach hin und her gemessen, und die Berechnung nach den Metall-Thermometern gab folgendes:

Abschnitt	Messung I.	Messung II.	Differenz d = I—II
s_1	441,1852^m	441,1839^m	+ 1,3^{mm}
s_2	1381,1571^m	1381,1632^m	— 6,1^{mm}
Summe	1822,3423^m	1822,3471^m	— 4,8^{mm}

(30)

VI. Fortgesetzte Mass-Bestimmungen für den Bessel schen Apparat.

In ähnlicher Weise, wie wir im Vorstehenden von der Königsberger Messung beschrieben haben, wurden auch später Mass-Bestimmungen zu den in § 10. S. 67 erwähnten Basis-Messungen gemacht, z. B.:

$$\left.\begin{array}{lll} 1834 & \text{Königsberg} & l = 1729{,}1167' - 0{,}56422\,k \\ 1846 & \text{Berlin} & l = 1729{,}0999' - 0{,}55228\,k \end{array}\right\} \quad (31)$$

Die nicht unerheblichen Änderungen in diesen Zahlen haben zu der Anschauung geführt, dass die Stangen im Laufe der Jahre ihre molekulare Struktur geändert hätten. („Publik. d. geod. Inst. Massvergleichungen" I, 1872, S. 38—46, Bericht von General Baeyer). Doch hat sich das bei näherer Untersuchung nicht bestätigt.

Um das Wesentliche der hierauf bezüglichen Fragen anzuführen, reduzieren wir die verschiedenen Formeln (31) auf den *Mittel*wert $k = 1{,}4$, d. h. wir formen so um:

$$\left.\begin{array}{lll} 1834 & \text{Königsberg} & l = 1728{,}3268' - 0{,}56422\,(k - 1{,}4) \\ 1846 & \text{Berlin} & l = 1728{,}3267' - 0{,}55228\,(k - 1{,}4) \end{array}\right\} \quad (32)$$

entsprechend der Formel $l = \quad L' \quad - \quad m\,(k - 1{,}4)$

Nun sind die Absolutglieder fast gleich geworden, während sie vorher bei (31) um 0,0168 Par. Linien $= 0{,}038^{mm}$ verschieden waren.

Die Absolutglieder in (31) gelten für $k = 0$, was einer Temperatur von etwa 47° *R.* entspricht, welche beim Gebrauche nie vorkommt, und deswegen ist die Form (32) mit dem Mittelwert $k = 1{,}4$, entsprechend einer Temperatur von etwa 16° *R.*, zur sachlichen Vergleichung viel mehr geeignet.

Auch die Änderung der Ausdehnungs-Coëfficienten m, e, z, welche sich z. B. zwischen den Jahren 1834 und 1846 als Verkleinerung von e und z zeigt, kann ohne die Annahme molekularer Änderungen erklärt werden.

Eine Eigentümlichkeit des Apparates besteht auch darin, dass die Abnützung der äusseren Schneiden die Stangen verkürzt, wie immer bei Abnützung von Endmassen, dass aber eine Abnützung der *inneren* Schneiden, zwischen welchen der Temperaturkeil k (Fig. 4. S. 69) eingelegt wird, die Stangen scheinbar *verlängert*. Wenn nämlich dieselbe Stangenlänge l nach der Formel (32) zweifach dargestellt ist

$$l = L' - m\,(k - 1{,}4) \quad \text{oder} \quad = L'' - m\,(k' - 1{,}4)$$

und wenn, durch Abnützung der inneren Schneiden, k' grösser als k ist, so muss auch L'' grösser als L' sein. Wenn also z. B. in (32) die beiden Werte $L' = 1728{,}3268$ und 1728,3267 nach Verlauf von 12 Jahren fast gleich sind, so kann doch die wirkliche Länge l bei einer bestimmten Temperatur durch Abnützung der äusseren Schneiden kürzer geworden sein, wenn gleichzeitig eine noch stärkere Abnützung oder Auseinandertreibung der inneren Schneiden stattgefunden hat.

Man vgl. hierüber „Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft" 1877, S. 150—152, und eine Abhandlung von A. Börsch, „astr. Nachr." 99. Band (1881), Nr 2364. Hierauf bezieht sich auch eine Publikation des königl. preuss. geodätischen Instituts, „die Ausdehnungs-Coëfficienten der Küsten-Vermessung" von Dr. Alfred Westphal, Berlin 1881.

§ 12. Die Göttinger Basismessung.

Wie schon früher in § 10. S. 68 berichtet wurde, zeichnet sich die Göttinger Basismessung vom Jahre 1880 vor den früheren mit dem Bessel schen Apparat ge-

machten Messungen dadurch aus, dass hier zum erstenmal die von General Schreiber vorgenommenen Verbesserungen des Apparates und des Messungs-Verfahrens zur Anwendung kamen.

Verfasser hat damals aktiv an der Basismessung teilgenommen (als Keilleger und Abloter) und hat dadurch umsomehr Veranlassung, diese Messung hier genau zu beschreiben, entsprechend einem bereits in der „Zeitschr. f. Verm." 1880, S. 377—403 veröffentlichten Berichte.

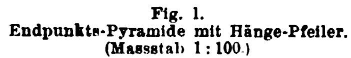
Der amtliche Bericht über die Göttinger Basismessung ist enthalten in dem Werke: Die königliche Landestriangulation, Hauptdreiecke VI. Teil, gemessen und bearbeitet von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme, Berlin 1894 (Hofbuchhandlung Mittler u. Sohn, Kochstr. 68/70) S. 179 u. ff.

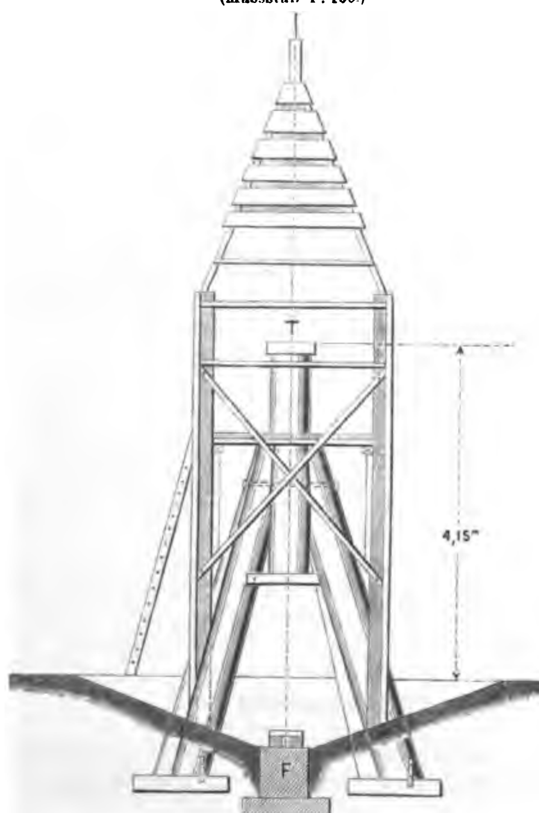
I. Gesamt-Anordnung der Basis.

Das Leinethal, in der Gegend von Göttingen, bildet südlich von dieser Stadt genügend festen und horizontalen Boden östlich der Landstrasse. Nach mehrfachen Erkundungen, welche sich namentlich auf ein günstig zu gestaltendes Basisnetz bezogen, wurde diese Gegend gewählt mit einer 5^{km} langen Linie. Weitere südliche Erstreckung der Basis wäre wohl wünschenswert gewesen, wurde aber durch die Boden-Verhältnisse verhindert.

Das Längenprofil der Basis hat in den ersten zwei Dritteln ziemlich horizontale Erstreckung, während im letzten südlichen Drittel eine Ansteigung bis 31^m über dem Anfang stattfindet. Dort betrugen die Steigungen mehrfach bis zu 3°.

Der nördliche und der südliche Endpunkt werden hinsichtlich ihrer Festlegung und trigonometrischen Bezeichnung durch Fig. 1. veranschaulicht. Die Ablotungen des Instrumenten-Standpunktes T auf den Basispunkt F. beziehungsweise die betreffenden Centrierungen, wurden durch seitlich aufgestellte Theodolite bewirkt, wodurch auch 4 äussere Fundament-Versicherungen beigezogen wurden. Die Länge der Basis wurde vorläufig zu 5193^m bestimmt und dann in 33 meist


Fig. 1.
Endpunkts-Pyramide mit Hänge-Pfeiler.
(Massstab 1 : 100.)

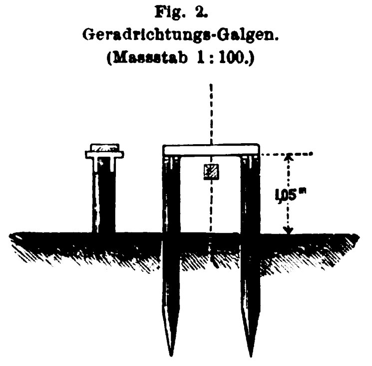


gleiche Teile geteilt durch Anlage von 32 Zwischen-Festlegungen. Hiezu dienten kupferne Bolzen, mit einzusetzenden stählernen in Nadeln endenden Pinnen mit Fundierung in Cement, wie in Fig. 1. unten bei *F* angedeutet ist. Hieraus ergiebt sich der mittlere Wert einer Teilstrecke = 156^{m} = 10 Stangenlagen, während die erste und letzte Strecke etwas länger waren.

II. Gerad-Richtung.

Um die 32 Zwischen-Festlegungen in die Basisrichtung zu bringen, überhaupt um die Basis für die Messung gerade zu stecken, hatte man nach erster vorläufiger Absteckung eine ebenso grosse Zahl von „Galgen" aufgestellt, je 15,6^{m} = 1 Lage, nach Süden von den Festlegungen entfernt. Die technische Rüstung dieser Galgen, mit 1,5^{m} tief eingebohrten und eingerammten Pfählen von 20^{cm} Dicke, zeigt Fig. 2. Die 35^{cm} breiten und 9^{cm} dicken Deckbohlen dieser Galgen dienten bei der durchlaufenden Geradrichtung zum Aufstellen der Theodolite, beziehungsweise der Signalscheiben, beide centrisch über eingeschlagenen Messingpinnen. Zur Auffindung der Lagen für diese Pinnen, d. h. für die eigentliche Geradrichtung wurde im wesentlichen das Verfahren angewendet, Zwischenpunkte durch Messung von 180°-Winkeln einzuschalten, wie wir schon in Band II, 4. Aufl. 1893, S. 693, gezeigt haben.

Fig. 2.
Geradrichtungs-Galgen.
(Massstab 1 : 100.)



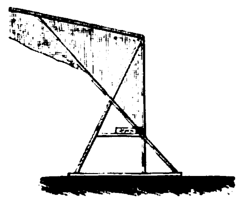
Es wurde zuerst die Mitte gegen die beiden Endpunkte eingerichtet, dann der erste Viertelspunkt gegen den Anfang und die Mitte u. s. w.

Nach dieser Einrichtung aller Galgenpinnen wurde nochmals zur unabhängigen Versicherung eine durchlaufende Winkelmessung über alle Galgen hinweg, je mit Sichtung auf den vorhergehenden und den nachfolgenden Galgen, vorgenommen, woraus sich durch Rechnung ein Polygon von 32 Brechungspunkten zwischen dem 0ten und dem 33ten Punkte ergab, welches eine grösste (westliche) Abweichung von 25^{mm} ergab, was auf 5193^{m} Länge ausser Betracht bleibt.

Zwischen je 2 Galgen wurden noch 4 Pflöcke (in Abständen von 33,2^{m}) geschlagen, zum Spannen einer Schnur, längs welcher die Stangen-Unterlagen vorläufig eingerichtet werden konnten, während die endgiltige Einweisung der Stangen selbst von den Galgen aus, beziehungsweise von Zwischenstationen aus, durch Theodolite besorgt wurde. Dabei dienten Zelte von der Form Fig. 3. zum Schutz gegen die Sonne.

Zum Einweisen der einzelnen Stangen dienten die schon früher in § 10. S. 70 erwähnten, in Fig. 3. Seite 68 rechts gezeichneten Aufsatz-Scheibchen. Wir denken uns, der Einweise-Theodolit sei auf einem Galgen (Fig. 2.) oder einer Zwischenstation aufgestellt, und das vordere Ende einer Stange sei bereits durch Fahnenwinken so genau eingewiesen, dass der Faden des Fernrohrs in das mittlere weisse, 1^{cm} grosse Feld der Scheibe fällt. Genauer wird *nicht* eingewiesen, sondern der noch übrige Rest des Einweisungs-Fehlers wird geschätzt, aufgeschrieben und später in Rechnung ge-

Fig. 3.
Schutz-Zelt.
(Massstab 1 : 100.)



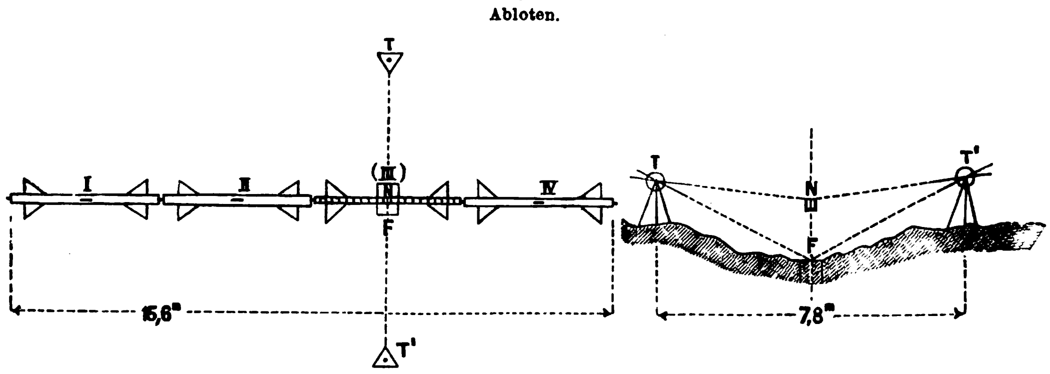
bracht. Wenn zwei aufeinander folgende Stangen-Enden die Ablesungen d und d' geben, so ist die zugehörige Geradstreckungs-Reduktion bekanntlich $= \frac{(d-d')^2}{2l}$, wenn l die Stangenlänge selbst ist ($l = 3{,}95^m$).

Diese Beträge sind immer sehr klein, sie dürfen aber nicht vernachlässigt werden, weil sie sich niemals gegenseitig aufheben, sondern alle in *demselben* Sinne, nämlich vergrössernd wirken. Die ganze Basis hat etwa 1315 Stangen, folglich, wenn man den Wert $\pm 2^{mm}$ als mittlere Stangen-Ausweichung und $0{,}0005^{mm}$ als mittlere Reduktion annimmt, eine Gesamtreduktion etwa $= 1315 \times 0{,}0005 = 0{,}66^{mm}$ oder etwa 0,13 Milliontel der Länge, ein Betrag, der sich aber sofort auf das Vierfache erhöht, wenn die obige kleine Annahme $\pm 2^{mm}$ für 1 Stange auf den doppelten Wert kommt.

III. Ablotungen.

Die Anordnung der zahlreichen Ablotungen, welche an den Endpunkten der Basis, an den Zwischen-Festlegungen und an den Unterbrechungen über Nacht und über Mittag nötig werden, ist von wesentlichem Einfluss auf den Gesamtverlauf der Messung und die Zuverlässigkeit ihrer Resultate. Das unmittelbare mechanische Abloten mittelst Fadenlotes ist wegen der Pendelschwingungen unbequem und ungenau. Viel sicherer vollzieht sich das *optische* Abloten mit Hilfe eines seitlich aufgestellten Theodolits. Dieses wurde schon bei der Braaker Basis angewendet und ist für die Göttinger Basis in die Form gebracht worden, welche wir nun im Anschluss an Fig. 4. beschreiben.

Fig. 4.
Abloten.



Man hat zu unterscheiden, ob ein Stangen*ende* oder ein *Zwischen*punkt einer Stange auf eine Boden-Festlegung abgelotet werden soll; der letztere Fall ist durch Fig. 4. angedeutet.

Es stellt I, II, (III), IV eine Stangenlage vor, es ist aber in diesem Falle (III) keine gewöhnliche Stange, sondern die besondere, mit einer oberen Teilung versehene Festlegungs-Stange, welche hier zur Ablotung auf den Punkt F dient.

Nachdem die gewöhnliche Messung bereits über F hinweggegangen ist, während jedoch die benachbarten Stangen II und IV noch *unverrückt* liegen, wird III vorsichtig herausgenommen und durch (III) ersetzt. Durch Ausziehen von Schlitten-Schiebern hinten und vorn kann man mit dieser Stange (III) die *ganze* Länge zwischen II und IV (nämlich die Länge der Stange III samt den 2 Keilmassen) ausfüllen, und folglich

den Punkt F als Projektion N auf der Teilung von (III) angeben. Das hiezu nötige Herauf-Loten von F geschieht durch 2 seitlich aufgestellte Theodolite T und T'. Es empfiehlt sich jedoch, nicht direkt den Auflote-Punkt N auf der Stange (III) zu bestimmen, sondern durch vorläufiges Herauf-Projizieren einen anderen genäherten Punkt N' zu ermitteln und dann noch den kleinen Horizontalwinkel zwischen F und N genau zu messen und das ihm entsprechende lineare Mass in Rechnung zu bringen.

(Einige dabei zu beachtende Einzelheiten s. „Zeitschr. f. Verm." 1880, S. 385 bis 386.)

Da alle diese Ablotungen doppelt, nämlich durch *zwei* symmetrisch seitwärts gestellte Theodolite ausgeführt wurden, ergab sich eine Versicherung unmittelbar. Die 34 Ablotungen der ersten Basismessung gaben eine mittlere Differenz von nur 1,51″, also für das Mittel aus beiden Messungen nur einen mittleren Fehler von 0,76″, was auf 3,90^{m} Theodolit-Abstand einen mittleren linearen Fehler von nur 0,014^{mm} giebt. Die Instrumente waren 21^{cm}-Mikroskop-Theodolite, sonst zu Triangulationen zweiten Rangs gebraucht.

Zwar sind nicht alle bei den fraglichen Ablotungen mitwirkenden Verrichtungen, Ablesungen an der Stange (III) u. s. w. ebenso genau, doch sind die Ablotungen im Ganzen auf 0,1^{mm} sicher, wobei noch zu beachten ist, dass diese Fehler der Zwischenpunkte sich nicht fortpflanzen und in das Gesamtbasis-Resultat überhaupt nicht eingehen.

In ähnlicher Weise wie diese Ablotungen an den regelmässigen Festlegungen wurden auch die Unterbrechungs-Ablotungen Mittags und Abends gemacht.

IV. Die Keilmessung.

Das Einlegen eines gläsernen Messkeiles (vgl. Fig. 4. und Fig. 5. § 10. S. 69) zwischen die Schneiden, und das Ablesen der Teilung ist nicht so einfach, als dieses auf den ersten Blick scheinen könnte; es ist eine gewisse Übung dazu erforderlich. Vor allem muss man sich hüten, den Keil zu stark „einzu*schieben*", er soll nur „ein*gelegt*" werden, wobei die erste Berührung mehr wie eine Art Kleben als wie ein Druck gefühlt werden soll. Wird zu stark eingedrückt, so entstehen erhebliche konstante Fehler, deren Existenz schon die Brüsseler Kommission 1854 fand.

In der Landesaufnahme hat sich eine feine Art der Keillegung seit Bessel und Baeyer durch Tradition erhalten, und die besonderen bei Göttingen angestellten Versuche, über welche wir nachher berichten werden, haben ergeben, dass bei Befolgung dieser vorsichtigen Keillegung die konstanten Fehler äusserst kleine Beträge haben. (S. 82.)

Was zunächst den mittleren unregelmässigen Keillege- und Ablesefehler betrifft, so fand man denselben aus Wiederholungen der Metall-Thermometer-Messungen $= \pm 1{,}8^{t}$ und aus Wiederholungen der Intervallen-Messungen $= \pm 2{,}3^{t}$. Hiebei soll mit t der Wert 0,001 Par. Linie bezeichnet werden; es ist nämlich 1^{t} die letzte noch wahrzunehmende Grösse, welche dem geschätzten Zehntel der Keilteilung entspricht. Diese Genauigkeit von etwa $\pm 2^{t} = \pm 0{,}005^{mm}$, mit freier Hand und mit blossem Auge erreicht, ist sehr überraschend.

Die Metall-Thermometer-Fehler gehen in die Basislänge nur etwa mit ihrem halben Betrag ein, man hat also für eine Stangenlänge nur etwa $\sqrt{0{,}9^2 + 2{,}3^2} = \pm 2{,}5^{t} = \pm 0{,}0056^{mm}$ in Rechnung zu nehmen, oder für 1^{km} Länge mit rund 250 Stangen den mittleren Messungsfehler $= \pm 0{,}0056 \sqrt{250} = \pm 0{,}09^{mm}$. Thatsächlich ist der

mittlere unregelmässige Basismessungs-Fehler, aus Doppelmessungen berechnet, etwa $= \pm 1^{mm}$ für 1^{km}, d. h. 10mal so gross, als der soeben a priori gefolgerte. D. h. der nackte mittlere unregelmässige Keilmessungs-Fehler bildet nur einen verschwindend kleinen Teil der wirklichen Fehler. Erheblichere Beträge werden erzeugt durch Gleiten der Stangen auf ihren Böcken, sowie durch Ungleichheit der Temperaturen in den Eisen- und Zinkstangen.

Zur Bestimmung des Keildrucks wurde die in Fig. 5 angedeutete Einrichtung getroffen, es ist nämlich auf dem rechten Ende der Stange II ein Schrauben-Mikroskop befestigt, dessen Gesichtsfeld auf das linke Ende der Stange III hinüberreicht, und eine dort angebrachte feine Teilung einzustellen gestattet. Jede relative Bewegung der zwei Stangen II und III kann mit dieser Vorrichtung leicht auf $\pm 0{,}1'$ genau gemessen werden.

Fig. 5.

I II III K_1 K_2

Es wurde dadurch gefunden, dass *stärkere* absichtliche Keildrücke zweierlei Wirkung haben, erstens grösstenteils elastisches Zurückgehen, zweitens aber eine dauernde Verschiebung von etwa $0{,}4'$.

Die schwachen Keildrücke, wie sie bei der eigentlichen Basismessung vorkamen, hatten eine dauernde Wirkung von nur im Mittel $0{,}29'$ oder 0,17 Milliontel der Länge.

V. *Temperatur-Verhältnisse.*

Temperatur-Bestimmung mit dem Quecksilber-Thermometer findet bei der Besselschen Messmethode unmittelbar nicht statt. Indessen besteht doch ein gewisses Interesse, auch die eigentlichen Stangen-Temperaturen zu kennen, und zu diesem Zweck zuerst eine Beziehung zwischen dem Keilmass k und dem Temperaturgrad R eines Quecksilber-Thermometers herzustellen; so hat Bessel in der „Gradm. in Ostpreussen" S. 29 (vgl. unseren § 11. Gleichung (25) S. 75) für das Mittel der vier Stangen die Beziehung gegeben:

$$k = 2{,}1249 - 0{,}045489\,R, \qquad \text{oder} \qquad R = 46{,}712^\circ - 21{,}983\,k$$

wo k das Keilmass in Par. Linien und R die entsprechende Quecksilber-Thermometer-Angabe in R° bedeutet.

Bei Göttingen machte ich an den 2 Tagen der intensivsten Messung, 17. und 18. August, einige Versuche zur Vergleichung mit Quecksilber-Thermometern.

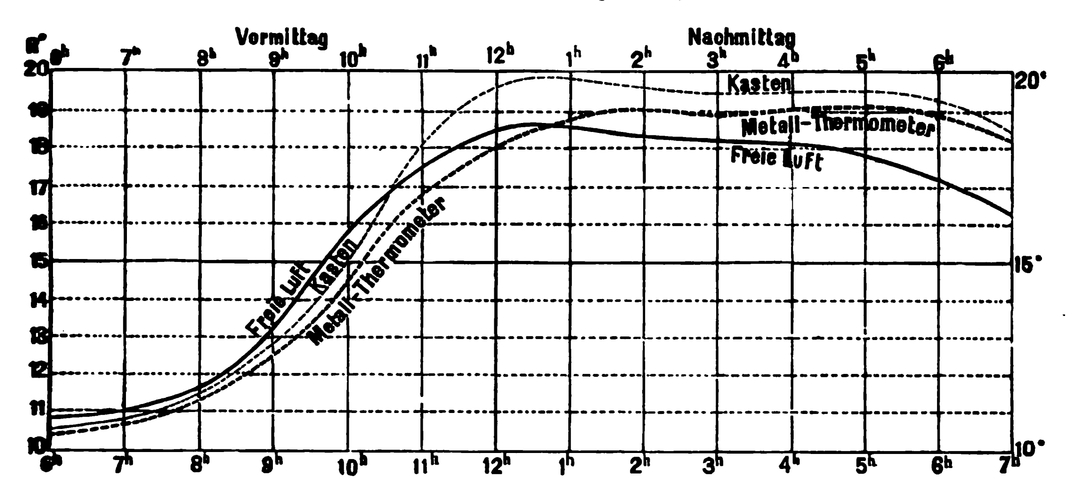
Es wurden etwa halbstündlich folgende 3 Aufzeichnungen gemacht:

1. Temperatur der freien Luft durch Schleuder-Thermometer.
2. Temperatur des Innenraums der Kästen, an den eingelegten Thermometern durch die Glasverschlüsse abgelesen.
3. Metall-Thermometer-Keilmasse für die 4 Stangen.

Die Verhältnisse waren auch insofern andere, als bei der ersten Königsberger Vergleichung von 1834, als damals die mit heller Ölfarbe angestrichenen hölzernen Stangenkästen unmittelbar den Sonnenstrahlen ausgesetzt wurden, während bei Göttingen die Kästen noch Überzüge von weissem Schirting hatten, welche durch die Erfahrungen bei der Braakschen Messung, 1871, als nützlich erkannt, in der That einen erheblichen Schutz gegen strahlende Wärme gewähren.



Fig. 6.
Gang der Temperaturen bei der Göttinger Basismessung:
(Mittel vom 17. und 18. August 1880.)



Die Ergebnisse dieser Vergleichungen sind in vorstehender Fig. 6. dargestellt. Die Original-Beobachtungen hiezu wurden in der „Zeitschr. f. Verm." 1880, S. 394 veröffentlicht, und zwar 17. und 18. August 1880 im allgemeinen halbstündlich. Die Beobachtungen dieser zwei Tage wurden zuerst gemittelt und wenig ausgeglichen, wodurch folgende Zusammenstellung erhalten wurde:

Göttingen 17.—18. August 1880.

Tageszeit		Luft	Kasten	Metall-Thermometer
Morgen	6h	10,7° C	9,9° C	10,0° C
	7	10,8	10,8	10,6
	8	11,6	11,6	11,2
	9	13,1	12,6	12,2
	10	15,8	14,8	14,2
	11	17,4	17,8	16,6
Mittag	12	18,4	19,5	17,8
	1	18,5	19,7	18,6
	2	18,3	19,5	19,0
	3	18,1	19,4	18,9
	4	18,0	19,5	19,0
	5	17,7	19,4	19,0
	6	17,1	19,2	18,8
Abend	7	16,0	18,4	18,2

Diese Werte wurden nochmals ein wenig graphisch ausgeglichen, und dann wurde die obenstehende Fig. 6. darnach aufgetragen.

Der Gang der Temperaturen ist im wesentlichen dieser: Unmittelbar vor dem Erscheinen der Sonne haben die Luft, der Kasten und die Stangen infolge der nächtlichen Ausgleichung nahezu gleiche Temperatur; sobald die Sonne zu wirken beginnt, hebt sich die Lufttemperatur und *nachfolgend* auch allmählich die Temperatur des Kastens und der Metallstangen; dann beginnt der Kasten nach und nach als Wärmebehälter zu wirken und teilt auch den Stangen seinen Wärmevorrat mit, so dass Nach-

mittags und Abends der Kasten und die Stangen wärmer als die Luft sind. Die Unterschiede zwischen dem Quecksilber-Thermometer und dem Metall-Thermometer, welche über 1° gehen, zeigen sich hier deutlich; dagegen über den Temperatur-Unterschied der Eisenstange und der Zinkstange giebt dieser Versuch keine Auskunft.

§ 13. Neuere Basis-Apparate mit isolierten Mikroskopen.

Zur Geschichte und zur Vorgeschichte dieser Apparate berichtet Wolf, Histoire de l'appareil Ibanez-Brunner, Comptes rendus 112, 1891, S. 370—371 und Hammer, Zur Geschichte der Basismessung, „Zeitschr. f. Verm." 1891, S. 446—448 (Tralles, Hassler, Porro, d'Aubuisson.)

I. Der ältere spanische Basis-Apparat.

General Ibanez liess im Jahre 1856 für seine spanische Landes-Aufnahme einen Basis-Apparat durch Mechaniker Brunner in Paris konstruieren, mit dem er mehrere Grundlinien, namentlich im Jahre 1858 die 14 663ᵐ lange Grundlinie bei Madridejos mass.

Wir geben die Beschreibung des Basisstabes nach dem Werke: „Expériences faites avec l'appareil à mesurer les bases appartenant à la Commission de la carte d'Espagne, par Laussedat, Paris 1860".

Fig. 1.
*Brunner*s Basis-Messstange.
Querschnitte in natürlicher Grösse.

Fig. 1 a.
Feste Verbindung in der Mitte.

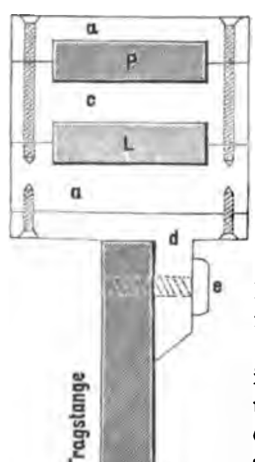


Fig. 1 b.
Allgemeiner freier Querschnitt.

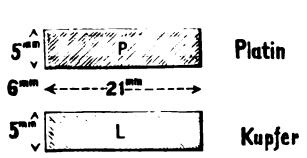
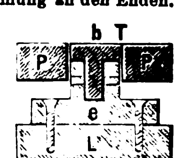


Fig. 1 c.
Ausdehnungsbestimmung an den Enden.



Die beiden Stäbe von Platin und Kupfer haben gleiche Dimensionen, nämlich wie in Fig. 1 b. angegeben ist, je 21ᵐᵐ Breite und 5ᵐᵐ Höhe, mit einem Zwischenraum von 6ᵐᵐ. Fig. 1 b. zeigt den normalen Querschnitt, wie er überall der Länge nach ist, wo keine Berührung der beiden Stäbe stattfindet.

In der Mitte sind beide Stäbe fest verbunden, wie in Fig. 1 a. angegeben ist; zwei Rahmen *a* mit einem Mittelstück *c* sind seitlich fest zusammengeschraubt und halten damit die Platinstange *P* und die Kupferstange *L* fest zusammen. Fig. 1 a. zeigt auch eine Tragstange, welche der ganzen Länge nach durchgeht, mit einem Querschnitt von umgekehrter **T**-Form, ebenso wie in der späteren Fig. 4. S. 87.

Endlich zeigt noch Fig. 1 c. den Querschnitt an dem einen Ende, wo die gegenseitige Ausdehnung zwischen Platin und Kupfer gemessen wird.

Hier ist der Platinstab in seinem mittleren Drittel durchbrochen und durch ein besonderes **T**förmiges Platinstück *b* ausgefüllt, das zwischen *P* und *P* lose gleitet, dagegen nach unten fest mit *e* und L verbunden ist.

An der Fuge zwischen *b* und P befindet sich auf der horizontalen Oberfläche von *b* und von *P* eine Teilung *T*, an welcher man die relative Ausdehnung der Stäbe *L* und *P* mikroskopisch ablesen kann.

II. Basis-Apparat des geodätischen Instituts.

Etwa im Jahre 1876 hat das geodätische Institut einen Basis-Apparat von Mechaniker Brunner in Paris bestellt und 1878 geliefert erhalten. Dieser Apparat hat im wesentlichen dieselbe Konstruktion, wie der soeben beschriebene spanische Apparat von General Ibanez. Der Apparat des geodätischen Instituts hat einen Stab, der aus Platin-Iridium und Messing zusammengesetzt ist. Die erste Mitteilung hierüber giebt der Generalbericht der Europ. Gradm. für 1878, S. 99, mit einem Anhange „Sur la construction de la règle géodésique internationale, par M. M. H. Sainte-Claire Deville et E. Mascart“ und Fortsetzung in dem Gen.-Ber. d. Europ. Gr. für 1879, Anhang.

Mit diesem Apparate wurden vom geodätischen Institute bis jetzt 3 Grundlinien-Messungen ausgeführt, nämlich 1879 Nachmessung der 2763 Meter langen Basis von Strehlen in Schlesien, welche früher 1854 mit dem Bessel schen Apparate gemessen worden war, ferner 1880 Nachmessung der 2336 Meter langen, früher 1846 für die Küstenvermessung angelegte Grundlinie bei Berlin und 1892 Nachmessung der Bonner Basis. Im Anschluss an diese letztere Messung sind auch weitergehende Untersuchungen auf der Versuchsstrecke des geodätischen Institutes auf dem Telegraphenberge bei Potsdam ausgeführt worden. (Probemessungen mit dem Repsold'schen Ablotungs-Apparat von Schumann, Mitteilung des Geodätischen Instituts, s. „Zeitschr. f. Instrumentenkunde“, 1894, S. 18—20.)

III. Der neue, vereinfachte spanische Basis-Apparat.

Während die Genauigkeit der Messungen mit dem Brunner schen Apparat genügend war, fand man in Spanien die Geschwindigkeit, nämlich etwa 70 Meter für 1 Stunde nicht befriedigend.

Es wurde deswegen nach Angabe von General Ibanez im Jahre 1864 ein neuer einfacherer Apparat, jedoch im wesentlichen nach dem ersten Grundgedanken konstruiert, mit dem nicht nur von 1865—1879 acht weitere spanische Grundlinien, sondern dann auch von 1880—1881 drei Linien in der Schweiz gemessen wurden, $2{,}4^{km}$ bei Aarberg, $2{,}54^{km}$ bei Weinfelden und $3{,}2^{km}$ bei Bellinzona.

Wir beschreiben zuerst im Anschluss an Fig. 2. und Fig. 3. S. 86 die Anordnung des Apparates und den Gang der Messung im allgemeinen, und benützen dabei zunächst die Brochüre von Dr. Koppe: „Der Basis-Apparat des Generals Ibanez und die Aarberger Basismessung, Zürich 1881“, nebst einigen dankenswerten Privatmitteilungen von Koppe.

Es wird *ein* Massstab von 4^m Länge angewendet, welcher in Fig. 3. durch *a b* angedeutet ist und auf 2 Stativen S_1 und S_2 aufliegt.

Unabhängig von dem Massstab und seinen Stativen S_1 S_2 sind zwei Mikroskope M_1 und M_2 auf besonderen Stativen T_1 und T_2 an den Enden des Massstabes aufgestellt. Die Mikroskope M_1 und M_2 werden auf die Endstriche *a* und *b* (oder nahe den Endstrichen) eingestellt, dann wird der Massstab um seine eigene Länge von

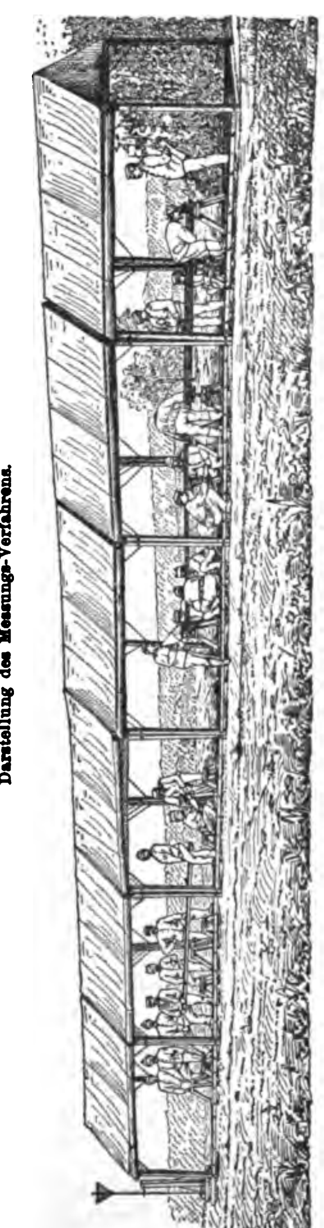


Fig. 2.
Basismessung bei Aarberg in der Schweiz,
ausgeführt im August 1880 mit dem vereinfachten spanischen Basis-Apparat.
Darstellung des Messungs-Verfahrens.

Fig. 3.
Darstellung des Grundgedankens der Messung (Massstab $ab = 4$ Meter).



rechts nach links vorgerückt, so dass a nach b kommt und die Stative S_3 und S_4 in Anwendung kommen; M_2 bleibt stehen, und M_1 rückt um die zweifache Massstablänge vor, so dass es nun vorderes Mikroskop wird u. s. w.

Der Massstab $a\,b$ bewegt sich hiebei nicht in der abgesteckten und festgelegten Geraden $A\,B$ selbst, sondern in einer Parallelen $a\,b$ zu $A\,B$, was offenbar gleichgültig ist.

Die Messstange $a\,b$ besteht aus Eisen, und ist der freien Luft ausgesetzt, ohne Schutz durch einen hölzernen Kasten. Dagegen wird der Apparat im Ganzen durch *Zelte* geschützt, welche mit Leinwand bespannt gegen direkte Sonnenstrahlen und auch gegen leichten Regen Schutz gewähren. Die Zelte sind tragbar, und werden dem Fortschritte der Messung entsprechend stets hinten abgenommen und vorne wieder angesetzt.

Die Anordnung im Ganzen zeigt Fig. 2. S. 86.

Übergehend zu den Einzelheiten betrachten wir in Fig. 4. zuerst den Querschnitt der Stange; derselbe hat umgekehrte ⊥-Form, so dass ein breites Auflager entsteht. Der Stab ist 4^m lang und 50^{kg} schwer.

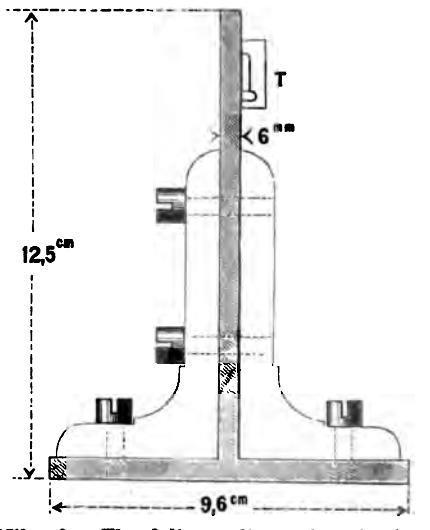
Zur Temperatur-Bestimmung dienen gewöhnliche Quecksilber-Thermometer, welche in Fig. 4. rechts oben durch T veranschaulicht sind und auch in Fig. 3. S. 86 der Länge nach an 4 Stellen durch T, T, T, T angedeutet wurden.

Die mit Quecksilber gefüllten Glaskugeln dieser Thermometer sind mit dem Eisen der Stange in unmittelbarer inniger Berührung und sind ganz in Eisenfeilspähne eingebettet. Die Glasröhren der Thermometer werden durch übergedeckte Glasplatten von Aussen abgelesen.

Zur Neigungs-Bestimmung der einzelnen Stangenlagen dient eine in der Mitte angebrachte Libelle L (Fig. 3. S. 86).

Die Messstange ist auf ihrer oberen schmalen Fläche mit einer *Teilung* versehen, früher der ganzen Länge nach in Centimeter, bei der neueren vereinfachten Anordnung nur noch von 0,5 zu 0,5 Meter, und zwar durch feine Striche auf eingelegten Platin-Plättchen.

Fig. 4.
Querschnitt des Massstabes in halber natürlicher Grösse.



Nun haben wir das in Fig. 5. S. 88 abgebildete Instrument, „Mikroskop-Theodolit“ genannt, zu betrachten, welches dreien Zwecken gemeinsam dient, nämlich:

1) Ablotung auf die Festlegungs-Bolzen im Erdboden,
2) Einrichtung in die abgesteckte Basis-Gerade,
3) Mikroskopische Einstellung oder Ablesung auf den Stangen-Enden.

Zu diesen drei Zwecken, denen der Mikroskop-Theodolit zu dienen hat, ist im Einzelnen zu bemerken:

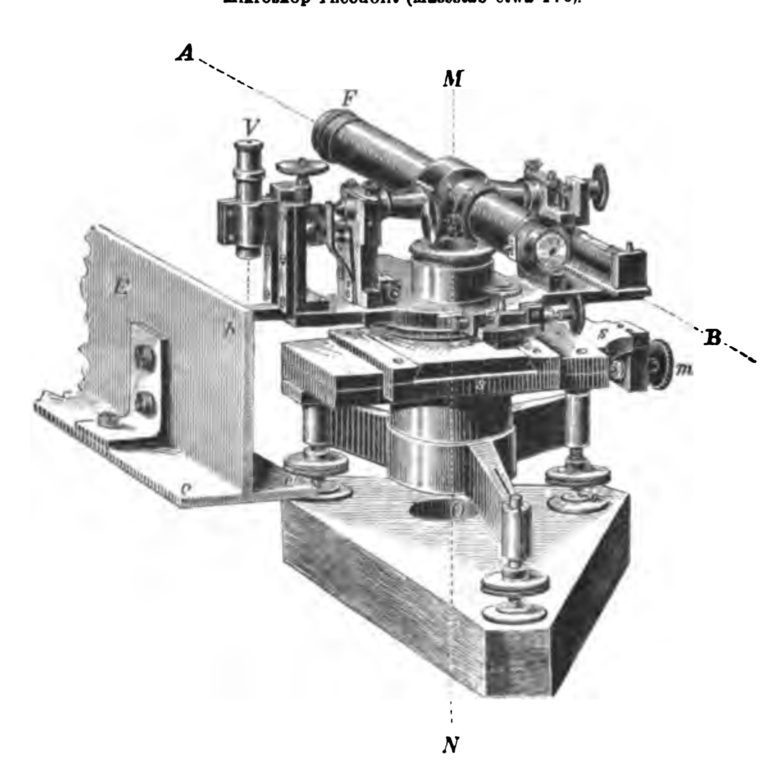
zu 1) Wenn der Mikroskop-Theodolit als Abloter dienen soll, so wird statt des horizontalen Fernrohrs F Fig. 5. ein vertikales Fernrohr eingelegt, welches

durch das Loch *O* im Stative nach der Vertikalen *M N* eingerichtet werden kann, mit Schlittenführungen *s* und Schraubenbewegungen *m* nach zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen.

zu 2) Wenn es sich um Einrichtung in die Gerade in horizontalem Sinne handelt, so wird das horizontale Fernrohr *F* Fig. 5. vor- oder rückwärts nach *A* oder *B* eingerichtet. Soll die Mitte *M* selbst Zielpunkt werden, so wird das Fernrohr *F* ausgehoben und eine Zielmarke in die Axenlager eingelegt.

zu 3) Die mikroskopische vertikale Einstellung auf die Messstange ist in Fig. 5. bei *V* und *b* angedeutet. *V* ist ein vertikales Mikroskop, welches auf die schmale Oberfläche *b* des eisernen Massstabes *E* eingestellt werden kann. Den Massstab *E* haben wir mit seinem Querschnitt *b c c'* in Fig. 5. ohne Stative angedeutet.

Fig. 5.
Mikroskop-Theodolit (Massstab etwa 1 : 5).



Der Gang der Messung lässt sich nun vollends leicht beschreiben:

Die Aarberger Basis von 2400ᵐ Länge war durch drei grosse dreieckige Scheiben-Backen (s. Fig. 2. S. 86 links) über der Erde bezeichnet, und wurde durch Messingbolzen in Quadern unterhalb festgelegt. Die Linie befand sich auf gerader und ebener Landstrasse, die Stative wurden auf den Strassenboden gestellt. Der Strassenverkehr wurde während der Dauer der Messung gesperrt.



Zu gleichzeitiger Verwendung kamen:

4 Mikroskop-Theodolite,
4 Auflagdreifüsse für die Messstange,
6 grosse Holzstative (*T* Fig. 3. S. 86) für die Mikroskop-Theodolite,
10 kleine Holzstative (*S* Fig. 3. S. 86) für die Messstange,
2 hölzerne je 4 Meter lange Latten zum Vor-Messen.

Das Personal war:

2 Beobachter mit Gehilfen zum Vorwärtstragen und vorläufigen Stellen der Holzstative,
2 Beobachter mit Gehilfen zum endgiltigen Stellen der Holzstative,
4 Beobachter an der Messstange zum Einstellen der Null- und Endstriche unter die Mikroskope, zum Ablesen der 4 Thermometer und der Libelle,
2 Gehilfen zum Vorwärtstragen der Stange (die Fig. 2. S. 86 zeigt 15 Mann).

Über die Messungs-Geschwindigkeit ist folgendes mitgeteilt:

Am 22. August 1880 begann die Messung 5 Uhr 48 Minuten und wurde bis 800^{m} durchgeführt. Nach drei Tagen war die erste Messung der Basis beendigt; gleichzeitig wurden in Entfernungen von 400^{m} zu 400^{m} feste Punkte errichtet.

Am Nachmittage des 24. August wurden die Instrumente und sämtliche Gerätschaften nach dem Basisanfange zurücktransportiert; alle Apparate einer sorgfältigen Prüfung unterworfen. Am 25., 26. und 27. August wurde, wie an den drei vorhergehenden Tagen, in der Zurückmessung um je 800^{m} vorgerückt, alle Fixpunkte eingemessen und so auch die zweite Messung in drei Tagen beendigt. Die Zeiten, welche auf die Messung der einzelnen Sektionen verwandt wurden, sind:

Sektion	I. Messung	II. Messung
1. = 400 Meter	2 Stunden 47 Min.	2 Stunden 6 Min.
2. = 400 „	2 „ 44 „	1 „ 59 „
3. = 400 „	1 „ 27 „	2 „ 24 „
4. = 400 „	2 „ 26 „	2 „ 8 „
5. = 400 „	2 „ 21 „	2 „ 31 „
6. = 400 „	2 „ 49 „	2 „ 49 „
Mittel: 400 Meter	2 Stunden 36 Min.	2 Stunden 20 Min.

Die zweite Messung ging etwas rascher vor sich als die erste, weil das Setzen der Fixpunkte bei der ersten Messung einige Zeit in Anspruch nimmt.

Die grösste Neigung der Messstange während dieser Messungen betrug 1,5°, die Korrektion für die Neigung im Mittel nahe 1^{cm} für 1 Sektion. Ausgesprochen ungünstig für die Messung war der erste Beobachtungstag, namentlich während der Messung der zweiten Sektion, indem der Regen die Zelte durchweichte. Die Differenz ist bei dieser Sektion die grösste.

General Ibanez selbst hat über seine Basis-Apparate folgendes als Gesamturteil ausgesprochen:

„Die einfache Einrichtung meines Apparates und die Art seiner Anwendung ist das Ergebnis der Erfahrungen, welche ich bei *neun* in Spanien ausgeführten Basis-Messungen zu machen Gelegenheit hatte. Bei meinem ersten Apparate waren alle denkbaren Korrektions-Vorrichtungen angebracht. Die Messstange bestand aus zwei Metallen, deren Längen-Unterschied infolge verschiedener Ausdehnung durch die Wärme mit einer Mikrometer-Schraube gemessen wurde. In gleichen Intervallen eingelassene Quecksilber-Thermometer liefern eine zweite, von der ersten unabhängige Bestimmung

der Temperatur. *Es zeigte sich schliesslich, dass die Quecksilber-Thermometer die Temperatur der Messstange leichter und besser bestimmen lassen, als das Metall-Thermometer und deshalb habe ich erstere allein beibehalten.* Die Sucht, jedes Mass und jede Korrektion gesondert mit der Mikrometer-Schraube messen zu wollen, wie wir es erstmals thaten, führt zu grossem Zeit- und Arbeits-Aufwande ohne reellen Gewinn an Genauigkeit; und grössere erreichbare Vorteile gehen durch die komplizierte Art und längere Dauer der Messung verloren. Das beste Mittel, dem Anhäufen der Beobachtungs-Fehler in ausgedehnten Dreiecksnetzen entgegen zu arbeiten, ist die Messung einer ausreichenden Zahl von Grundlinien. Dieses Mittel kann aber um so eher in Anwendung gebracht werden, je mehr der Messapparat mit einfacher Einrichtung und Handhabung ausreichende Genauigkeit der Resultate verbindet."

IV. Der amerikanische Basis-Apparat von Repsold.

Die nord-amerikanischen Vermessungen im neueren Sinne begannen etwa 1841; von da bis 1874 wurden 9 Grundlinien gemessen und im Jahre 1876 wurde ein neuer Basis-Apparat von Repsold in Hamburg angeschafft, mit welchem unter Leitung von *Comstock* dann drei Grundlinien, bei Chicago 1877, Sandusky 1878, und Onley 1879 gemessen wurden.

Nachricht hierüber giebt das grosse amtliche Werk: „Professional papers of the corps of engineers, U. S. Army, Nr. 24. Report upon the primary triangulation of the United States Lake Survey, by Lieut. Col. C. B. Comstock, Corps of Engineers, Brevet Brigadier-General, U. S. A., aidet by the Assistents on the survey. Washington: Governement printing office. 1882." (vgl. auch „Zeitschr. f. Verm. 1884", S. 533—547 und 1888, S. 385—395.)

Fig. 6.
*Repsold-Comstock*s Messstange, Querschnitt in natürlicher Grösse.



Der Grundgedanke des Repsold-Comstock schen Apparates ist derselbe wie beim Brunner schen (S. 84), nämlich *eine* Messstange, deren Enden zwischen festen Mikroskopen abgelesen werden.

Die Messstange besteht aus der Verbindung von Zink und Stahl, wie in Fig. 6. angegeben ist. Die aus Zink und Stahl zusammengesetzte Messstange ist in eine Röhre von 12,5cm Durchmesser eingeschlossen und ragt an den Enden derselben hervor, wie durch die nachfolgenden Fig. 7. bis 12. S. 91—93 dargestellt ist.

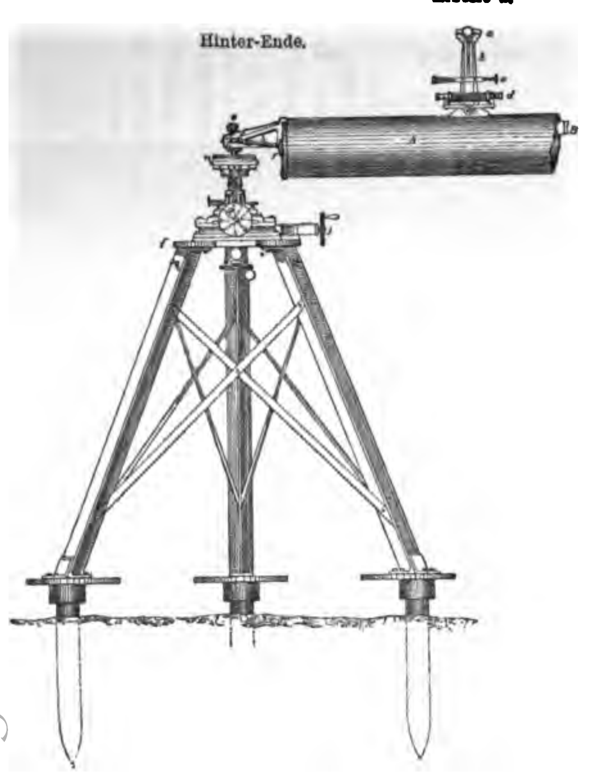
Die zwei Platinplättchen *e e* in Fig. 9. S. 93 sind mit feinen Teilungen versehen, welche durch die isoliert aufgestellten Mikroskope abgelesen werden.

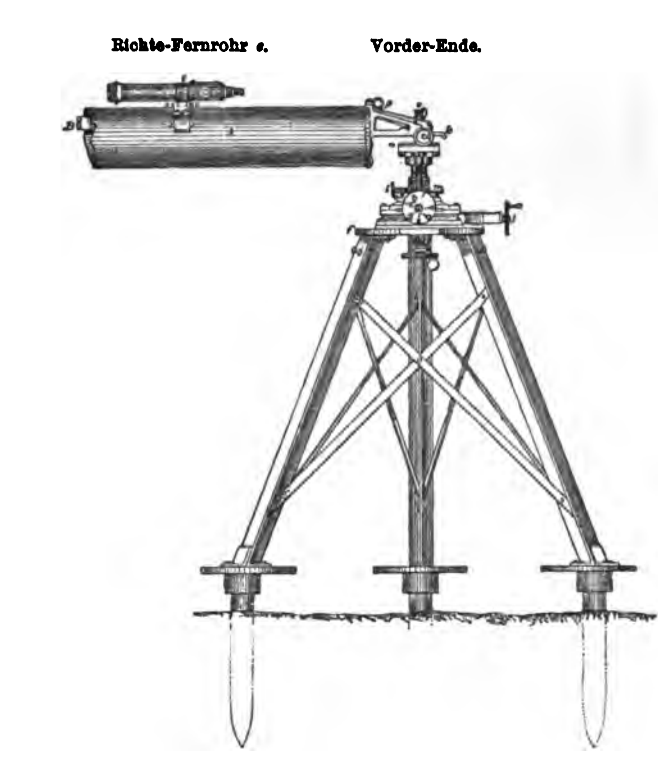
Fig. 12. (S. 93) zeigt den Röhren-Querschnitt und zugleich die Queransicht eines mit der Röhre parallelen Richte-Fernrohrs *b*, welches in der grossen Fig. 7. (S. 91) rechts oben in Seiten-Ansicht dargestellt ist. Dieses Richte-Fernrohr lässt sich durchschlagen, also auf eine vordere oder eine hintere Richte-Bake der Geraden einstellen.

Im übrigen ist durch die zahlreichen Figuren alles wesentliche erklärt. Die photographische Aufnahme des Gesamt-Apparates mit den Schutz-Zelten, welche wir



Fig. 7.
Repsold-Comstock's Basismess-Apparat.
angewendet bei den Grundlinien von Chicago 1877, Sandusky 1878, Olney 1879.
(Massstab 1:16.)





Länge der Röhre = 4 m, Durchmesser der Röhre = 0,125 m.
Im Innern der Röhre befindet sich der aus Zink und Stahl bestehende Massstab, welcher an den Enden hervorragt, und durch isoliert aufgestellte Mikroskope abgelesen wird.



Fig. 8.
Repsold-Comstocks Basismess-Apparat, photographische Ansicht.

auf S. 92 nachgebildet haben, zeigt auch rechts die Mikroskope, welche von ihren Stativen übergeneigt, einen etwas unstabilen Eindruck machen.

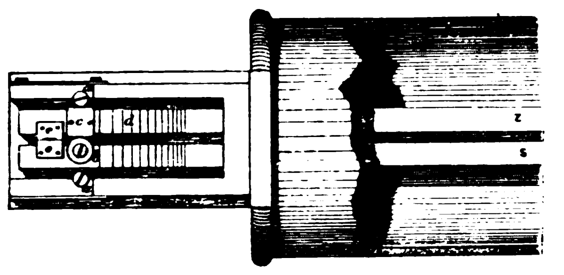


Fig. 9. (Massstab 1:4.)
Hinteres Ende der Messstange aus der Röhre hervorragend.
c c Platinplättchen.

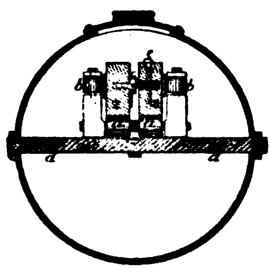


Fig. 10.
Querschnitt der Röhre mit den Stäben *Z* und *S*.
Röhren-Durchmesser = 12,5 *cm*.

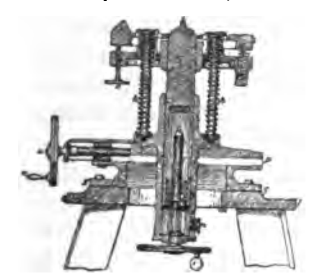


Fig. 11.
Stativ für die Röhre mit der Messstange.
(Massstab 1:8.)

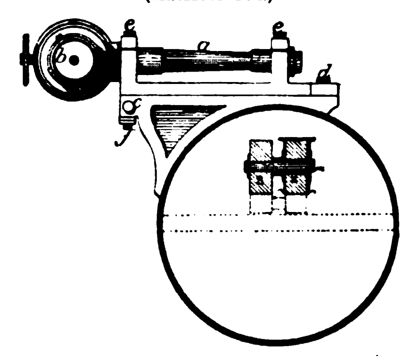


Fig. 12.
Querschnitt der Röhre und des Richte-Fernrohrs *b*.
(Massstab 1:4.)

V. Der niederländisch-ostindische Basis-Apparat von Repsold.

Schon vor dem soeben beschriebenen amerikanischen Apparat (welcher 1876 hergestellt wurde), haben Repsold und Söhne einen auf ähnlichen Prinzipien beruhenden Apparat konstruiert, welcher teilweise nach Angaben von Oudemanns schon von 1865, zur Triangulierung von Java, 1873, gedient hat.

Eine erste Beschreibung wurde im September 1876 von Repsold selbst gegeben in Nr. 1661 der „astr. Nachr." 70. Band, S. 65—80, die Hauptbeschreibung mit Zeichnungen ist enthalten in dem Werke: „Die Triangulation von Java, erste Abteilung, von Oudemans, Batavia 1875".

Das Prinzip ist das bimetallische, ein Zinkstab und ein Stahlstab, 11,5^{mm} und 13,5^{mm} breit und beide 22^{mm} hoch, liegen neben einander und sind in eine Röhre eingeschlossen, aus welcher nur die Stab-Enden hervorragen, wie bei Repsold-Comstock Fig. 10. s. o. Im übrigen aber ist die Anordnung eine andere; es sind 4 Stäbe von 4^{m} und 1^{m} Länge vorhanden nach Andeutung folgenden Schemas:

4ᵐ 4ᵐ

1ᵐ 1ᵐ

Die kurzen 1ᵐ langen Stäbe tragen an ihren Enden Mikroskope, welche auf die 4ᵐ langen Stäbe hinüberreichen und so die Messung ermöglichen.

§ 14. Massbestimmungen für bimetallische Stäbe.

Die Verbindung zweier verschiedener Metalle, z. B. Zink und Eisen, Kupfer und Platin, zu einem Massstabe, welche bei der ersten Betrachtung so grosse Vorteile zu haben scheint, leidet doch an dem Übelstande, dass die beiden Metalle sehr oft *nicht gleiche* Temperaturen haben, und damit wird der Vorteil der ganzen Einrichtung fraglich.

Allerdings wenn die Temperatur im allgemeinen längere Zeit *konstant* bleibt, so werden wohl auch beide Metalle gleiche Temperatur annehmen, wenn aber die Temperatur der umgebenden Luft sich ziemlich rasch *ändert*, oder wenn strahlende Wärme einwirkt, so werden zwei verschiedene Metallstangen, je nach ihrer Masse, ihrer spezifischen Wärme u. s. w., den äusseren Wärme-Einflüssen mehr oder weniger rasch folgen, und deswegen zu gleichen Zeiten verschiedene Temperaturen haben.

Eine hierauf bezügliche Rechnung hat Oudemans angestellt in dem Werke: „Die Triangulation von Java", erste Abteilung Vergleichung der Massstäbe, Batavia 1875, S. 7—8. Oudemans nimmt nach dem „Lehrbuch der Experimental-Physik von Wüllner" die nachfolgenden Zahlen für Zink und Stahl an, welchen wir zugleich die Zahlenwerte für Platin und Messing beifügen (letztere ebenfalls nach Wüllner angenommen von *Fischer*, astr. Nachr., 103. Band (1882) Nr. 2451):

		Zink	Stahl, Eisen	Platin	Messing
Spezifische Wärme	w	0,089	0,109	0,034	0,094
Absorptions-Vermögen	α	0,19	0,175	0,17	0,07
Wärmeleitungs-Fähigkeit	λ	363	374	84	231
Dichte	Δ	6,86	7,82	21,51	8,00

Ferner sei die freie der Luft ausgesetzte Oberfläche eines Stabes $= F$

Das Volumen eines Stabes . . . . $= V$

Damit ist die Wärmemenge, welche einem Stab von seiner freien Oberfläche ins Innere zugeführt wird, proportional dem Produkt:

$$F \alpha \lambda$$

Andererseits ist die Temperatur-Zunahme des Stabes umgekehrt proportional dem Produkt:

$$V \Delta w$$

Im Ganzen ist also die Temperatur-Zunahme eines Stabes proportional zu setzen der Grösse:

$$(\Delta t) = \frac{F}{V} \frac{\alpha \lambda}{\Delta w} \tag{1}$$

Der erste Quotient $F : V$ ist rein geometrischer Natur; jedenfalls wird die Länge beider in Frage kommender Stangen gleich sein, etwa $= l$; dann seien ferner die Breiten und Höhen beider Stangen $= b$ und h, bzw. $= b'$ und h'. Wenn die Stangen von allen Seiten der Luft (bzw. der Wärme-Einwirkung) ausgesetzt sind, so ist:

$$F = 2(b+h)\,l \qquad V = b\,h\,l$$

also: $$(\Delta t) = \frac{2\,(b+h)}{b\,h}\,\frac{\alpha\,\lambda}{\Delta\,w}$$

Die Oudemans schen Stangen lagen scharf *neben*einander, hatten gleiche Höhen $h = 22^{mm}$ und die Breiten $b = 13{,}5^{mm}$ für Stahl und $b' = 11{,}5^{mm}$ für Zink, es ist also zu setzen: $F = (2\,b + h)\,l$ oder $= (2\,b' + h)\,l$, folglich:

$$(\Delta t)_s = \frac{27+22}{13{,}5 \times 22}\,\frac{\alpha\,\lambda}{\Delta\,w} \quad , \quad (\Delta t)_z = \frac{23+22}{11{,}5 \times 22}\,\frac{\alpha'\,\lambda'}{\Delta'\,w'}$$

Die Ausrechnung giebt 12,7 und 20,1 oder das Verhältnis 0,63 : 1, d. h. die Stangen entsprechen nicht genügend den Wärme-Verhältnissen.

Auch bei Bessels Stangen (vgl. Fig. 2. S. 68) sind diese Verhältnisse nicht eingehalten, die Stangen liegen *auf*einander und geben, wenn man die Tragstange als nicht vorhanden annimmt:

alles rund in Millimetern:

Eisen:		Zink:	
$F = 55\,l$	$V = 189\,l$	$F' = 27\,l$	$V' = 91\,l$
$\alpha = 0{,}175$	$\lambda = 374$	$\alpha = 0{,}19$	$\lambda = 368$
$\Delta = 7{,}82$	$w = 0{,}11$	$\Delta = 6{,}86$	$w = 0{,}089$

Die Ausrechnung giebt hiefür nach der Formel (1):

$$(\Delta t)_e : (\Delta t)_z = 22 : 34$$

Hier ist die Zinkstange offenbar zu schwach, und das Verhältnis ist deswegen nicht richtig.

Dagegen berichtet Fischer für den Platin-Messing-Basismessstab des geodätischen Instituts, wobei beide Teile je 21^{mm} breit und 5^{mm} dick, durch einen Zwischenraum von 7^{mm} von einander getrennt sind, dass das thermische Verhältnis nach der Formel (1) sich $= 1{,}00 : 1{,}08$ ergab. („Astr. Nachr." 103. Band, 1882, Nr. 2451, S. 43.)

Zugleich teilt Fischer eine Bestimmung des Temperatur-Unterschiedes beider Stäbe durch Thermo-Elemente mit, welche am 25. Mai 1882 in dem Beobachtungsraum zu Steglitz bei Berlin eine mittlere Differenz von nur $= 0{,}05°$ ergab, von $0{,}01°$ bis $0{,}12°$ anwachsend und bis $0{,}02°$ wieder abnehmend, mit Schlusswert $0{,}04°$.

In Bezug auf die vorerwähnte thermische Theorie der Formel (1) besteht natürlich eine grosse Unsicherheit, wie auch Oudemans selbst hervorhebt. Trotzdem handelt es sich hier um Überlegungen, welche nicht zu umgehen sind.

Neue Massbestimmungen für den Besselschen Apparat, von General Schreiber.

Die Massbestimmungen, welche zuerst 1834 von Bessel mit den Zink- und Eisenstangen vorgenommen wurden, haben wir bereits in § 11 S. 74—76 beschrieben.

Vor der Braaker Basismessung (welche 1871 stattfand) wurde jedoch der Vergleichs-Apparat neu und besser eingerichtet, statt der früheren Holzgerüste in Königsberg wurden in dem Untergeschoss des Generalstabs-Gebäudes in Berlin Zementpfeiler aufgebaut, und die Keilmessung für die Konstanten-Bestimmung durch Mikroskop-Ablesung ersetzt. Zur Temperatur-Regulierung wurden Holzkästen mit Doppelwänden zur Aufnahme von Wasser konstruiert.



Dieses ist mitgeteilt in dem Werke: „Die königlich preussische Landes-Triangulation, Haupt-Dreiecke, II. Teil, erste Abteilung", Berlin 1873, S. 1—87 mit Tafel II. und III, und die Ergebnisse der Vergleichungen in dem Werke: „Die königlich preussische Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, VI. Teil", Berlin 1894, S. 181—213.

Auch in anderer Hinsicht wurden die Vergleichungen gegen früher abgeändert, so dass nicht mehr bloss *eine* der 4 Stangen, nämlich die erste l_1, mit dem Normalmass verglichen wurde, sondern alle 4 Stangen l_1, l_2, l_3, l_4 jede für sich.

Dabei wurde zuerst die Formel zu Grunde gelegt nach (32) § 11 S. 77 (wobei wir jedoch wieder L statt L' schreiben):

$$l = L - (k - 1{,}4)\,m \tag{2}$$

Dabei ist l die Stangenlänge, k das innere Keilmass, m der relative Ausdehnungs-Coëfficient und L das Absolutglied, d. h. die Länge l, welche zu $k = 1{,}4$ gehört.

Als erste Verbesserung der Formel (2) wurde von General Schreiber ein quadratisches Glied hinzugefügt, und gesetzt:

$$l = L - (k - 1{,}4)\,m - (k - 1{,}4)^2\,\varrho \tag{3}$$

Eine wichtigere Neuerung wurde ferner gemacht durch Zufügung eines Gliedes $\alpha\,h$, welches die Temperatur-*Änderung* berücksichtigt. Um dieses begreiflich zu machen, erinnern wir zuerst an das, was schon vorher bei (1) S. 94 über die Wärme-Verhältnisse in bimetallischen Stäben gesagt wurde. Die Eisen- und Zinkstangen folgen der allgemeinen Temperatur-Änderung nur langsam nach, und noch mehr: Die Eisenstange und die Zinkstange folgen den Temperatur-Änderungen nicht *gleich*, sondern die schwächere Zinkstange eilt bei dem Besselschen Apparat der Eisenstange immer voraus. Diese Erscheinung findet ihren Ausdruck in dem Glied $\alpha\,h$ der dritten Schreiberschen Formel:

$$l = L - (k - 1{,}4)\,m - (k - 1{,}4)^2\,\varrho + \alpha\,h \tag{4}$$

Dabei bedeutet α die *ein*stündige Änderung des Temperatur-Keilmasses k, und h ist ein durch Versuche bestimmter Coëfficient, in runder Zahl $h = 0{,}05$. Um die Wirkung des letzten Gliedes (Folge-Korrektion) beurteilen zu können, berechnen wir eine kleine Übersichts-Tabelle:

Zeit		Keilmasse k	α	Temperaturen in R°		Folge-Korrektion $h\,\alpha = 0{,}05\,\alpha$
0^h		1,30		18,13°		
	1^h		+ 0,10		— 2,19°	$+ 0{,}005^l = + 0{,}011^{mm}$
1^h		1,40		15,94		
	1^h		+ 0,10		— 2,20°	$+ 0{,}005^l = + 0{,}011^{mm}$
2^h		1,50		13,74		

(5)

Wenn also die Temperatur im allgemeinen um rund 2° in 1 Stunde abnimmt, so zeigt das Keilmass k die Stange um rund $0{,}01^{mm}$ zu klein, weshalb die Korrektion $\alpha\,h = + 0{,}01^{mm}$ zugesetzt werden muss. Nimmt die Temperatur im allgemeinen zu, so erscheint die Stange vermöge des Keilmasses k zu lang. Alles dieses lässt sich vollständig durch das schon erwähnte Voraneilen des Zinks (oder Zurückbleiben des Eisens) erklären, denn dieses giebt bei Temperatur-Zunahme eine Verkleinerung von k, also in $l = L - (k - 1{,}4)\,m$ eine Vergrösserung von l.



Endlich ist noch eine vierte Formel durch Zufügung eines quadratischen Folge-Gliedes gebildet worden:

$$l = L - (k - 1{,}4)\, m - (k - 1{,}4)^2 \varrho + \alpha\, h + \alpha^2 k \qquad (6)$$

Durch diese neuen Formeln, namentlich (4), sind nicht bloss die auf dem Komparator gemachten Stangen-Vergleichungen in bessere Übereinstimmung gebracht, sondern auch die bei den Basismessungen selbst auftretenden Differenzen der metronomischen Rechnung zugänglich gemacht.

Trotzdem haben die Stangen-Vergleichungen noch erhebliche Schwankungen und Unsicherheiten gezeigt; während in den einzelnen Gruppen bessere Übereinstimmung war, zeigten die Gruppen-Mittel bis zu 0,01 Par. Linien = $0{,}026^{mm}$ gehende Abweichungen.

Diese Erscheinung, welche auch in anderen Fällen beobachtet ist, giebt die Warnung, dass mittlere Fehler, welche aus einzelnen Gruppen von Messungen im wesentlichen unter gleichen Umständen erlangt wurden, nicht ohne weiteres als reelle Genauigkeits-Masse anzusehen sind, und es scheint, dass die sehr kleinen mittleren Fehler der Besselschen Vergleichungen von 1834, welche wir auf S. 74 erwähnt haben, aus solchen Gründen zu klein ausgefallen sind.

General Schreiber hat die vorstehenden Angaben in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1882, S. 1—17 veröffentlicht, und dazu noch folgendes bemerkt: „Es ist nicht gelungen, die Ursachen der enormen Schwankungen (bei den verschiedenen Vergleichungen) dergestalt festzustellen, dass sie in Zukunft vermieden werden können. Man wird vielmehr Unsicherheiten bis zu etwa einer hundertel Linie oder 0,02 Millimeter, auch bei ferneren mit den Besselschen Messstangen auszuführenden Vergleichungen und Basismessungen gewärtigen müssen.

Massvergleichungen für den Repsoldschen Stahl-Zink-Apparat von Comstock.

Ähnliche Verhältnisse wie General Schreiber mit den Besselschen Zink-Eisen-Stangen fand auch General Comstock in Washington mit Zink-Stahl-Stangen. Aus dem „Report upon the primary triangulation of the United States Lake Survey by Comstock etc. Washington 1882“, S. 223—230, entnehmen wir hierüber folgendes:

Die Zink-Stahl-Stange, deren mechanische Einrichtung wir schon in § 13. S. 90 bis 93 beschrieben haben, wurde in gleichen Umständen wie bei der Basismessung selbst, d. h. in einer Röhre eingeschlossen, im freien Felde, unter Zelt-Schutz, in folgender Weise besonders untersucht:

Eine Messing-Stange diente in einer Verpackung von schmelzendem Eis zur Vergleichung, indem diese durch Eis auf 0° erhaltene Stange und die Zink-Stahl-Stange in ihrer jeweiligen Temperatur, abwechselnd unter dasselbe Mikroskopen-Paar zur Ablesung gebracht wurden. Dabei wurde an der Zink-Stahl-Stange die jeweilige Differenz $Z - S$ mikroskopisch *beobachtet*, ausserdem konnte aber auch ein Wert $Z - S$ *berechnet* werden aus der gleichzeitigen Vergleichung mit der in Eis verpackten Messingstange und aus der früher vielfach und genau bestimmten Differenz $z - s$ der einzelnen Ausdehnungs-Coëfficienten für Zink und Stahl.

Die Differenzen zwischen berechneten $Z - S$ und beobachteten $Z - S$ zeigten einen regelmässigen Tagesverlauf, dessen Hauptwerte nachstehende Tabelle zeigt. Dabei ist gesetzt:

$$(Z - S) \text{ Rechnung} - (Z - S) \text{ Beobachtung} = \Delta$$

$$\frac{e}{z - e}\,\Delta = 0{,}6522\,\Delta = \delta$$

Folgendes ist eine Reihe von Mittelwerten solcher Beobachtungen:

8 Tage zwischen 23. August und 3. September 1881 (Report S. 228—230)

Tageszeit		Temperatur	Δ	δ
Morgen	8ʰ	20,6° C	— 5,9μ	— 3,8μ
	10	22,8	— 2,4	— 1,6
Mittag	12	25,4	+ 4,7	+ 3,1
	2	26,6	+ 14,5	+ 9,4
	4	26,3	+ 14,6	+ 9,5
Abend	6	25,2	+ 6,5	+ 4,2
	8	23,9	— 1,6	— 1,0
	10	22,5	— 10,0	— 6,5
Nacht	12	21,4	— 16,7	— 10,9
	2	20,7	— 15,1	— 9,8
	4	20,3	— 12,1	— 7,9
Morgen	6	19,9	— 15,1	— 9,8

Die hier mit δ bezeichneten Werte entsprechen dem Schreiberschen Gliede $h\,\alpha$ (s. o. (4) und (6) S. 96), jedoch mit anderen Vorzeichen, was darin seinen Grund hat, dass die Massen-Verhältnisse von Zink und Eisen bei Repsold (Fig. 6. S. 90) ganz andere sind als bei Bessel (Fig. 2. S. 68). Auf Grund von solchen Versuchen wurden für die amerikanischen Basismessungen von Chicago kleine Korrektionen δ in Rechnung gebracht, in ähnlicher Weise wie durch $\alpha\,h$ und $\alpha^2\,k$ in den Schreiberschen Formeln für die Göttinger und Meppener Messungen. (Formeln (4) und (6) S. 96 und 97).

Hiezu ist noch im Anschluss an S. 84 zu citieren Hammer: Von der neuen französischen Basismessung, „Zeitschr. f. Verm.“ 1892, S. 26—29.

§ 15. Verschiedene Projekte zur Basismessung.

Die Konstruktion von Basismess-Apparaten bietet dem Erfindungsgeist ein weites Feld, und obgleich nicht anzunehmen ist, dass wirklich leistungsfähige Apparate anders als im engsten Anschluss an die Berufs-Praxis entstehen werden, können wir doch einige solche Projekte betrachten.

Das Messrad.

Einen kühnen Gedanken hat in der Anfangszeit der „Europäischen Gradmessung“ 1868, Steinheil in München ausgesprochen, nämlich, mit einem Messrad gewöhnliche geradlinige Eisenbahn-Linien zu befahren, und dadurch Basismessungen in grosser Menge ohne viele Mühe oder Kosten zu erlangen. Nach Steinheils Vorschlägen wurden von Voit in München einige Versuche im kleinen angestellt, über welche Steinheil in den astr. Nachr. 72. Band (1868) Nr. 1728, S. 369—378 berichtet. Es wurde ein Doppelgeleise von 20ᵐ Länge von gewöhnlichen Eisenbahn-Schienen wie bei der bayerischen Staatsbahn (mit Laschenverbindungen und kleinen Zwischenräumen zwischen je 2 Schienen) angelegt. Das Messrad war von Holz mit einem kupfernen Reif von 0,922ᵐ Durchmesser, und wurde aus freier Hand geleitet; die Wiederholungen stimmten unter einander auf etwa 0,01%. Später wurde für das Rad ein Gestelle konstruiert, welches die Rad-Ebene genau in der Vertikal-Ebene der Schienen erhalten soll. Damit wurden 50 Befahrungen einer Strecke von 17,383ᵐ (6 Radumfänge) gemacht, wobei sich der mittlere unregelmässige Fehler der einmaligen Befahrung = ± 0,30ᵐᵐ ergab oder ± 2,3ᵐᵐ für 1ᵏᵐ.



Der Basis-Mess-Wagen.

In dem Werke von Zachariae „Die geodätischen Hauptpunkte“, deutsch von *Lamp*, Berlin 1878, S. 94, wird folgendes Projekt von Bruhns in Leipzig berichtet:

In der Basislinie werden, mit Zwischenräumen von ungefähr 4^m, eiserne Pflöcke eingerammt, deren Oberfläche mit einem Punkt oder einem Kreuz versehen ist. Der Messapparat besteht aus einem 4^m langen Massstab und zwei an den Enden angebrachten vertikalen Mikroskopen, mit denen man die Massstablänge auf die Pfahlköpfe übertragen kann. Dieser Apparat liegt auf einem Wagen, wird durch ein Dach und Seitenwände gegen Sonnenschein u. s. w. geschützt, und fährt somit in Absätzen von 4^m über die ganze Basis hin.

Messungen mit Metalldrähten (Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1885, S. 362—365).

In Stockholm hat *Jäderin*, 1885, Längenmessungen mit Stahlbändern und mit Drähten aus Stahl und Messing gemacht. Die Drähte werden über Stative ausgestreckt, dabei durch Gewichte in konstanter Spannung gehalten. Die Längenbestimmung geschieht mittelbar durch Vergleichung der Drahtmessung mit einer anderweitigen Stangenmessung. Die Geschwindigkeit ist bedeutend, die grösste Leistung war 550^m in 1 Stunde und 2368^m in einem 9stündigen Arbeitstage.

Auf der Erdmessungs-Konferenz in Berlin 1895 wird berichtet, dass in Russland eine Basismessung mit dem ausserordentlich schnell messenden Jäderinschen Apparate stattgefunden hat.

Das Schätz-Mikroskop.

Während Nonien und Schrauben-Mikroskope längst zur Basismessung angewendet wurden, ist ein Hilfsmittel, welches in mehrfacher Hinsicht nach unserer Ansicht sich hier vortrefflich eignet, noch nicht benützt worden, nämlich das Schätz-Mikroskop, das wir früher in Band II, 4. Aufl. 1893, S. 191—192 beschrieben haben.

Wir machen zunächst eine allgemeine Überlegung: Um einen mittleren unregelmässigen Messungsfehler von rund $\pm 1^{mm}$ auf 1 Kilometer, d. h. den thatsächlich bei guten Messungen vorkommenden Betrag zu erklären, braucht man keine sehr feinen optischen und mechanischen Hilfsmittel anzunehmen, denn bei der üblichen Stangenlänge von 4^m kommen 250 Lagen auf 1 Kilometer, und wenn μ der mittlere Fehler einer Lage ist, so hat man $\mu\sqrt{250} = 1^{mm}$, woraus folgt $\mu = 0{,}063^{mm}$; dieses ist ein Betrag, den man sogar durch Schätzung von freiem Auge an einer Millimeter-Teilung erzielen könnte, (etwa entsprechend einem Winkel von 2′ an einer Kreisteilung von 100^{mm} Halbmesser).

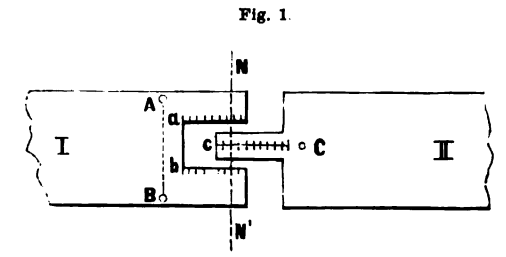
Da man aber natürlich die Genauigkeit im einzelnen weiter treibt, wurde man bald zu Nonien, Mikroskopen u. s. w. geführt. Ein weiteres Hilfsmittel zur Bestimmung des Zwischenraums oder des Übergreifens an der Grenze zweier Messstangen, das Schätz-Mikroskop, ist sehr bequem und hat die für solche Zwecke nötige Genauigkeit, giebt eine Ablesung auf *einen* Blick, was zur Zeitsparung bei Basismessungen sehr wichtig ist.

Die Anwendung eines Schätz-Mikroskops zur Messung des Anschlusses zwischen zwei aufeinander folgenden Stangen I und II ist in Fig. 1. (S. 100) angedeutet: Die Stange I endigt gabelförmig und umfasst mit zwei Teilungen a und b die Teilung c, welche sich auf einem zungenartigen Fortsatze der Stange II befindet. Ein Schätz-Mikroskop wird mit drei Fussspitzen auf die Punkte A, B und C gestellt, von denen



A und B fest sind (etwa konische Löcher), während C dem Spielraum des Anschlusses entsprechend veränderlich ist. Man kann vielleicht auch das Schätz-Mikroskop mit einer Kipp-Axe $A\,B$ aufstellen. Das Schätz-Mikroskop, welches somit auf den drei Punkten A, B und C aufsitzt, hat eine horizontale Axe in der Richtung I II und Kippbewegung in der Querrichtung $N\,N'$, so dass die 3 Teilungen a, b und c rasch nach einander abgelesen werden können.

Fig. 1.



Trennung der Längenmessung von den Hilfs-Operationen.

Die Einrichtungen, welche zu einem Basis-Apparate gehören, und die Operationen mit denselben, sind wesentlich zweierlei Art, erstens solche, welche zur Temperatur-Ausdehnung und Intervall-Bestimmung, d. h. zur eigentlichen Längenmessung dienen, und zweitens die verschiedenen mechanischen Hilfsmittel für das Auflegen der Stangen, Geradrichtung und Neigungsmessung u. s. w.

Die eigentliche Längenmessung muss ihrer Natur nach eine *kontinuierliche* Operation sein, sogar mit einer nahezu gleichförmigen Geschwindigkeit, während das bei den Hilfs-Operationen nicht nötig ist. Wir glauben deshalb, dass die eigentliche Längenmessung, d. h. das Legen der Messstangen und das Bestimmen der Zwischenräume, oder Übergreifungen ihrer Enden, zeitlich und räumlich *getrennt* werden sollte von den vorbereitenden Hilfs-Verrichtungen der Gerad-Richtung, Neigungs-Bestimmung u. s. w.; das könnte z. B. dadurch geschehen, dass man stets etwa 1 Kilometer voraus die Basis durch eingerammte Pfähle (etwa von 4 zu 4 Meter) absteckt, geradrichtet und nivelliert. Die Pfähle wären zum Einrammen unten mit eisernen Schuhen und oben zum Auflegen der Messstangen mit scharfgeformten Metall-Kappen zu versehen, welche zum Geradrichten Spielraum und Richte-Schrauben haben.

Es mag hier auch nochmal daran erinnert werden, wie wir schon in § 9. S. 62 mitgeteilt haben, dass Benzenberg zu seinen Basismessungen eine Messungsbrücke von 1000 Fuss = 314 Meter Länge legte, so dass die Längenmessung stets auf genügende Länge von den Hilfs-Operationen unabhängig war.

Auch Schwerd liess bei seiner kleinen Speyerer Basis (Sp. B. S. 23) Pfähle, welche 0,58^{m} lang, 0,1^{m} dick und oben mit einem Brettchen zur Aufnahme der Stangen versehen waren, 0,3^{m} tief, den ganzen Vorrat der Messung voraus, in den Boden schlagen.

§ 16. Länge und Einteilung der Grundlinien.

Die Basis eines Dreiecksnetzes ist eine genau gemessene Seite des Netzes.

Will man beim Übergang von der Basis zu andern Dreiecksseiten spitze Winkel oder ähnliche Fehlerquellen vermeiden, so bleibt nichts übrig, als der Basis nahezu die Länge einer Haupt-Dreiecksseite zu geben, und deswegen finden wir bald nach dem ersten Aufschwung der Triangulierungen, das Bestreben, die Grundlinien so lang als möglich zu machen.



Allerdings der Begründer Snellius hatte nur ganz kleine Grundlinien von zuerst 328ᵐ, 348ᵐ, später etwa 2000ᵐ, dagegen die französischen Messungen im 18. Jahrhundert hatten fast nie unter 10ᵏᵐ lange Grundlinien, nämlich:

1736	Gradmessung in Peru (La Condamine)	
	Basis von Yarouqui	12 226 *m*
	Basis von Tarqui	10 250 *m*
1736	Gradmessung in Lappland (Maupertuis)	
	Basis von Tornea	14 436 *m*
1792	Gradmessung von Delambre und Méchain	
	Basis von Melun	11 842 *m*
	Basis von Perpignan	11 706 *m*

Auch in Deutschland mass man am Anfang dieses Jahrhunderts sehr lange Linien, z. B.:

1801	Bayerische Basis München-Aufkirchen	21 654 *m*
1820	Württembergische Basis Solitude-Ludwigsburg	13 032 *m*
1819	Rheinbayerische Basis Speyer-Oggersheim	15 460 *m*

Die letztgenannte Basis war mittelbare Veranlassung zum Verlassen der langen Grundlinien:

Professor Schwerd am Lyceum in Speyer war mit der vor seinen Augen vorgenommenen amtlichen Messung von Steuerrat Lämmle nicht einverstanden, und behauptete, eine 20 mal kleinere Basis leiste denselben Dienst. Zum Beweis mass er mit seinen Lyceums-Schülern im Jahr 1820 eine kleine nur 860ᵐ lange Grundlinie, und leitete die grosse Speyerer Linie mit guter Übereinstimmung daraus ab.

Schwerd veröffentlichte seine Arbeit in dem Werk: „Die kleine Speyerer Basis, oder Beweis, dass man mit einem geringen Aufwand an Zeit, Mühe und Kosten durch eine kleine genau gemessene Linie die Grundlage einer grossen Triangulation bestimmen kann. Speyer 1822." Netzausgleichung in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, § 65.)

Von da an kamen kurze Grundlinien ziemlich allgemein in Gebrauch, namentlich Bessel nahm zu seiner berühmten Gradmessung in Ostpreussen 1834 nur eine 1822ᵐ lange Basis; doch ist das die untere Grenze, später ging man wieder weiter, und die neuesten deutschen Grundlinien sind 5—7 Kilometer lang.

Die Längen und Einteilungen der 14 Grundlinien, welche mit dem Bessel schen Apparate gemessen sind, sind im Folgenden übersichtlich zusammengestellt:

Längen und Einteilungen der 14 Grundlinien, welche bis jetzt mit dem Besselschen Apparat gemessen sind.

1. Basismessung bei Königsberg, 1834, von Bessel und Baeyer. 2 Strecken.

1. Königsberg, 1834.
Trenk A Mednicken
441ᵐ 1381ᵐ
—1822ᵐ

2. Basismessung bei Kopenhagen, 1838. 2701ᵐ lang, im ganzen nur *einmal* gemessen, nur drei kleine Teilstrecken von zusammen 692ᵐ Länge sind zweifach gemessen.
3. Basismessung bei Upsala in Schweden.
4. Basismessung bei Berlin, 1846, von Baeyer, 4 ungleiche Strecken.

4. Berlin, 1846.
A B C
—2336ᵐ—

5. Basismessung bei Bonn, 1847, von Baeyer, 6 ungleiche Strecken.

5. Bonn, 1847.
A D B C
—2134ᵐ—

6. Basismessung bei Lommel in Belgien, 1852, 2301^m lang, 5 Strecken je zweifach gemessen.
7. Basismessung bei Ostende, 1854, 2489^m lang, 4 Strecken 622^m, je zweifach gemessen.
8. Basismessung bei Strehlen in Schlesien, 1854, von Baeyer, 3 ungleiche Strecken,

8. Schlesien, 1854.

Knieschwitz 2 1 Hermsdorf

—2763^m—

9. Basismessung bei Braak in Holstein, 1871, von v. Morozowicz, trigonometrische Abteilung der preussischen Landes-Aufnahme, 7 ungleiche Strecken.

9. Braak in Holland, 1871.

NordpunktI II III IV V VI Südpunkt

—5875^m—

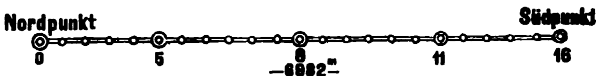
10. Basismessung bei Grossenhain im Königreich Sachsen, 1872, von Nagel und Bruhns. Sächsische Triangulierung, 12 Strecken.

10. Grossenhain in Sachsen, 1872.



11. Basismessung bei Oberhergheim im Elsass, 1877, von v. Morozowicz, trig. Abteilung der preuss. Landes-Aufnahme; in der Gegend der früheren französischen Basis von Ensisheim, 22 Strecken: 376^m + 20mal 312^m + 364^m = 6980^m.

12. Oberhergheim im Elsass, 1877.



12. Basismessung bei Göttingen, 1880, von Schreiber, trig. Abt. der preuss. Landes-Aufnahme, 33 Strecken von je 156^m.

12. Göttingen, 1880.

Nordpunkt 33Strecken Südpunkt

0 11 22 33

—5192^m—

13. Basismessung von Meppen, 1883, von Schreiber, trig. Abteilung der preuss. Landes-Aufnahme, 45 Strecken von je 156^m.

13. Meppen, 1883.

Westpunkt 45Strecken Ostpunkt

0 15 30 45

—7039^m—

14. Basismessung bei Bonn 1892, 2513 Meter eingeteilt in 15 Strecken, 4mal von der Landes-Aufnahme mit dem Besselschen Apparat und 2mal vom Geodätischen Institut mit dem Brunnerschen Apparate gemessen.

Die vorstehende Zusammenstellung bezieht sich (mit unwesentlichen Ausnahmen) auf Doppel-Messungen, d. h. jede Strecke wurde hin und her gemessen.

Auch die älteren französischen Basismessungen des 17. und 18. Jahrhunderts sind meist doppelt gemacht, eine derselben, die Nachmessung der Picardschen Basis von Juvisy durch Cassini sogar 5mal. Dagegen die französischen Messungen mit den Bordaschen Platin-Kupfer-Stangen von 1798—1828 sind nur *ein*mal gemessen.

Auch die langen süddeutschen Grundlinien am Anfang dieses Jahrhunderts in Bayern und Württemberg sind unbegreiflicherweise nur *ein*mal gemessen, so dass über die unregelmässigen Messungsfehler jeder Nachweis fehlt.

Die Schwerdsche und alle nachfolgenden Grundlinien sind wieder in der Regel doppelt gemessen; als Ausnahme ist zu erwähnen, dass die badische Basis von Heitersheim, 2125^m lang, im Jahr 1846 sogar 8mal gemessen wurde.

Wie man aus Doppelmessungen oder allgemeiner aus Messungs-Wiederholungen im ganzen oder in Strecken den mittleren unregelmässigen Messungsfehler bestimmen kann, werden wir später in § 23 behandeln.

Gesamt-Übersicht der Basismessungen.

Eine Zusammenstellung aller zu der internationalen Erdmessung angemeldeten Basismessungen ist von Perrier gemacht worden. Dieselbe findet sich veröffentlicht in den Generalberichten der internationalen Erdmessung und zwar für 1877, S. 40 bis 55; für 1880, Annexe VI; für 1883, Annexe III; für 1887, Beilage IV,

Wir haben hieraus folgenden Auszug gebildet, wo n die Anzahl der Grundlinien, und $[B]$ deren Gesamtlänge für das einzelne Land, also $\frac{[B]}{n}$ die mittlere Länge einer Grundlinie ist.

Num.	Land	Anzahl n	Summe $[B]$	Mittel $\frac{[B]}{n}$
1.	Bayern	3	51,0^{km}	17,0^{km}
2.	Belgien	2	4,8	2,4
3.	Dänemark	1	2,7	2,7
4.	Frankreich mit Algerien	10	117,1	11,7
5.	Italien	9	42,8	4,7
6.	Holland	1	6,0	6,0
7.	Hessen-Darmstadt	1	7,7	7,7
8.	Schweden und Norwegen	7	27,1	3,9
9.	Österreich-Ungarn	19	80,5	4,2
10.	Preussen	11	45,1	4,1
11.	Portugal	1	10,5	10,5
12.	Russland	19	113,3	6,0
13.	Spanien	9	32,8	3,6
14.	Schweiz	6	27,0	4,5
15.	Nord-Amerika	5	49,0	9,8
	Summe	104	617,4	
	Gesamt-Mittel		$\frac{617,4}{104}$	$=5,9^{km}$

Diese Tabelle ist nicht vollständig; es fehlen von den deutschen Linien die Württembergische und die Badische, namentlich aber fehlen die Britischen Messungen in England selbst und in den Kolonien. Andererseits sind zwei preussische Linien (Strehlen und Berlin) infolge von Nachmessung doppelt aufgeführt.

In England sind nach S. 422 des Werkes: „Ordnance trigonometrical survey u. s. w." von 1791—1849, 7 Grundlinien von zusammen 219 579 engl. Fuss oder rund 66,9^{km} Länge gemessen worden (Mittel = 9,6^{km}); fügt man dieses zu der vorstehenden Zusammenstellung, und rechnet für die britischen Kolonien noch einen runden Betrag, so kann man die gesamten Basislängen der Erde zu rund 700 Kilometer schätzen, oder 7% des Erdquadranten.

Wir entnehmen aus dieser Statistik, dass die mittlere Länge einer Grundlinie rund = 6 Kilometer ist.

Neuere Berichte über Basismessung geben die Verhandlungen der internationalen Erdmessung z. B. Verhandlungen über die Versammlung 1892 in Brüssel, 1893, Annexe A. II^{t} S. 157—164. Wir haben diese neueren Berichte zunächst nicht mehr nachgetragen, weil als summarische Übersicht unsere vorstehende Tabelle genügt.



§ 17. Basisnetze.

Die Basis einer Triangulierung ist meist erheblich *kleiner* als die Dreiecksseiten im allgemeinen, und es entsteht daher die Aufgabe, eine grosse Seite aus einer kleinen trigonometrisch abzuleiten. Ungünstige Dreiecks-Verbindungen sind hier nicht zu vermeiden; denn entweder macht man den Übergang von der kleinen Basis zu einer grossen Hauptdreiecksseite durch wenige Dreiecke, und man muss dabei spitze Schnitte anwenden; oder man nimmt eine grosse Zahl von Dreiecken, man hat dann aber eine grosse Zahl von Fehlerquellen.

Wir werden nun zuerst mehrere Basisnetze bekannter Triangulierungen betrachten, und sehen, wie zu verschiedenen Zeiten verschiedene Landmesser sich bemüht haben, teils durch zweckmässige Anordnung der Dreiecke, teils durch lange Grundlinien selbst, die in der Natur der Sache liegenden Schwierigkeiten zu überwinden.

1) *Das Basisnetz von Snellius* (Fig. 1.)

Fig. 1. Snellius, 1615.
Massstab 1 : 100 000.
$t\,c = 328\,m$, $L\,S = 4114\,m$.

Wie wir schon in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 478, mitgeteilt haben, verdanken wir dem Niederländer Willebrord Snellius in Leiden 1615 die erste Triangulierung in dem heutigen Sinne; und in überraschender Weise hat das erste Snellius sche Basisnetz (Fig. 1.) diejenige Form, welche heute noch als die beste gilt. Allerdings die Genauigkeit absolut genommen war bei Snellius noch gering, die Basis $t\,c$ wurde mit hölzernen Messlatten, und die Winkel mit einem geteilten Quadranten von 2,2 rhein. Fuss ohne Fernrohr auf etwa 1′ gemessen.

In Fig. 1. sind L und S die Türme von Leiden und dem südlich von Leiden gelegenen Dorfe Soeterwoute, die wirklich gemessene Grundlinie ist nur $t\,c = 87{,}05$ rheinl. Ruten $= 327{,}85^m$ lang, daran schliessen sich zwei hochgestellte Dreiecke $t\,c\,e$ und $t\,c\,a$, und an die abgeleitete Linie $e\,a = 1229^m$ schliessen sich wieder zwei hochgestellte Dreiecke $e\,a\,L$ und $e\,a\,S$, woraus $L\,S = 4114^m$ berechnet wird.

Für jedes der vier eigentlichen Messungs-Dreiecke teilt Snellius nur je *zwei* Winkel als gemessen mit, und zwar jeweils die Winkel an der Basis, was nach der ganzen Art seiner Darstellung in solchen Fällen, in welchen er die Probestimmungen nicht mitteilen will, nicht ausschliesst, dass auch die dritten Winkel gemessen und ausgeglichen wurden. Ob Snellius das Hauptgesetz, dass die *spitzen* Winkel (z. B. der Winkel a in dem Dreieck $t\,a\,c$) wesentlich die Genauigkeit bestimmen, gekannt hat, ist daraus nicht zu ersehen.

2) *Basisnetze von Schwerd, 1820.*

Der Vater der neueren Basisnetz-Theorie ist Professor Schwerd in Speyer (vgl. S. 100 und 101). Dieser hat im Jahre 1820 das richtige getroffen; er fand nämlich durch theoretische Betrachtungen und Vergleichungen:

erstens, dass das rhombische *Netz* $A\,B\,N\,D$ Fig. 2a. (S. 105) das günstigste ist (was schon *Snellius* hatte) und

zweitens, dass die *spitzen* Winkel bei N und D, welche der Basis gegenüber liegen, hauptsächlich bestimmend für die Genauigkeit sind, und deswegen mit besonderer Schärfe gemessen werden müssen.

Die eigentlichen kleinen Basisnetze, welche Schwerd gemessen und berechnet hat, sind in den folgenden Figuren dargestellt. Schwerd hat ausser seinem „Hauptnetz" Fig. 2a. noch zwei „Prüfungsnetze" Fig. 2b und Fig. 2c. angewendet. Die eigentliche Basis AB selbst ist nur 860^m lang. Die Entfernung HD leitete Schwerd hieraus dreifach trigonometrisch ab mit den Ergebnissen 4959,084^m, 4959,068^m, 4959,098^m.

Fig. 2.
Basisnetze von Schwerd, 1820.
Massstab 1 : 100 000, $AB = 860\,m$, $HD = 4959\,m$.
Fig. 2a.
Hauptnetz.

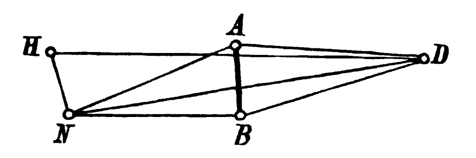
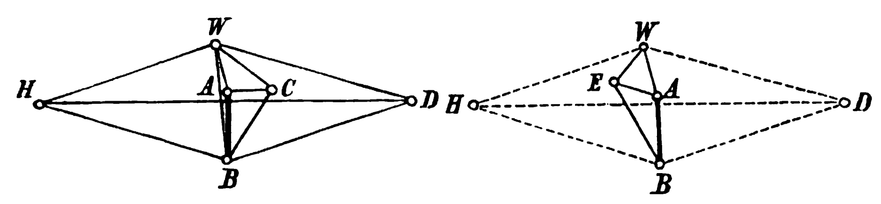


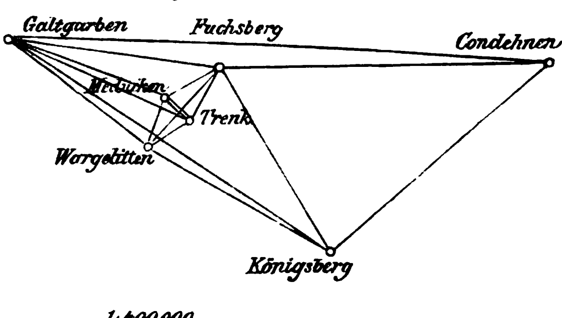
Fig. 2b. Erstes Prüfungsnetz. Fig. 2c. Zweites Prüfungsnetz.

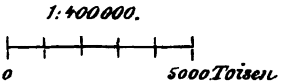


Die weitere Verbindung der Linie HD mit der amtlichen bayerischen Basis Speyer-Oggersheim haben wir schon in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 208 behandelt, wobei mit $D\,Sp$ der Punkt Dom in Speyer bezeichnet ist, welcher abgesehen von einer Excentricität auf dem Turme, dem Punkte D in Fig. 2a., 2b. und 2c. entspricht.

3) Basisnetz der Gradmessung in Ostpreussen, 1834.

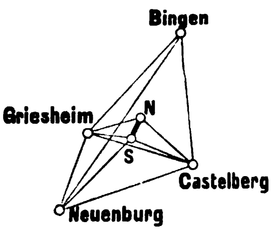
Fig. 3. Massstab 1 : 400 000.
Basis Trenk-Mednicken = 1822 m
Galtgarben-Condehnen = 29 563 m





Die vorerwähnten Überlegungen von Schwerd haben auch auf die Anordnung der Bessel schen Basismessung bei Königsberg Einfluss gehabt; Bessel erwähnt auf S. 38 der Gradmessung in Ostpreussen das „sehr lesenswerte Buch von Schwerd“, und machte seine Königsberger Grundlinie nur 1822^m lang, wie aus vorstehender Zeichnung (Fig. 3. S. 105) zu ersehen ist. Die zwei Rhomben Wargelitten-Fuchsberg und Galtgarben-Königsberg entsprechen dem Schwerd schen Gedanken, allein die Verstärkung der Messungs-Genauigkeit in den spitzen Winkeln hat Bessel, wie es scheint im Vertrauen auf die Gesamt-Ausgleichung, nicht durchgeführt (vgl. hiezu auch unsern I. Band, 4. Aufl. 1895, S. 499—500).

Fig. 4.
Massstab 1 : 600 000.



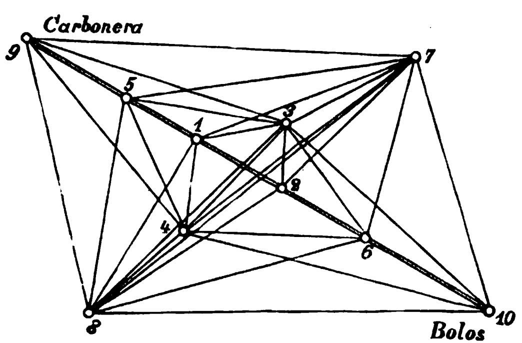
4) Badische Basis bei Heitersheim, 1846.

Auch bei der kurzen badischen Basis, welche 1846 bei Heitersheim (zwischen Freiburg und Basel) gegenüber der französischen Basis von Ensisheim (Oberhergheim) von Klose und Rheiner gemessen wurde, zeigt sich Schwerds Grundgedanke. Die Winkelmessungen hiezu haben wir früher in Band II, 3. Aufl. 1888, S. 183 als Repetitions-Messungsbeispiele mitgeteilt. Die spitzen Winkel sind verstärkt gemessen. Die Basis selbst ist $NS = 2125^m$, und Neuenburg-Bingen $= 17027^m$.

5) Spanische Basismessung von Ibanez, 1858.

General Ibanez liess 1858 für seine spanische Triangulierung eine lange Linie messen, bei Madridejos (etwa 100 Kilometer südlich von Madrid). Die Gesamtlänge von 14 663^m wurde in 5 Teile geteilt, welche alle unter sich trigonometrisch verbunden wurden.

Fig. 5.
Massstab 1 : 200 000, Carbonera—Bolos = 14 663 *m*.



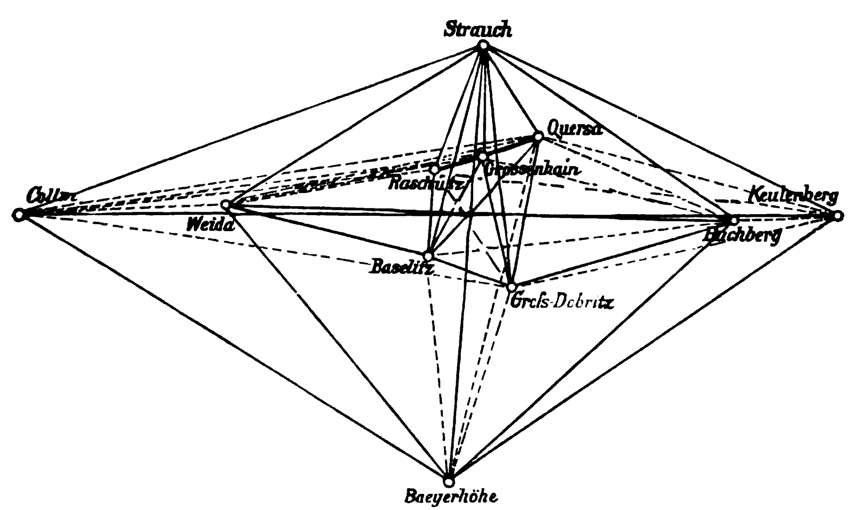
Die Anschauungen, von welchen General Ibanez hiebei geleitet wurde, sind durch folgenden Auszug einer Mitteilung in der Madrider Akademie-Sitzung vom 30. Nov. 1863 charakterisiert (astr. Nachr. 61. Band, 1864, Nr. 1462, S. 339 – 346): Die zwischen einigen französischen und deutschen Geodäten streitige Frage, ob kleine Grundlinien genügen, wurde dadurch zu beantworten gesucht, dass die lange Grundlinie in 5 Teile geteilt wurde, welche unter sich durch ein Netz von 10 Punkten mit

120 Dreiecken und 45 Verbindungs-Linien trigonometrisch verbunden wurden. Die trigonometrische Rechnung, welche sich auf das Mittelstück stützte, gab für die vier äusseren Stücke Werte, welche von den unmittelbar gemessenen Längen nur sehr wenig, d. h. um 2—3mm Abweichung zeigten.

Weiteres über diese spanische Vermessung giebt der General-Bericht der „Europ. Gradmessung für 1869, S. 62—65 und für 1876, S. 125—128", sowie das grosse Werk: „Memorias del instituto geografico y estadistico", ferner (nach einem Citat des Gen.-Ber. für 1869, S. 68): „Base centrale de la triangulation géodésique de l'Espagne par les Colonels Ibanez et Saavedra, 1865."

6) *Sächsische Basis bei Grossenhain, 1872.*

Fig. 6.
Massstab 1 : 600 000. Basis Raschütz-Quersa = 8909m.



Im Königreiche Sachsen wurde im Jahre 1872 eine lange Grundlinie mit dem Besselschen Apparat unter Leitung von Nagel und Bruhns gemessen, deren Basisnetz in Fig. 6. gezeichnet ist.

Näheres hierüber giebt das amtliche Werk: „Astr. geodät. Arbeiten für die Europ. Gradm. im Königreich Sachsen, I. Abteil. die Grossenhainer Grundlinie, von Bruhns und Nagel, Berlin 1882", und Auszug hieraus im „Civilingenieur XXVIII, 1882, Heft 1", und Bericht von Helmert in der „Zeitschr. f. Verm. 1883", S. 596—604. Aus diesem Helmertschen Bericht ist auch unsere Fig. 6. entlehnt.

7) *Göttinger Basis, 1880.*

Die Göttinger Basis ist die zwölfte der mit dem Bessel schen Apparat gemessenen Grundlinien; die Messung geschah 1880 unter Leitung von General Schreiber, welcher den Mess-Apparat und dessen Anwendung zu diesem Zwecke verbessert hatte, und auch in der trigonometrischen Anlage des Basisnetzes von früherem abwich.

Das Göttinger Basisnetz Fig. 7. (S. 108) zeichnet sich durch klassische Einfachheit aus, es entspricht dem von General Schreiber dabei ausgesprochenen Grundsatze, „dass die Güte der Messungen nicht in einer systemlosen Häufung von Kontrollen, sondern in einer scharfen Messung solcher Elemente zu suchen ist, welche die Ge-

nauigkeit der Schluss-Ergebnisse in erster Linie bestimmen" („Zeitschr. f. Verm. 1880", S. 397). In diesem Sinne wurde das Göttinger Basisnetz Veranlassung für General Schreiber, die Anordnung der Winkel-Beobachtungen nach dem Grundsatze günstigster Gewichts-Verteilung allgemeiner zu untersuchen (s. Schreiber: Die Anordnung der Winkel-Beobachtungen im Göttinger Basisnetz, „Zeitschr. f. Verm. 1882", S. 129—161). Auch gehört hiezu der Schreibersche Satz über günstigste Gewichtsverteilung, den wir bereits in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 138—144 behandelt haben.

Fig. 7.
Massstab 1 : 670 000.
Basis $NS = m$, Ahlsburg-Meissner = 57 507 m.

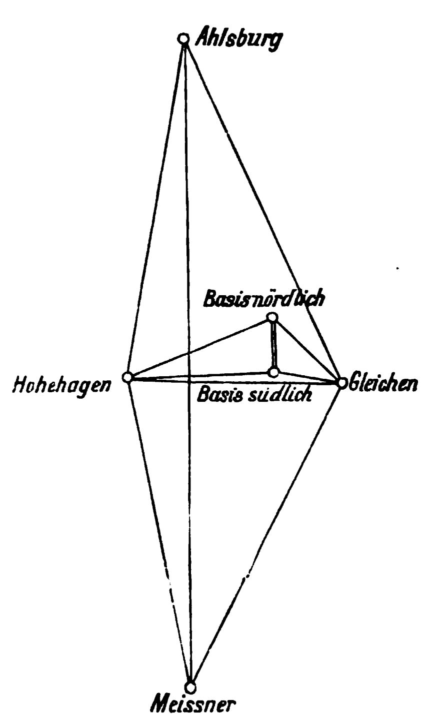
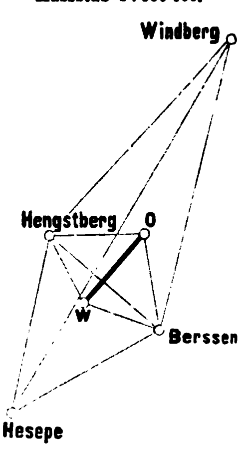


Fig. 8.
Massstab 1 : 600 000.



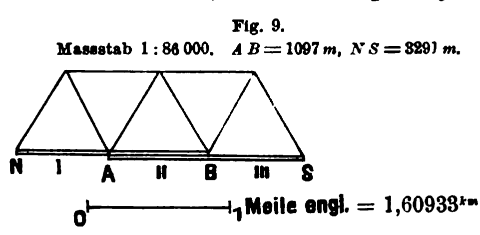
8) Basis bei Meppen, 1883.

Die Meppener Basis, 1883 unter Leitung von General Schreiber gemessen, entspricht ihrer Vorgängerin von Göttingen. Das Basisnetz besteht nur aus 4 Übertragungs-Dreiecken.

Amtliches ist hierüber noch nicht veröffentlicht, eine vorläufige Mitteilung giebt die „Zeitschr. f. Verm." 1883, S. 577 bis 584. In Fig. 8. ist die Basis $WO = 7039^m$ und Hesepe-Windberg $= 34561^m$.

9) Basis am Kap der guten Hoffnung, 1886.

Fig. 9.
Massstab 1 : 86 000. $AB = 1097\,m$, $NS = 3291\,m$.



Das in Fig. 9. dargestellte Basisnetz hat eine von allen unseren vorhergehenden Fig. 1—8. abweichende Form. Die 3 Abschnitte sind für sich gemessen und durch ein Gitternetz von 5 Dreiecken unter sich trigonometrisch verbunden. Denkt man sich das Mittelstück

A B allein gemessen, so lässt sich die Gesamtlänge NS trigonometrisch berechnen und zwar stimmte dieses im vorliegenden Falle auf $+ 0{,}0002 - 0{,}0027 = - 0{,}0025$ engl. Fuss $= 0{,}8^{mm}$.

Die Frage der theoretischen Fehler-Fortpflanzung in einem solchen Netze werden wir später besonders behandeln (§ 19); wir werden finden, dass das Gitternetz Fig. 9. theoretisch ungünstiger ist als das Rhombennetz, allein das Gitternetz mit nur *kurzen* Seiten hat praktische Vorzüge. (Unsere Fig. 9. S. 108 ist aus einem Berichte in der „Zeitschr. f. Verm. 1887", S. 59 entnommen.)

Noch einige weitere Beispiele von Basisnetzen, mit Genauigkeitstheorien, enthält die Veröffentlichung des geodätischen Instituts: „Die Europäische Längengradmessung in 52° Breite, von Greenwich bis Warschau, I. Heft Hauptdreiecke und Grundlinienanschlüsse von F. R. Helmert, Berlin 1893," S. 231—252, mit Tafel II, 10 Basisnetze in 1 : 50000.

§ 18. Mittlere Fehler von Dreiecksseiten.

Wenn in Fig. 1. die Grundlinie b und die drei Winkel (1), (2), (3) gemessen sind, so kann man, nach Ausgleichung der drei Winkel auf 180°, die Seite B berechnen:

$$B = b \frac{\sin(2)}{\sin(1)} \tag{1}$$

Fig. 1.

und wir wollen für diese Funktion den mittleren Fehler bestimmen unter der Annahme, dass die Basis b fehlerfrei sei.

Die Bedingungs-Gleichung ist:

$$+ (1) + (2) + (3) - 180° = 0$$

also die Coëfficienten der Bedingungs-Gleichung:

$$a_1 = +1 \qquad a_2 = +1 \qquad a_3 = +1 \tag{2}$$

Versteht man unter f_1, f_2, f_3 die partiellen Differentialquotienten der Funktion B nach Gleichung (1), so hat man (nach Band I. 4. Aufl. 1895, §. 42.):

$$f_1 = \frac{\partial B}{\partial (1)} = - \frac{b \sin(2)}{\sin^2(1)} \cos(1) = - \frac{b \sin(2)}{\sin(1)} \operatorname{cotg}(1) = - B \operatorname{cotg}(1)$$

Wir wollen zur Abkürzung schreiben:

$$\operatorname{cotg}(1) = c_1 \qquad \operatorname{cotg}(2) = c_2 \qquad \operatorname{cotg}(3) = c_3 \tag{3}$$

Dann wird:

$$f_1 = - B c_1 \qquad f_2 = + B c_2 \qquad f_3 = 0 \tag{4}$$

Die Gewichte der drei gemessenen Winkel seien:

$$p_1 \qquad p_2 \qquad p_3 \tag{5}$$

Dann ist das Gewicht P der Dreiecksseite B nach der Ausgleichung, indem hier die Basis b als fehlerfrei betrachtet wird, zunächst in allgemeiner Formel gegeben (nach Band I. 4. Aufl. 1895, S. 125):

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{ff}{p}\right] - \frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} \tag{6}$$

Die Einsetzung der einzelnen Teile aus (2), (4) und (5) giebt:

$$\frac{1}{P} = B^2\left(\frac{c_1^2}{p_1} + \frac{c_2^2}{p_2}\right) - \frac{B^2}{\left[\frac{1}{p}\right]}\left(\frac{c_1}{p_1} - \frac{c_2}{p_2}\right)^2 \tag{7}$$

Dieses kann auch auf folgende Form gebracht werden:

$$\frac{1}{P} = B^2 \frac{p_1\, c_2^2 + p_2\, c_1^2 + p_3\,(c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \tag{8}$$

Setzt man den mittleren Gewichtseinheits-Fehler $= \pm \mu$, so hat man auch den mittleren Fehler der Seite B, den wir mit $m(B)$ bezeichnen wollen:

$$m(B) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{1}{P}} = \frac{\mu}{\varrho} B \sqrt{\frac{p_1\, c_2^2 + p_2\, c_1^2 + p_3\,(c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}} \qquad (9)\ ^*)$$

Wir wollen auch noch den mittleren Fehler der Längen-Einheit von B einführen, und hiefür das Zeichen $\mu(B)$ setzen, also:

$$\frac{m(B)}{B} = \mu(B) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{p_1\, c_2^2 + p_2\, c_1^2 + p_3\,(c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}} \qquad (10)\ ^*)$$

Nach diesen verschiedenen Formen kann die Genauigkeit der trigonometrischen Übertragung von b auf B beurteilt werden.

Aus der Formel (7) ist zu ersehen, dass mit $c_1 = c_2$, oder mit Winkel (1) = Winkel (2), der zweite Teil ganz fortfällt, und dass dann p_3 gar nicht mehr in der Formel vorkommt; wenn also das Dreieck mit (1) = (2) gleichschenklig ist, also $B = b$, so ist der Winkel (3) bei der Messung *gleichgültig*. Dieses Ergebnis ist zuerst eigentümlich klingend, aber bei näherer Betrachtung ganz sachgemäss, denn wenn man *nur* die Seite B von Fig. 1. (S. 109) bestimmen wollte und B nahezu $= b$ ist, dann brauchte man in der That den Winkel (3) gar nicht oder nur oberflächlich zu messen; da man aber gewöhnlich auch die *andere* Seite, welche (3) gegenüber liegt, haben will, so darf auch der Winkel (3) nicht vernachlässigt werden.

Wenn das Dreieck bei (3) rechtwinklig ist, so wird $c_3 = 0$, B ist dann Kathete, deren mittlerer Fehler nach (10) zu berechnen ist, wobei nun $c_2 = 1 : c_1$ ist.

Gleiche Gewichte.

Aus (8) oder (10) wollen wir auch noch den besonderen Fall herleiten, dass alle Gewichte einander *gleich*, also $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ gesetzt werden; dann wird:

$$\mu(B) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}\,(c_1^2 + c_2^2 + c_1\, c_2)} \tag{11}$$

und für das gleichseitige Dreieck mit $c_1 = c_2 = c_3 = cotg\, 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ giebt dieses:

$$\mu(B) = \sqrt{2}\,\frac{\mu}{\varrho}\, cotg\, 60° \text{ oder } = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}000\,003\,96\,\mu \tag{12}$$

---

*) Es soll für diese und die folgenden Betrachtungen das Zeichen m wie ein Funktionszeichen gebraucht werden, allgemein $m(x)$ = mittlerer Fehler von x, und $\mu(x)$ soll einen mittleren sogenannten *relativen* Fehler bedeuten, nämlich $\mu(x) = \frac{m(x)}{x}$, während μ an und für sich den mittleren Gewichtseinheits-Fehler, d. h. den mittleren Winkelfehler in Sekunden bezeichnet.

Nimmt man $\mu = 1''$, so hat man rund $\mu(B) = 0{,}000\,004$, oder der Übertragungs-Fehler beträgt in diesem Falle 4 Milliontel der Länge, oder 4 Millimeter auf 1 Kilometer.

Sehr ungleiche Gewichte.

Wir betrachten den Fall, dass man die Gewichte p_1 oder p_2 verstärkt oder vermindert, je nachdem die zugehörigen Winkel (1) und (2) mehr oder weniger *spitz* werden. Namentlich ein spitzer Winkel (1) gegenüber der Basis b in Fig. 1. (S. 109) wirkt bekanntlich sehr schädlich, und das zeigt sich in den Formeln dadurch, dass $cotg\,(1) = c_1$ sehr gross wird, wenn (1) klein ist. Nun zeigt aber die Formel (7), dass man dem grossen Werte c_1 dadurch entgegen wirken kann, dass man auch das Gewicht p_1 gross macht, d. h. den Winkel (1) verstärkt misst. Ebenso ist es mit c_2 und p_2.

Wir haben damit bereits den Hauptsatz über Gewichts-Verteilung, dass man einen spitzen Winkel, der einer Basis gegenüber liegt, besonders genau messen soll.

Wir wollen auch noch den Fall vornehmen, dass abwechselnd je einer der drei Winkel des Dreiecks gar nicht gemessen sei, d. h. das Gewicht = Null habe, während die beiden anderen Winkel mit dem Gewichte = 1 gemessen sind. Dann hat man aus (10):

$$\Big(\mu\,(B_{12})\Big)^2 = \left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 (c_2^2 + c_1^2) \text{ mit } p_3 = 0$$

$$\Big(\mu\,(B_{13})\Big)^2 = \left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 \Big(c_2^2 + (c_1 + c_2)^2\Big) \text{ mit } p_2 = 0$$

$$\Big(\mu\,(B_{23})\Big)^2 = \left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 \Big(c_1^2 + (c_1 + c_2)^2\Big) \text{ mit } p_1 = 0$$

Dazu wenn alle drei Winkel gleich gemessen sind:

$$\Big(\mu(B_{123})\Big)^2 = \left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 \left(\frac{c_2^2 + c_1^2 + (c_1 + c_2)^2}{3}\right)$$

Diese 4 Formeln geben die Beziehung:

$$\Big(\mu(B_{123})\Big)^2 = \frac{1}{6}\left[\Big(\mu\,(B_{12})\Big)^2 + \Big(\mu\,(B_{13})\Big)^2 + \Big(\mu\,(B_{23})\Big)^2\right]$$

Ähnliche Beziehungen gelten auch für die mittleren Coordinatenfehler und für die mittleren Punktfehler, wie in unserem I. Band, 3. Aufl. 1888, § 110—113 gezeigt wurde.

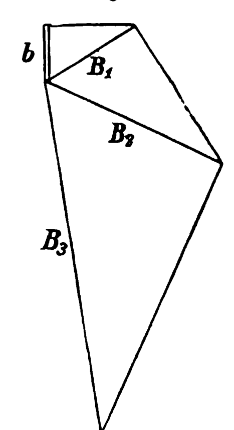


Fig. 2.

Kette von Dreiecken.

In der Dreieckskette Fig. 2. ist b die Basis; daraus wird zuerst durch das erste Dreieck B_1 abgeleitet, dann B_2 durch das zweite Dreieck u. s. w., wir wollen annehmen bis B_n durch ein n^{tes} Dreieck. Jedenfalls entsteht jede Seite B aus der vorhergehenden durch Multiplikation mit einer Sinusfunktion, welche immer die Form hat wie in der Gleichung (11). Wenn die letzte Seite B_n ist, so bekommt man durch wiederholte Anwendung der Gleichung (11):

$$\mu\,(B_n) = \frac{m\,(B_n)}{B_n} = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}\Big([c_1^2] + [c_2]^2 + [c_1\,c_2]\Big)} \quad (13)$$

wobei

$$[c_1^2] = cotg^2\,(1)_1 + cotg^2\,(1)_2 + \ldots .\ cotg^2\,(1)_n \text{ u. s. w.}$$

Die Messungsgewichte der Dreieckswinkel sind dabei alle = 1 angenommen.

Wenn alle Dreiecke, um die es sich handelt, einander ähnlich sind, so wird (13):

$$\mu(B_n) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2n}{3}\left(c_1^2 + c_2^2 + c_1 c_2\right)} \tag{14}$$

und nimmt man alle Dreiecke gleichseitig, also $c_1 = c_2 = c_3 = cotg\, 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, so wird (14):

$$\frac{m(B_n)}{B_n} = \mu(B_n) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{n} = 0{,}000\,004\,\mu\sqrt{n} \tag{15}$$

Dieses ist der relative mittlere Seitenfehler der letzten Seite einer Kette von n gleichseitigen Dreiecken; μ ist der mittlere Winkelfehler.

Höhe eines Dreiecks.

Fig. 3.

Wir bestimmen den mittleren Fehler der Höhe h eines Dreiecks nach Fig. 3. mit der Funktion:

$$h = \frac{b}{sin\,(1)}\, sin\,(2)\, sin\,(3) \tag{16}$$

Diese Funktion wird ebenso behandelt wie früher (1) S. 109. Die verschiedenen Coëfficienten sind, mit der Abkürzung $cotg\,(1) = c_1$ u. s. w.:

$$a_1 = +1 \qquad a_2 = +1 \qquad a_3 = +1$$
$$f_1 = -c_1 h \qquad f_2 = +c_2 h \qquad f_3 = +c_3 h$$

Die Formel (6) § 18. S. 109 giebt damit:

$$\frac{1}{P} = h^2\left(\frac{c_1^2}{p_1} + \frac{c_2^2}{p_2} + \frac{c_3^2}{p_3}\right) - \frac{h^2}{\left[\frac{1}{p}\right]}\left(\frac{c_1}{p_1} - \frac{c_2}{p_2} - \frac{c_3}{p_3}\right)^2 \tag{17}$$

Dieses kann man auch auf folgende Form bringen:

$$\frac{1}{P} = h^2\frac{p_1(c_2 - c_3)^2 + p_2(c_1 + c_3)^2 + p_3(c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \tag{18}$$

Der mittlere Übertragungs-Fehler ist hiernach:

$$\frac{m(h)}{h} = \mu(h) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{p_1(c_2 - c_3)^2 + p_2(c_1 + c_3)^2 + p_3(c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}} \tag{19}$$

Wenn man hier die Bedeutungen $c_1 = cotg\,(1)$ u. s. w. wieder einführt, so nimmt der Zähler von (18) und (19) folgende Form an:

$$p_1\frac{sin^2((2) - (3))}{sin^2(2)\, sin^2(3)} + p_2\frac{sin^2(2)}{sin^2(1)\, sin^2(3)} + p_3\frac{sin^2(3)}{sin^2(1)\, sin^2(2)} \tag{20}$$

Wenn man hier den Winkel (2) = (3) setzt, also das Dreieck gleichschenklig annimmt, so fällt das erste Glied in (20) fort, die Gleichschenkligkeit wirkt also günstig. Wir wollen diese Annahme in (19) einführen, also $c_3 = c_2$ setzen, zugleich auch soll $p_3 = p_2$ gesetzt werden, dieses giebt aus (19) und (20):

$$\mu(h) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{(2p_1 + p_2)\, sin^2(1)}} \text{ oder } = \frac{2\mu}{\varrho\, sin\,(1)}\sqrt{\frac{1}{4p_1 + p_2 + p_3}} \tag{21}$$

Setzt man noch die Gewichte p_1 und $p_2 = p_3 = 1$, so giebt dieses (zu Fig. 3. gehörig):

$$\frac{m(h)}{h} = \mu(h) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{\sin(1)} \sqrt{\frac{2}{3}} \tag{22}$$

Von der Formel (21) kann man auch unmittelbar auf den Rhombus Fig. 5. S. 114 übergehen, doch wollen wir vorher noch eine allgemeinere Aufgabe einschalten.

Diagonale eines Vierecks.

Fig. 4.

In ähnlicher Weise wie für eine Dreiecksseite kann man auch das Gewicht für eine Diagonale B in Fig. 4. bestimmen, wenn auf einer Basis b nach zwei Seiten hin Dreiecke (1) (2) (3) und (1') (2') (3') aufgebaut sind.

In jedem dieser beiden Dreiecke hat man eine Bedingungs-Gleichung, also zusammen:

a) $+(1)+(2)+(3)-180° = 0$

b) $+(1')+(2')+(3')-180° = 0$

Die Diagonale B wird als Funktion gemessener Winkel dargestellt durch die Gleichung:

$$B^2 = a^2 + a'^2 - 2\,a\,a' \cos(3+3') \tag{23}$$

wobei $\quad a = \dfrac{b}{\sin(1)} \sin(2) \quad , \quad a' = \dfrac{b}{\sin(1')} \sin(2')$

Wenn man die Funktion B nach (1), (2) und (3) differentiiert, und wenn man die geometrischen Beziehungen beachtet:

$$a - a' \cos(3+3') = B \cos\alpha, \text{ und } a' \sin(3+3') = B \sin\alpha$$

so findet man:

$$f_1 = -a\cos\alpha \operatorname{cotg}(1), \quad f_2 = +a\cos\alpha \operatorname{cotg}(2), \quad f_3 = +a\sin\alpha$$
$$f_1' = -a'\cos\alpha' \operatorname{cotg}(1'), \quad f_2' = +a'\cos\alpha' \operatorname{cotg}(2'), \quad f_3' = +a'\sin\alpha$$

Wenn man damit ebenso verfährt, wie bei der vorigen Aufgabe (18) — (20), so findet man zuerst, dass sich die Gewichtsreciproke von P in zwei Teile zerlegt, entsprechend den zwei Dreiecken, nämlich:

$$\frac{1}{P} = \mathrm{I} + \mathrm{II} \tag{24}$$

Wir beschäftigen uns zunächst nur mit dem ersten Teil I, die Ausrechnung ist nicht schwierig, jedoch etwas langwierig, das Ergebnis ist:

$$\mathrm{I} = a^2 \frac{p_1(\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{cotg}(2))^2 + p_2(\sin\alpha + \cos\alpha \operatorname{cotg}(1))^2 + p_3 \cos^2\alpha (\operatorname{cotg}(1) + \operatorname{cotg}(2))^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}$$

Den Zähler hievon kann man auf diese Form bringen:

$$p_1 \left(\frac{a\cos(\alpha+(2))}{\sin(2)}\right)^2 + p_2 \left(\frac{a\cos((1)-\alpha)}{\sin(1)}\right)^2 + p_3 \frac{(a\cos\alpha \sin((1)+(2)))^2}{\sin(1)\sin(2)}$$

oder $\quad p_1 \left(\dfrac{b}{\sin(1)} \cos((3)-(2)+\beta)\right)^2 + p_2 \left(\dfrac{a}{\sin(1)} \cos\gamma\right)^2 + p_3 \left(\dfrac{c}{\sin(1)} \cos\alpha\right)^2$

Dieses geht in den entsprechenden Teil von (21) und (22) über, wenn man $\beta = 90°$ setzt, denn dann wird $\cos((3)-(2)+\beta) = \sin((3)-(2))$ und $h = \frac{b}{\sin(1)} \sin(2) \sin(3)$ oder $h = a \sin(3) = c \sin(2)$. Dieser Übergang, der in sich richtig sein muss, dient als Entwicklungs-Probe.

Um nun zusammen zu fassen, bilden wir das mittlere Fehlerquadrat der Diagonale B von Fig. 4. S. 123:

$$(m(B))^2 = \left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 \left\{ \frac{p_1 b^2 \cos^2((3)-(2)+\beta) + p_2 a^2 \cos^2\gamma + p_3 c^2 \cos^2\alpha}{\sin^2(1)(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3)} + \frac{p_1' b'^2 \ldots}{\sin^2(1')(p_1' p_2' \ldots)} \right\} \quad (25)$$

Dabei soll der zweite teilweise nur angedeutete Teil in der Klammer dasselbe für das untere Dreieck von Fig. 4. S. 118 bedeuten, was der erste Teil für das obere Dreieck.

Will man nicht den mittleren Fehler $m(B)$ selbst haben, sondern das Fehler-Verhältnis $m(B):B$, welches wir sonst mit $\mu(B)$ bezeichnet haben, so braucht man nur in (25) alle Masse b, a u. s. w. in Teilen von B auszudrücken, dann liefert die Formel (25) das gewünschte $\mu(B)$.

Fig. 5.

Man kann nach der Formel (25) für jedes Basis-Rhomboid die Fehler-Übertragung von der kurzen Diagonale zur langen Diagonale beurteilen, wenn man ausser der Form des Vierecks auch den mittleren Winkelfehler μ und die sämtlichen Gewichte p kennt.

Man bemerkt sofort, dass diese Gewichte sehr ungleiche Einflüsse auf das Schluss-Ergebnis ausüben, am wichtigsten ist das Gewicht p_1 bzw. p_1', denn in der Formel (25) trägt eine Verstärkung des Gewichtes p_1 wesentlich zur Vergrösserung des Nenners bei und im Zähler kommt p_1 nur in Verbindung mit $\cos((3)-(2)+\beta)$ vor, was mit $\beta = 90°$ und $(2) = (3)$, also in dem wichtigsten Falle, verschwindet.

Wir wollen diesen Fall, $\beta = 90°$ und $p_3 = p_2$, nun behandeln und zugleich annehmen, dass das untere Dreieck in Fig. 4. S. 113 dem oberen Dreieck symmetrisch sei, dass man also den Rhombus Fig. 5. habe. Damit giebt (25):

$$(m(B))^2 = \left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 \left\{ 2 \frac{2h^2}{\sin^2(1)(2p_1 + p_2)} \right\}$$

$$\frac{m(B)}{2h} = \frac{m(B)}{B} = \mu(B) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{\sin(1)} \sqrt{\frac{1}{(2p_1 + p_2)}} \quad (26)$$

Diese Formel kann man auch einfacher aus (22) S. 118 herleiten, denn es ist $m(B) = m(h)\sqrt{2}$ und $\mu(B) = \frac{\mu(h)}{\sqrt{2}}$.

Günstigste Gewichts-Verteilung.

Nun wollen wir die frühere Frage wieder aufnehmen, welche *Verteilung* der Gewichte p_1 und p_2 am günstigsten ist? Es handelt sich dabei darum, den Ausdruck (26) möglichst klein zu machen bei konstanter Summe $p_1 + p_2 + p_3 = p_1 + 2p_2 = [p]$, (indem die Messungs-Arbeit für jeden Winkel dem Gewicht proportional gesetzt wird).

Da die Gewichte in (26) nur im Nenner vorkommen, muss man darnach trachten, die Funktion $f = 2p_1 + p_2$ möglichst gross zu machen, bei konstantem $p_1 + 2p_2 = [p]$. Eliminiert man zu diesem Zwecke p_1, indem man $p_1 = [p] - 2p_2$ in f einsetzt so wird:

$$f = 2[p] - 4p_2 + p_2 = 2[p] - 3p_2$$

und dieses wird am grössten, wenn $p_2 = 0$ gesetzt wird, dadurch muss aber $p_1 = [p]$ werden, und man hat aus (26):

$$\mu(B)\,min = \frac{\mu}{\varrho}\frac{1}{sin(1)}\sqrt{\frac{1}{2[p]}} \tag{27}$$

Dieses Ergebnis, dass nur der *eine* Winkel (1) an der Spitze, die beiden Basiswinkel (2) und (3) aber gar nicht zu messen sind, mag zuerst sonderbar erscheinen; man muss es aber richtig auffassen: dasselbe gilt, *wenn* das Dreieck gleichschenklig ist; man muss also doch mindestens so viel von den Basiswinkeln messen, dass man weiss, ob die Gleichschenkligkeit vorhanden ist. Man kann also sagen: Wenn man durch vorläufige Messungen gefunden hat, dass ein Dreieck von der Form Fig. 3. S. 112 sehr nahe gleichschenklig ist, dann kann man, wenn man nur auf die Höhe ausgeht, alle weitere Winkelmess-Arbeit auf den spitzen Winkel (1) konzentrieren.

Wir wollen nun in (26) statt des Winkels (1) das Vergrösserungs-Verhältnis $B : b = v$ einführen, oder auch, indem wir nach Fig. 5. die Hälften nehmen, $h : c = v$ setzen, wobei $sin(1) = 2\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi$, und:

$$sin\,\varphi = \frac{c}{\sqrt{c^2 + h^2}} \qquad cos\,\varphi = \frac{h}{\sqrt{c^2 + h^2}}$$

Wenn man damit $sin(1)$ in v ausdrückt und in (26) einsetzt, so bekommt man für den Rhombus Fig. 5. S. 114:

$$\frac{1}{sin(1)} = \frac{1 + v^2}{2v} \tag{28}$$

$$\mu(B) = \frac{\mu}{\varrho}\frac{1 + v^2}{2v}\sqrt{\frac{1}{2p_1 + p_2}} \tag{29}$$

und das Minimum, wie bei (27):

$$\mu(B)\,min = \frac{\mu}{\varrho}\frac{1 + v^2}{2v}\sqrt{\frac{1}{2[p]}} \tag{30}$$

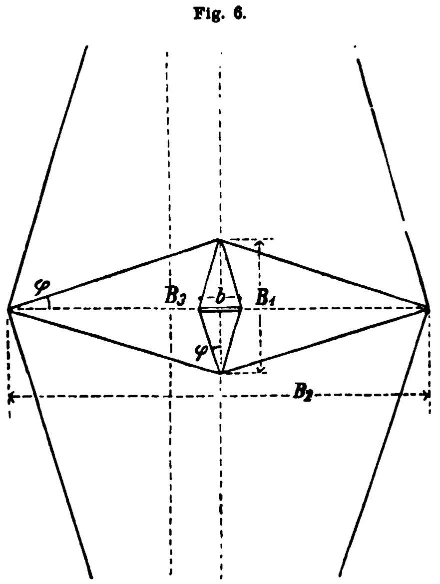
Das rhombische Multiplikations-Netz.

Nach Andeutung von Fig. 6. kann man die rhombische Vergrösserung wiederholt anwenden. Wenn die Rhomben alle ähnlich und ähnlich gemessen sind, so hat man nach (26):

$$\mu(B_1) = \frac{\mu}{\varrho}\frac{1}{sin(1)}\sqrt{\frac{1}{2p_1 + p_2}}$$

$$\mu(B_2) = \frac{\mu}{\varrho}\frac{1}{sin(1)}\sqrt{\frac{1}{2p_1 + p_2}} \quad \text{u. s. w.}$$

Fig. 6.



Dieses giebt eine ähnliche Fehler-Fortpflanzung, wie wir schon bei Fig. 2. S. 111 untersucht haben, und man hat daher für r malige Rhomben-Wiederholung:

$$\frac{m(B_r)}{B_r} = \mu(B_r) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{\sin(1)} \sqrt{\frac{1}{2p_1 + p_2}} \sqrt{r} \tag{31}$$

Bleiben wir zunächst bei *zwei*maliger Wiederholung stehen, so haben wir mit $r = 2$:

$$\mu(B_r) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{\sin(1)} \sqrt{\frac{2}{2p_1 + p_2}}$$

Wenn nun wieder $B_2 : b = v$ werden soll, so muss $B_2 : B_1 = B_1 : b = \sqrt{v}$ sein, und eine ähnliche Rechnung wie bei (28) giebt: $\frac{1}{\sin(1)} = \frac{1+v}{2\sqrt{v}}$,

folglich

$$\mu(B_2) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1+v}{2\sqrt{v}} \sqrt{\frac{2}{2p_1 + p_2}} \tag{32}$$

Dieses gilt für beliebige p_1 und $p_3 = p_2$; dagegen im günstigsten Falle mit $p_1 = p_1 + p_2 + p_3 = [p]$ hat man:

$$\mu(B)\, min = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1+v}{4\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{[p]}} \tag{33}$$

Nun kann man die Ausdrücke (30) und (32) zweckmässig vergleichen, es sei kurz $(\mu)'$ der Fehler-Ausdruck nach (30) für *einen* Rhombus, und $(\mu)''$ für *zwei* Rhomben, und das Vergrösserungs-Verhältnis v sei in beiden Fällen dasselbe. Dann hat man das Verhältnis $(\mu'') : (\mu')$ oder $\mu(B_2) : \mu(B) = q$ wie folgt:

$$q = \frac{1+v}{\sqrt{2v}} : \frac{1+v^2}{2v} \quad , \quad q = \frac{1+v}{1+v^2}\sqrt{2v}$$

Dieses Verhältnis ist immer grösser als 1 und giebt z. B.

wenn $v = 5$, $q = 0{,}730$, wenn $v = 10$, $q = 0{,}487$.

Der Doppelrhombus ist also immer günstiger als der einfache Rhombus.

Günstigster Spitzen-Winkel (1).

Im einzelnen Rhombus giebt es kein Mass für den Vorteil oder Nachteil eines mehr oder weniger spitzen Winkels (1), weil dem Vorteil in der Genauigkeit einerseits, der Nachteil in der geringeren Vergrösserung $B : b$ andererseits gegenübersteht, was sich hier nicht abwägen lässt; dagegen kann man bei *mehr*facher Anwendung ähnlicher Rhomben überlegen, ob es günstiger ist, den Winkel (1) *sehr* spitz zu machen und *wenige* Rhomben zu haben, oder umgekehrt.

Helmert hat diese Frage in seinen „Studien über rationelle Vermessungen", III, 45. (Schlömilchs „Zeitschr. f. Math. u. Ph." 1868) aufgestellt, und dahin beantwortet, dass bei konstanter Summe $[p]$ der günstigste Winkel $(1) = 2\varphi = 33° 32'$ ist.

§ 19. Fehler-Fortpflanzung in Dreiecksketten.

Wir haben schon in § 18. S. 112 Fehlerverhältnisse in Dreiecksketten behandelt, nämlich die Genauigkeit *einer* Schlussdreiecksseite. Wir gehen nun über zu der Frage nach der Genauigkeit der Gesamtausdehnung einer Kette.



Fig. 1.

In der gitterförmigen Kette gleichseitiger Dreiecke, welche in Fig. 1. angedeutet ist, soll es sich um die *Summe* mehrerer Dreiecksseiten, z. B. $s_1 + s_2 + s_3$ handeln, wobei die einzelnen Seiten s_1, s_2, s_3 aus derselben Basis b, teilweise durch dieselben Winkel abgeleitet sind.

In jedem einzelnen Dreiecke seien alle drei Winkel gleich genau gemessen, und ausgeglichen, also z. B.:

$$\left.\begin{array}{ll}
a) & (1)+(2)+(3)-180^\circ=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
b) & .\;.\;.\;.\;.\;. \;(4)+(5)+(6)-180^\circ=0 \;.\;.\;.\;.\;. \\
c) & .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(7)+(8)+(9)-180^\circ=0 \\
d) & .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Alle diese Bedingungs-Gleichungen stehen ganz unabhängig von einander; wenn man sie aber trotzdem als *ein* System zur Ausgleichung der Dreieckskette als Ganzes auffassen will, so geben sie sehr einfache Normalgleichungs-Coëfficienten, nämlich: $[a\,a] + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$ und im ganzen:

$$\left.\begin{array}{llll}
[a\,a]=3 & [a\,b]=0 & [a\,c]=0 & [a\,d]=0 \\
 & [b\,b]=3 & [b\,c]=0 & [b\,d]=0 \\
 & & [c\,c]=3 & [c\,d]=0 \\
 & & & .\;.\;.\;.\;.\;.
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Wenn man nach der Ausgleichung den mittleren Fehler oder das Gewicht der Summe $s_1 + s_2 + s_3$ berechnen will, so hat man die Gewichtsformel für bedingte Beobachtungen anzuwenden (vgl. Band I, 4. Aufl. 1895, S. 124, Gleichung (12)), nämlich:

$$\frac{1}{P} = [f\,f] - \frac{[a\,f]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,f\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \frac{[c\,f\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} - \ldots \quad (3)$$

Diese Formel vereinfacht sich aber in unserem Fall sehr bedeutend; zunächst wird wegen $[a\,b]=0$, der Wert $[b\,b\,.\,1]=[b\,b]$ und $[b\,f\,.\,1]=[b\,f]$ u. s. w., und deswegen wird (3) zuerst so:

$$\frac{1}{P} = [f\,f] - \frac{[a\,f]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,f]^2}{[b\,b]} - \frac{[c\,f]^2}{[c\,c]} - \ldots \quad (4)$$

Nun muss man die Funktion F näher betrachten:

$$F = s_1 + s_2 + s_3$$

$$F = \frac{b}{\sin(1)}\sin(2) + \frac{b}{\sin(1)}\frac{\sin(3)\sin(5)}{\sin(4)\sin(7)}\sin(8)$$

$$+ \frac{b}{\sin(1)}\frac{\sin(3)}{\sin(4)}\frac{\sin(5)}{\sin(7)}\frac{\sin(9)}{\sin(10)}\frac{\sin(11)}{\sin(13)}\sin(14) \quad (5)$$

Die Differential-Quotienten sind:

$$\left.\begin{array}{l}
f_1 = \dfrac{\partial F}{\partial(1)} = -s_1\,cotg\,(1) - s_2\,cotg\,(1) - s_3\,cotg\,(1) \\
f_2 = \dfrac{\partial F}{\partial(2)} = +s_1\,cotg\,(2) \\
f_3 = \dfrac{\partial F}{\partial(3)} = \qquad\qquad + s_2\,cotg\,(3) + s_3\,cotg\,(3) \\
f_4 = \dfrac{\partial F}{\partial(4)} = \qquad\qquad - s_2\,cotg\,(4) - s_3\,cotg\,(4)
\end{array}\right\} \quad (6)$$

. . . .

In dieser Weise bekommt man 15 Werte f, welche wir nun, mit Einführung von $(1) = (2) = (3) = \ldots = 60°$ und $cotg\,60° = c$, sowie $s_1 = s_2 = s_3 = \ldots = s$ so zusammenstellen:

$$\left.\begin{array}{lll} f_1 = -3\,s\,c & f_7 = -2\,s\,c & f_{13} = -1\,s\,c \\ f_2 = +1\,s\,c & f_8 = +1\,s\,c & f_{14} = +1\,s\,c \\ f_3 = +2\,s\,c & f_9 = +1\,s\,c & f_{15} = \quad 0 \\ & & \\ f_4 = -2\,s\,c & f_{10} = -1\,s\,c & \\ f_5 = +2\,s\,c & f_{11} = +1\,s\,c & \\ f_6 = \quad 0 & f_{12} = \quad 0 & \end{array}\right\} \tag{7}$$

Nun sieht man zuerst aus der Verbindung mit (1), dass

$$[a\,f] = f_1 + f_2 + f_3 = 0, \qquad [b\,f] = f_4 + f_5 + f_6 = 0, \qquad [c\,f] = 0 \text{ u. s. w.}$$

Damit wird die Gewichts-Formel (3) sehr einfach, nämlich:

$$\frac{1}{P} = [f\,f] = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + \ldots \tag{8}$$

Setzt man hier die Werte f nach (7) ein, so findet man:

$$\frac{1}{P} = (9 + 1 + 4 + 4 + 4 + 0 \ldots)\,s^2\,c^2 = 32\,s^2\,c^2 = 32\,s^2\,cotg^2\,60° \tag{9}$$

Indessen gilt das zunächst nur für den Fall *dreier* Seiten $s_1 + s_2 + s_3$.

Wichtiger wird es sein, das allgemeine Gesetz der Gewichts-Formel (9) für irgend welche Seitenzahl zu bestimmen, etwa für n Seiten nach der Formel:

$$F_n = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \ldots s_n \tag{10}$$

Denkt man sich hiezu die Reihe (5) fortgesetzt, so sieht man leicht, dass die Winkel (2), (8) und (14) nur in jedem Gliede *ein*mal vorkommen, der Winkel (1) kommt in allen n Gliedern vor, und ähnliche Gesetze zeigen sich auch im übrigen, so dass man folgendes findet:

Winkel (1) giebt $(-s\,c - s\,c - s\,c \ldots)^2$ . . . . . $= (n\,s\,c)^2 = n^2\,(s\,c)^2$

" (2), (8), (14) ... geben $(s\,c)^2 + (s\,c)^2 + (s\,c)^2 + \ldots$ . . . . . $= n\,(s\,c)^2$

Die Gruppe $\dfrac{(3)\,(5)}{(4)\,(7)}$ giebt . . . . . . + ... $= 4\,(n-1)^2\,(s\,c)^2$

Die Gruppe $\dfrac{(9)\,(11)}{(10)\,(13)}$ giebt . . . . . . + ... $= 4\,(n-2)^2\,(s\,c)^2$

Die nächste Gruppe giebt . . . . $= 4\,(n-3)^2\,(s\,c)^2$

. . . .

Die letzte derartige Gruppe giebt . . . . $4\,(1^2)\,(s\,c)^2$

Im ganzen hat man:

$$\frac{1}{P_n} = \Big(n^2 + n + 4\,\big((n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots 2^2 + 1^2\big)\Big)\,(s\,c)^2$$

$$= -3\,n^2 + n + 4\,\big(n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots 2^2 + 1^2\big)\big)\,(s\,c)^2$$

Nun ist aber die Summe der n ersten Quadrate bekanntlich:

$$n^2 + (n-1)^2 + \ldots 2^2 + 1^2 = \frac{2\,n^3 + 3\,n^2 + n}{6}$$

und damit wird:

$$\frac{1}{P_n} = \left(-3\,n^2 + n + 4\,\frac{2\,n^3 + 3\,n^2 + n}{6}\right)s^2\,c^2 = \frac{4\,n^3 - 3\,n^2 + 5\,n}{3}\,s^2\,c^2$$

Dabei ist $c = cotg\,60° = 0{,}577$, $c^2 = \frac{1}{3}$, und wenn man nun den mittleren Fehler eines gemessenen Winkels mit μ einführt, so ist der mittlere Fehler der Seitensumme $s_1 + s_2 + s_3 \ldots s_n$, mit Anwendung der Bezeichnungsart der Anmerkung S. 110:

$$m\,(n\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\, s\; cotg\, 60° \sqrt{\frac{4\,n^2 - 3\,n + 5\,n}{3}} \qquad (11)$$

Meist will man nicht den Fehler selbst haben, sondern das Verhältnis des Fehlers zu $s_1 + s_2 + \ldots s_n$ oder den sogenannten relativen Fehler, dieser ist:

$$\frac{m\,(n\,s)}{n\,s} = \mu\,(n\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\, cotg\, 60° \sqrt{\frac{4\,n^2 - 3\,n + 5}{3\,n}} \qquad (12)$$

Fig. 2.

Nachdem wir so den Fall der Dreieckskette Fig. 1. S. 117 in aller Ausführlichkeit behandelt haben, wollen wir noch einige andere ähnliche Fälle betrachten, jedoch nur die Schluss-Ergebnisse hier mitteilen, da die Entwicklung nach dem vorstehenden keine Schwierigkeit bieten kann.

In Fig. 2. soll es sich um die Summe $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots s_n$ handeln; der mittlere Fehler dieser Summe wird gefunden:

$$m\,(n\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\, s\; cotg\, 60° \sqrt{\frac{4\,n^3 + 3\,n^2 + 5\,n}{3}} \qquad (13)$$

Nun kann man die zwei Fälle von Fig. 1. S. 117 und Fig. 2. zusammen nehmen.

Fig. 3.

Wenn man hiernach in Fig. 3. die Summe der auf beiden Seiten der Kette liegenden Seiten betrachtet:

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots s_n$$
$$+ s_1' + s_2' + s_3' + \ldots s_n',$$

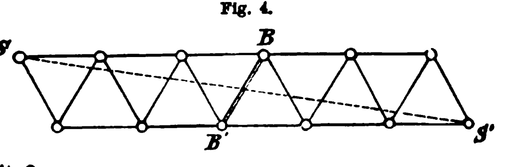
so findet man dafür den mittleren Fehler durch Zusammensetzung von (11) und (13), nämlich:

$$m\,(n\,s + n'\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\, s\; cotg\, 60° \sqrt{\frac{(4\,n^3 - 3\,n^2 + 5\,n) + (4\,n'^3 + 3\,n'^2 + 5\,n')}{3}} \qquad (14$$

Nimmt man hier $n' = n$ und $n + n' = v$, so wird:

$$m\,(v\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\, s\; cotg\, 60° \sqrt{\frac{8\,n^3 + 10\,n}{3}} \text{ oder } = \frac{\mu}{\varrho}\, s\; cotg\, 60° \sqrt{\frac{v^3 + 5\,v}{3}} \qquad (15)$$

Fig. 4.



Eine andere Zusammenfassung von Fig. 1. und Fig. 2. zeigt Fig. 4., wobei es sich um die Diagonale $S\,S'$ handelt, welche näherungsweise etwa $= S\,B + B'\,S'$ gesetzt werden kann. Hiefür ist mit zweifacher Anwendung von (11), mit $2\,n = v$:

$$m(v\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\, s\; cotg\, 60° \sqrt{\frac{8\,n^3 - 6\,n^2 + 10\,n}{3}} = \frac{\mu}{\varrho}\, s\; cotg\, 60° \sqrt{\frac{2\,v^3 - 3\,v^2 + 10\,v}{6}} \qquad (16)$$

Einen weiteren Fall nehmen wir mit Fig. 5. vor. Die Basis b liegt in der Kettenrichtung selbst. Für die Summe nach der einen Seite $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots s_n$ findet man:

Fig. 5.

$$m(n\,s) = \frac{\mu}{\varrho} \, cotg\, 60^\circ \sqrt{\frac{4\,n^3 + 9\,n^2 + 5\,n}{3}} \tag{17}$$

Für die Gesamtsumme $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_1' + s_2' + s_3' + \ldots$ genügt es nicht, diese Formel (17) zweifach anzuwenden, denn der Winkel, welcher der Basis b gegenüber liegt, hat auf beide Seiten Einfluss. Die selbständige Entwicklung für die Summe $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots s_n + s_1' + s_2' + s_3' + \ldots s_n'$ giebt:

$$m(b + n\,s + n'\,s) = \frac{\mu}{\varrho} \, cotg\, 60^\circ \sqrt{(n + n')^2 + \frac{4n^3 + 6n^2 + 5n}{3} + \frac{4n'^3 + 6n'^2 + 5n'}{3}} \tag{18}$$

Setzt man hier $n' = n$, so wird:

$$m\,((2\,n + 1)\,s) = \frac{\mu}{\varrho} \, s\, cotg\, 60^\circ \sqrt{\frac{8\,n^3 + 24\,n^2 + 10n}{3}} \tag{19}$$

Die ganze abgeleitete Länge ist hier $= (2\,n + 1)\,s$, weil das Mittelstück s als fehlerfreie Basis mitgerechnet wird; wir wollen deswegen nun setzen $2\,n + 1 = v$, und damit kann man das Vorstehende auf folgende Form bringen:

$$m\,(v\,s) = \frac{\mu}{\varrho} \, s\, cotg\, 60^\circ \sqrt{\frac{v^3 + 3\,v^2 - 4\,v}{3}} \tag{20}$$

Vergleichen wir die Fehlerformeln (15), (16) und (20) für die drei Hauptfälle, so ergiebt sich, dass der dritte Fall (20) mit Fig. 5. etwas ungünstiger ist, als die beiden ersten Fälle, und daraus folgt, dass es besser ist, die Basis b *quer* zur Kette zu legen, wie in Fig. 3. und 4., als nach der Längsrichtung, Fig. 5.

Wenn aber die Kette sehr lang ist, d. h. n oder v sehr gross, so kann man alle Formeln näherungsweise als *gleich* betrachten, indem man n und n^2 gegen n^3 vernachlässigt. Man sieht dann auch, dass die Formeln mit v allgemein die Hälfte der entsprechenden Formeln für n geben, dass es also jedenfalls günstiger ist, die Basis in die Mitte als an das Ende der Kette zu legen, indem z. B. die Verdoppelung der Kettenlänge von der Mitte aus nur das $\sqrt{2}$fache des Fehlers, dagegen von einem Ende aus das $\sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$fache giebt.

Mit der angegebenen Näherung haben wir aus (11):

$$m\,(n\,s) = \frac{\mu}{\varrho} \, s\, cotg\, 60^\circ \sqrt{\frac{4\,n^3}{3}} \tag{21}$$

Oft will man nicht den Fehler m selbst haben, sondern das Verhältnis des Fehlers zu der fraglichen Länge $s_1 + s_2 + \ldots s_n$ oder den sogenannten relativen Fehler. Derselbe ist für (21):

$$\mu\,(n\,s) = \frac{m\,(n\,s)}{n\,s} = \frac{\mu}{\varrho} \, cotg\, 60^\circ \sqrt{\frac{4\,n}{3}} \tag{22}$$

Oder da $cotg\, 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, haben wir:

$$\mu\,(n\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\,\frac{2}{3}\,\sqrt{n}$$

Setzt man rund $\mu = \pm 1''$, so giebt dieses:

$$\mu\,(n\,s) = 0{,}000\,003\,23\,\sqrt{n}$$

Dieses ist der relative Fehler für n fache Ketten-Ausdehnung von der Basis an einem Ende der Kette. Ist dagegen die Basis in der Mitte, und dehnt sich die Kette nach beiden Seiten je um das $\frac{v}{2}$fache der Basis, also im ganzen wieder um das v fache aus, so bekommt man:

$$\mu\,(v\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\,\frac{1}{3}\,\sqrt{v} \text{ oder } = 0{,}000\,001\,62\,\sqrt{v}$$

Vergleichung der Rhomben-Diagonale mit der Gitterlinie.

Von allen Vergleichungen, welche zwischen den Formeln dieses § unter sich und mit denen des vorhergehenden § 18. angestellt werden können, wollen wir hier nur die wichtigste herausheben, entsprechend Fig. 6., wo eine Rhomben-Diagonale B und eine Gitterlinie B, beide $= 5\,b$, dargestellt sind.

Für die mittleren Fehler haben wir nach (29) § 18., S. 115, und nach (20) § 19., S. 120:

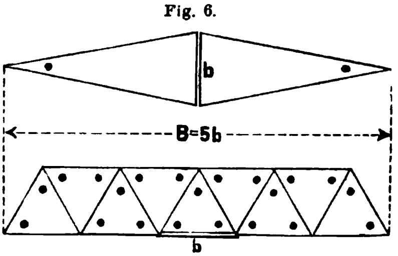
$$\text{Rhombus:}\quad \mu\,(B) = \frac{\mu}{\varrho}\,\frac{1+v^2}{2\,v}\,\sqrt{\frac{1}{2\,p_1 + p_2}}$$

$$\text{Gitter:}\quad \mu\,(B) = \frac{\mu}{\varrho}\,cotg\,60^\circ\,\sqrt{\frac{v^2 + 3\,v - 4}{3\,v}}$$

Nimmt man im ersten Falle $p_1 = p_2 = 1$, also $2\,p_1 + p_2 = 3$ und in beiden Fällen $\mu =$ rund $\pm 1''$ und $v = 5$, so erhält man:

Rhombus $\mu\,(B) = 0{,}000\,007\,27$ rund $= 7$ Milliontel
Gitter $\mu\,(B) = 0{,}000\,004\,34$ „ $= 4$ Milliontel

Fig. 6.



Die Gitterlinie hat also einen kleineren Fehler als die Rhomben-Diagonale; dieses Verhältnis gestaltet sich aber ungünstiger, wenn man die Zahl der Winkel-Messungen überlegt. Der Rhombus hat nur 6 Winkel, und von diesen brauchen sogar die 4 Basiswinkel nur genähert bekannt zu sein, man kann im Rhombus fast die ganze Arbeit auf die *zwei* spitzen Winkel konzentrieren, dagegen hat das Gitter 9 Dreiecke mit 27 Winkeln, oder wenn man die unwichtigen Winkel ausscheidet, immer noch 21 Winkel.

Trotz dieses starken theoretischen Missverhältnisses könnte doch auch das Gitternetz, wegen der *kurzen* Seiten, unter Umständen praktische Verwendung als Basisnetz finden. (Vgl. S. 108.)



Azimut-Übertragung.

Die Azimut-Übertragung längs einer Dreieckskette besteht einfach in der *Summierung* aller längs eines Polygons auftretender Dreieckswinkel, z. B. in Fig. 1. (S. 117) besteht die Azimut-Übertragung längs $s_1 + s_2 + s_3$ in der Summierung $(3) + (1) + (6) + (9) + (7) + \ldots$

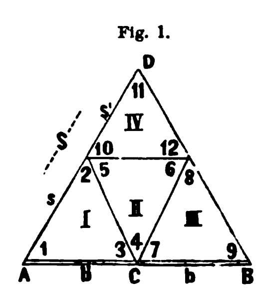
Wenn jedoch die Azimut-Übertragung längs der Haupterstreckung einer Dreieckskette besonders wichtig ist, so soll man schon die Anordnung der Messungen darnach einrichten, also nicht bloss die einzelnen je 60° betragenden Winkel in den Ketten von Fig. 1. bis 5. S. 117—120 messen, sondern die je nahezu 180° betragenden Winkel der in der Haupterstreckung liegenden Seiten.

Besser noch ist es, für die Zwecke der Azimut-Übertragung die Dreiecksseiten besonders anzuordnen, wie z. B. Bessel bei der Gradmessung in Ostpreussen gethan hat. Dieses ist aus dem Netzbilde der Gradmessung in Ostpreussen in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 499 zu ersehen, indem auf der nordwestlichen Gesamterstreckung Tunz-Galtgarben-Nidden-Memel nur zwei Zwischenpunkte Galtgarben und Nidden sind, während auf der südöstlichen Grenze 7 Zwischenpunkte zur Azimut-Übertragung nötig wären.

§ 20. Verschiedene Fehler-Betrachtungen zur Anlage von Dreiecks-Netzen.

I. Grösse der Dreiecke.

Fig. 1.



Eine erste wichtige Frage betrifft die *Grösse* der Dreiecksseiten. Soll man, wenn man die Wahl hat, grosse oder kleine Dreiecke nehmen?

Diese Frage ist sehr unbestimmt, wir wollen ihr mit Fig. 1. folgende bestimmtere Fassung geben:

Auf einer Geraden sind drei feste Punkte A, C, B gegeben, und zwar, wie wir meist bei Grundlinien annehmen, fehlerfrei gegeben, ein Punkt D kann entweder durch 4 Dreiecke I, II, III, IV mit Benützung des Zwischenpunktes C, oder durch *ein* Dreieck ABD ohne Benützung des Zwischenpunktes C trianguliert werden; welches ist das günstigere?

Nimmt man alle 4 Dreiecke, so hat man zunächst 4 Summen-Gleichungen:

$$(1) + (2) + (3) - 180° = 0, \quad (4) + (5) + (6) - (180) = 0, \quad (7) + (8) + (9) - 180° = 0,$$
$$(10) + (11) + (12) - 180° = 0 \qquad (1)$$

und dazu eine Seiten-Gleichung, welche die Beziehung zwischen b' und b ausdrückt, d. h.:

$$b' \frac{\sin(1)}{\sin(2)} \frac{\sin(5)}{\sin(6)} \frac{\sin(8)}{\sin(9)} = b$$

oder mit der Abkürzung $cotg\,(1) = c_1$ u. s. w. giebt dieses:

$$c_1 v_1 - c_2 v_2 + c_5 v_5 - c_6 v_6 + c_8 v_8 - c_9 v_9 + \ldots = 0 \qquad (2)$$

Die Seite $AD = S$ wird in b' ausgedrückt durch die Funktion:

$$S = s + s' = b' \frac{\sin(3)}{\sin(2)} + b' \frac{\sin(1)\sin(4)\sin(12)}{\sin(2)\sin(6)\sin(11)}$$



Das Weitere wollen wir nur noch mit der Vereinfachung machen, dass alle Dreiecke gleichseitig seien, also $b = b' = s = s'$ und $c_1 = c_2 \ldots = cotg\, 60° = c$. Damit giebt die Weiterrechnung für das Gewicht P der Seite S:

$$\frac{1}{P} = \left(10\, c^2 - \frac{0}{3} - \frac{0}{3} - \frac{0}{3} - \frac{0}{3} - \frac{16\, c^4}{6\, c^2}\right) b^2 = 7{,}333\, c^2\, b^2$$

also der mittlere Fehler von S:

$$m\,(S) = \frac{\mu}{\varrho}\, cotg\, 60°\, b\, \sqrt{7{,}333}$$

oder, da $2\,b = S$ ist, der relative Fehler (vgl. Anmerkung S. 110):

$$\mu\,(S) = \frac{\mu}{2\,\varrho}\, cotg\, 60° \sqrt{7{,}333} = 1{,}354\, \frac{\mu}{\varrho}\, cotg\, 60° = 0{,}000\,003\,79\, \mu \tag{3}$$

Wenn man dagegen die Seite S aus dem *einen* grossen Dreieck $A\,B\,D$ bestimmt, so bekommt man nach (12) § 18. S. 110:

$$\mu\,(S) = 1{,}4142\, \frac{\mu}{\varrho}\, cotg\, 60° = 0{,}000\,008\,96\, \mu \tag{4}$$

Die Bestimmung (4) der Seite S aus dem *einen* grossen Dreiecke ist also hier fast gleich günstig wie die Bestimmung (3) aus den 4 kleinen Dreiecken, trotzdem, dass mit den 4 kleinen Dreiecken der günstige Zwischenpunkt C mit benützt wurde, der in dem einen grossen Dreieck gar nicht vorkommt.

Bedenkt man noch, dass in den 4 Einzeldreiecken zusammen 4 mal so viel Winkel zu messen sind, als in dem *einen* Gesamtdreieck, oder dass man bei gleicher Winkelmessungs-Summe (Arbeit) die Seite S aus *einem* grossen Dreiecke nahezu doppelt so genau bekommt, als aus den vier kleinen Dreiecken, so erscheint das *eine* grosse Dreieck im Vorteil.

II. Diagonalen-Kontrolle.

Fig. 2.

In Fig. 2. haben wir ein Quadrat mit zwei Diagonalen gezeichnet, wobei die Seite b als Grundlinie gilt, aus welcher die anderen Seiten s', s und s'' trigonometrisch abgeleitet werden sollen.

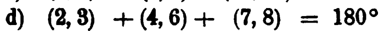
Die ganze Figur ist bestimmt, auch wenn nur *eine* Diagonale eingemessen ist, und wir wollen untersuchen, welche Genauigkeits-Änderung stattfindet, je nachdem eine oder beide Diagonalen d und d' gemessen sind.

Die Messungen seien nach Richtungen gemacht, so dass für das volle Netz mit beiden Diagonalen 12 Richtungen gleichgewichtig vorliegen; wenn dagegen die Diagonale d' nicht vorhanden ist, fallen die beiden Richtungen (5) und (11) fort.

Im ganzen hat das Netz vier Bedingungs-Gleichungen, nämlich eine Seiten-Gleichung und drei Winkelsummen-Gleichungen, diese vier Gleichungen sind:

$$\text{a)}\quad \frac{\sin(2,3)\,\sin(4,5)\,\sin(7,9)\,\sin(10,12)}{\sin(1,3)\,\sin(4,6)\,\sin(8,9)\,\sin(10,11)} = 1 \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{b)}\ (10,12) + (1,2) + (8,9) = 189° \\ &\text{c)}\ (1,3) + (4,5) + (11,12) = 180° \\ &\text{d)}\ (2,3) + (4,6) + (7,8) = 180° \end{aligned}\right\} \tag{6}$$





Wenn es sich um die Bestimmung des Gewichtes der Seite s handelt, so kommt hiezu noch:

$$\text{f)}\quad \frac{s}{b} = \frac{\sin(2,3)\sin(10,12)}{\sin(4,6)\sin(8,9)}$$

Um die Gleichungen a) und f) linear zu machen, braucht man bekanntlich die Cotangenten der Winkel als Coëfficienten, und da in unserem Falle nur Winkel von 45° oder 90° vorkommen, für welche man z. B. hat:

$$cotg\,(2,3) = cotg\,45° = 1 \quad , \quad cotg\,(7,9) = cotg\,90° = 0,$$

so werden die linearen Gleichungen sehr einfach.

Auf diese Weise bekommt man aus a) eine Gleichung von folgender Form:

$$-v_2 + v_3 - v_4 + v_5 + v_8 - v_9 + v_{10} - v_{11} + \ldots = 0 \qquad (7)$$

Die Gleichung b) wird geben:

$$-v_1 + v_2 - v_8 + v_9 - v_{10} + v_{12} + \ldots = 0 \qquad (8)$$

Das ganze so zu bildende Coëfficienten-System ist in folgender Tabelle enthalten:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
a	.	−1	+1	−1	+1	.	.	+1	−1	+1	−1	.
b	−1	+1	.	.	.	.	.	−1	+1	−1	.	+1
c	−1	.	+1	−1	+1	.	.	.	.	.	−1	+1
d	.	−1	+1	−1	.	+1	−1	+1	.	.	.	.
f	.	−1	+1	.	.	.	.	+1	−1	.	.	.

(9)

Dieses giebt $[a\,a] = (-1)^2 + (+1)^2 + \ldots = +8$

$[a\,b] = (-1)(+1) + \ldots \quad = -4$

Das ganze derartige Coëfficienten-System ist:

$$\begin{array}{ccccc} \underline{+8} & -4 & +4 & +4 & +4 \\ & \underline{+6} & +2 & -2 & -3 \\ & & \underline{+6} & +2 & +1 \\ & & & \underline{+6} & +3 \\ & & & & \underline{+4} \end{array} \qquad (10)$$

Durch allmähliche Elimination erhält man:

$$\begin{array}{cccc} \underline{+4} & +4 & 0 & -1 \\ & \underline{+4} & 0 & -1 \\ & & \underline{+4} & +1 \\ & & & \underline{+2} \end{array} \qquad (10_a)$$

$$\begin{array}{ccc} \underline{0} & 0 & 0 \\ & \underline{+4} & +1 \\ & & \underline{+1{,}75} \end{array} \qquad (10_b)$$

$\underline{+1{,}50} = \frac{1}{P}$ für die Seite s, mit zwei Diagonalen.

Wenn nun μ der mittlere Fehler einer gemessenen Richtung ist, so ist der mittlere Fehler des Verhältnisses $s:b$, oder der sogenannte relative Fehler der trigonometrischen Übertragung von b nach s folgendes:

$$\mu\,(s) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{1{,}50} \qquad (11)$$

Nach diesem nehmen wir an, dass die Diagonale d' nicht gemessen sei, dann fällt die Seiten-Gleichung a) und die zweite Dreiecks-Gleichung c) fort, im übrigen bleibt die Rechnung wie vorhin und giebt:

	1	2	3	4	6	7	8	9	10	12
a	−1	+1	.	.	.	.	−1	+1	−1	+1
b	.	−1	+1	−1	+1	−1	+1	.	.	.
f	.	−1	+1	.	.	.	+1	−1	.	.

+6	−2	−3
	+6	+3
		+4
	+5,333	+2,000
		+2,500
		$+1,750 = \frac{1}{P}$ für s, mit *einer* Diagonale d.

Nachdem wir diesen Fall in aller Ausführlichkeit vorgerechnet haben, mag es genügen, für die beiden anderen Fälle s' und s'' die Ergebnisse mitzuteilen, wie in folgender Zusammenstellung geschieht:

Berechnete Seite	mit *einer* Diagonale d	mit *zwei* Diagonalen d und d'	
s	$\frac{1}{P} = 1,75$	$\frac{1}{P} = 1,50$	$\sqrt{\frac{1,75}{1,50}} = 1,080$
s'	$\frac{1}{P'} = 4,00$	$\frac{1}{P'} = 3,75$	$\sqrt{\frac{4,00}{3,75}} = 1,033$
s''	$\frac{1}{P''} = 3,75$	$\frac{1}{P''} = 3,75$	

Wie man hieraus sieht, ist der Genauigkeits-Gewinn durch Hinzunehmen der zweiten Diagonale nicht bedeutend. Bei s'' ändert die zweite Diagonale d' überhaupt nichts, wie auch aus Fig. 2. S. 128 unmittelbar zu ersehen ist.

In der letzten Spalte vorstehender Zusammenstellung sind die Fehler-Verhältnisse 1,080 und 1,033 für beide Fälle angegeben, es ist also der Genauigkeits-Gewinn durch die zweite Diagonale nur bzw. 8 % und 3 %.

III. Ein weiterer Fragefall ist in Fig. 3. dargestellt.

Fig. 3.

Wenn die Grundlinie b fest gegeben ist, so kann man die Seiten s und $s' + s'' = S$ entweder aus *einem* Dreieck mit den Winkeln (1), (2 + 5), (6) oder aus *zwei* Dreiecken (1) (2) (3) und (4) (5) (6) bestimmen; es fragt sich, was das günstigere ist.

Da wir die Behandlung solcher Aufgaben nun genügend erläutert haben, schreiben wir sofort die Ergebnisse mit der Abkürzung $cotg\,(1) = c_1$ u. s. w. (mit den Fehler-Bezeichnungen nach der Anmerkung zu S. 110). Die Gewichte der Winkel seien alle = 1.

Für die Seite s hat man aus *einem* Dreieck nach (11) § 18. S. 110:

$$\mu(s)_1 = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}(c_1^2 + c_6^2 + c_1 c_6)} \tag{12}$$

Dagegen aus *beiden* Dreiecken:

$$\mu(s)_2 = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}(c_1^2 + c_3^2 + c_1 c_3 + c_4^2 + c_6^2 + c_4 c_6)} \tag{13}$$

Für die andere Seite S hat man aus *einem* Dreieck:

$$\mu(S) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}(c_{25}^2 + c_6^2 + c_{25} c_6)} \tag{14}$$

und aus *beiden* Dreiecken (wobei aber die Bedingung, dass $s' + s''$ eine Gerade sei, nicht mit enthalten ist):

$$m(s' + s'') =$$

$$\frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}\left(s'^2 c_2^2 + s''^2(c_1^2 + c_5^2 + c_6^2 + c_5 c_6) + S^2 c_3^2 - s's'' c_1 c_2 + s' S c_2 c_3 + s'' S c_1 c_3\right)} \tag{15}$$

Macht man das grosse Dreieck gleichseitig und die Querlinie rechtwinklig, also $c_1 = c_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}, c_2 = c_5 = \sqrt{3}$ und $c_3 = c_4 = 0$, so erhält man folgende Vergleichung:

aus *einem* Dreieck aus *zwei* Dreiecken

$$\mu(s)_1 = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \mu(s)_2 = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$\mu(s)_1 : \mu(s)_2 = 1 : 0{,}8165 \tag{16}$$

aus *einem* Dreieck aus *zwei* Dreiecken

$$\mu(S) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \mu(s' + s'') = \frac{\mu}{3}\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{5}{3}\right)}$$

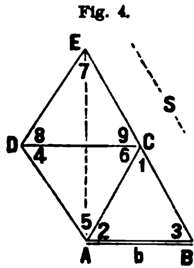
$$\mu(S) : \mu(s' + s'') = 1 : 1{,}291 \tag{17}$$

Es wird also zwar die Seite s günstiger aus zwei Dreiecken, dagegen S günstiger aus *einem* Dreieck bestimmt.

Hiernach kann man zu Fig. 3. sagen:

Die Einschaltung des Punktes bei 3. 4 in die Reihe der gleichseitigen Dreiecke wirkt ungünstig auf die Bestimmung der Längen-Erstreckung S der Kette, aber günstig auf die Basis-Übertragung von b nach s.

Fig. 4.



IV. In Fig. 4. zeigt ide Fehler-Berechnung, dass aus der Basis $AB = b$ die Seite $BE = S$ günstiger durch *drei* gleichseitige Dreiecke bestimmt wird, als durch *ein* Dreieck ABE, denn die Fehler-Berechnung giebt:

1) aus drei Dreiecken

$$S = BC + CE$$

$$S = b\frac{\sin(2)}{\sin(1)} + b\frac{\sin(3)}{\sin(1)}\frac{\sin(5)}{\sin(4)}\frac{\sin(8)}{\sin(7)}$$

hiefür wird, wenn alle Winkel $= 60°$ sind:

$$\mu(S) = 0{,}913\frac{\mu}{\varrho} \tag{18}$$

2) $S = BE$ als Hypotenuse des *einen* rechtwinkligen Dreiecks BAE mit $B = 60°$, $A = 90°$ und $E = 30°$ berechnet, giebt:

$$\mu(S) = 1{,}414 \frac{\mu}{\varrho} \tag{19}$$

Dieser Fehler ist also nahe das 1,5fache des zuerst berechneten Fehlers der Bestimmung aus drei Dreiecken.

V. Wir wollen hier noch eine andere kleine Genauigkeits-Untersuchung anschliessen, wie auch schon in Band I, 4. Aufl. 1895, S. 470. Es soll der mittlere Fehler einer Richtung bestimmt werden, nur mit Rücksicht auf die Summen-Proben in dem Viereck, also *ohne* die Seiten-Gleichung. Man hat dann nach Fig. 2. S. 123 die schon unter (6), (8) und (9) enthaltenen Bedingungs-Gleichungen:

$$\begin{array}{l} -v_1 + v_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad -v_8 + v_9 - v_{10} \quad . \quad + v_{12} + w_1 = 0 \\ -v_1 \quad . \quad + v_3 - v_4 + v_5 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad - v_{11} + v_{12} + w_2 = 0 \\ . \quad - v_2 + v_3 - v_4 \quad . \quad + v_6 - v_7 + v_8 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + w_3 = 0 \end{array}$$

Hiezu gehören die Normalgleichungen (deren Coëfficienten in (10) schon mit enthalten sind):

$$\begin{array}{l} +6k_1 + 2k_2 - 2k_3 + w_1 = 0 \\ +2k_1 + 6k_2 + 2k_3 + w_2 = 0 \\ -2k_1 + 2k_2 + 6k_3 + w_3 = 0 \end{array}$$

Die Auflösung giebt:

$$k_1 = \frac{-2w_1 + w_2 - w_3}{8}, \quad k_2 = \frac{w_1 - 2w_2 + w_3}{8}, \quad k_3 = \frac{-w_1 + w_2 - 2w_3}{8}$$

Nun ist $[v\,v] = -[w\,k]$ und die Ausrechnung hiernach giebt:

$$-8[w\,k] = 2w_1^2 + 2w_2^2 + 2w_3^2 - 2w_1w_2 + 2w_1w_3 - 2w_2w_3 \tag{20}$$

Das kann man aber noch übersichtlicher gestalten durch Einführung eines *vierten* Summen-Widerspruches w_4, nämlich:

$$w_1 - w_2 + w_3 = w_4$$

Damit kann man (20) auf die Form bringen:

$$-8[w\,k] = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2$$

und den mittleren Gewichtseinheits-Fehler m' erhält man, da drei unabhängige Bedingungs-Gleichungen benützt wurden:

$$m'^2 = \frac{[v\,v]}{3} = \frac{-[w\,k]}{3} = \frac{1}{3}\frac{[w^2]}{8} \tag{21}$$

wo nun unter $[w^2]$ die Summe *aller vier* in dem Vierecke möglicher Dreiecks-Summenproben bedeutet. Der Wert m' nach (21) ist ein mittlerer Richtungs-Fehler, der entsprechende mittlere Winkelfehler ist:

$$m = m'\sqrt{2} = \sqrt{\frac{[w^2]}{12}} \tag{22}$$

Hieran schliesst sich an der Schreiber'sche Satz über günstigste Gewichtsverteilung, welcher bereits in unserem I. Bande, 4. Auflage 1895, § 48. behandelt worden ist.

§ 21. Triangulierungs-Ketten und Netze der preussischen Landes-Aufnahme.

Nachdem wir schon früher in § 2. S. 15 u. ff. die Aufsuchung und Auswahl der Triangulierungs-Punkte in dem Sinne behandelt haben, welche Punkte man vermöge der gegenseitigen Sichten u. s. w. benützen *kann*, wollen wir nun die mehr theoretische Frage aufwerfen, welche Punkte und welche Verbindungs-Sichten man nehmen *will*.

Nach der ersten Einführung der Methode der kleinsten Quadrate in die Triangulierungen ist bald die Anschauung entstanden, dass man nun darauf ausgehen müsse, äusserst *viele* Messungen und Kontrollen in *eine* Ausgleichung zusammen zu bringen, und es gab eine Zeit, in welcher es als höchste Triangulierungs-Leistung gepriesen wurde, 100 und mehr Bedingungs-Gleichungen zusammen zu fassen und ebenso viele Normalgleichungen numerisch aufzulösen. In dieser Beziehung haben sich die Anschauungen wieder teilweise geändert.

Folgendes sind die Grundsätze, welche bei den neuesten Triangulierungen der preussischen Landes-Aufnahme unter General *Schreiber* zur Anwendung kommen; wir benützen dazu das sehr anschauliche und charakteristische Beispiel der Ketten und des Netzes in der Provinz Hannover, welche in unserer Fig. 1. S. 129. dargestellt sind.

Wir haben auf dem hier dargestellten Gebiete *drei* Grundlinien:

1) Grundlinie bei Braak in Holstein im Jahre 1871 gemessen, 5875^{m} lang
2) „ „ Göttingen „ „ 1880 „ 5193^{m} „
3) „ „ Meppen „ „ 1883 „ 7039^{m} „

Die geradlinigen Entfernungen dieser Grundlinien von einander sind rund im Mittel 230^{km} und zu der trigonometrischen Verbindung sind drei zusammenschliessende *Ketten* angeordnet, nämlich die „Hannoversche Kette“ im Westen, sowie Teile der „Elbkette“ und der „Hannoverisch-Sächsischen Kette“ im Osten.

Diese *Ketten* wurden zuerst in sich ausgeglichen, und liefern dann den festen Rahmen für das dazwischenliegende „*Netz*“, welches den Namen „Weser-Netz“ führt.

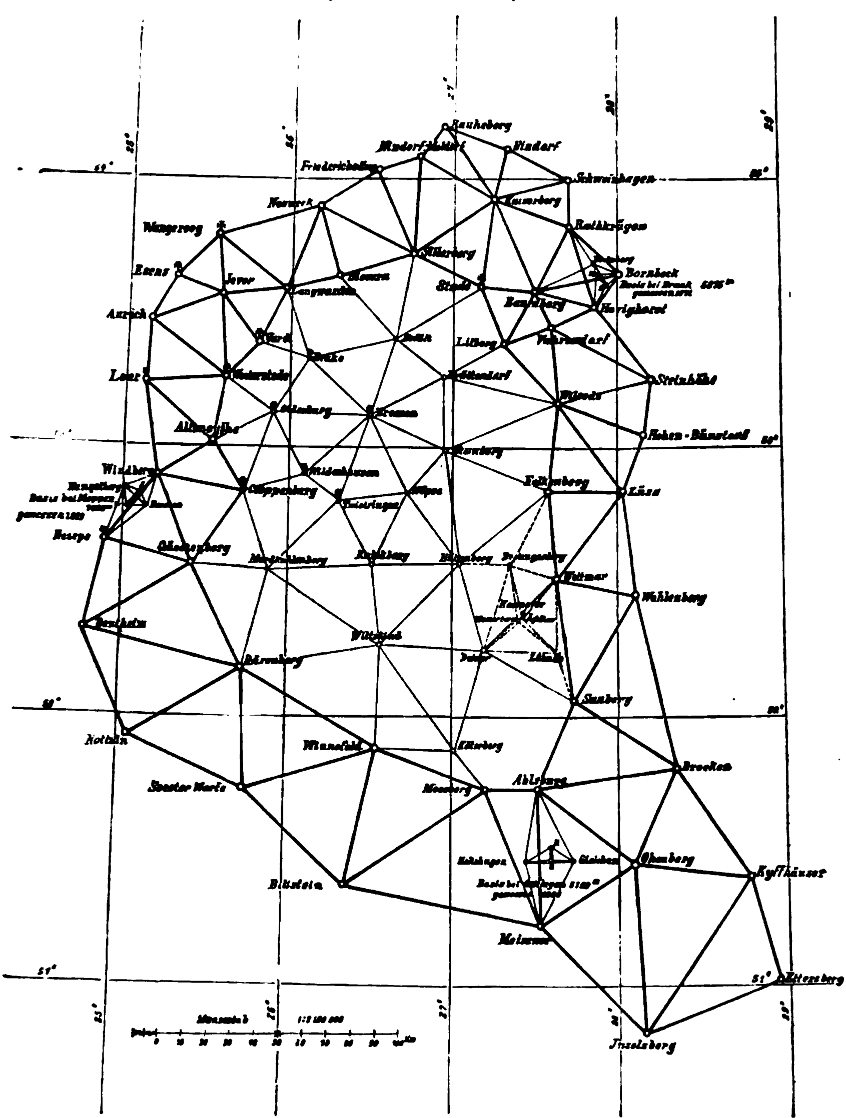
Ehe wir mit der Beschreibung dieser besonderen Verhältnisse fortfahren, müssen wir hier über die Anlage der preussischen Ketten und Netze im allgemeinen das Nötige berichten.

Es geschieht dieses am besten durch Vorführung der geschichtlichen Entwicklung, welche diese Anlage und die zugehörigen Ausgleichungen genommen haben, nach einer Mitteilung von Major *Haupt* in den „Astronom. Nachrichten“ 107. Band. Nr. 2549—2550, (Sept. 1883).

Als in den 60er Jahren dieses Jahrhunderts bei der preussischen Landes-Triangulierung Ketten, welche einen von Dreiecken freien Landesteil umspannten, wieder in sich zusammen schlossen, stellte sich der Übelstand heraus, dass trotz der Aufstellung aller vorhandenen und notwendigen Winkel- und Seiten-Gleichungen identische Punkte, von verschiedenen Seiten her berechnet, *nicht* dieselbe Länge und Breite erhielten, und dass der von Dreiecken freie innere Raum, das Polygon, *nicht* die seinem Inhalt entsprechende Winkelsumme erhielt, denn es fehlten die drei nötigen Polygon-Gleichungen. (Was diese Gleichungen betrifft, so haben wir bereits in unserem I. Bande, 4. Auflage 1895, S. 177 darüber gehandelt.)

Fig. 1.

Triangulierung der trigonometrischen Abteilung der Landes-Aufnahme in der Provinz Hannover.
(Massstab 1 : 3 130 000.)



Die Methode, welche hiefür von der preussischen Landes-Triangulation eingeführt wurde, ist von dem früheren Hauptmann *Schreiber* (späteren Chef der Landes-Aufnahme) angegeben, dasselbe liefert zwei Gleichungen durch die Projektion der inneren Polygonkranz-Begrenzung auf ein beliebig angenommenes rechtwinkliges, sphäroidisches Coordinaten-System.

Diese *Schreiber*sche Methode des Polygonkranz-Anschlusses durch rechtwinklige Coordinaten ist mitgeteilt in dem Werke: „Die königlich preussische Landes-Triangulation. Hauptdreiecke. I. Teil, Berlin 1870, S. 421 und Hauptdreiecke II. Teil, Berlin 1874, S. 605", wozu ein Bericht mit einem Beispiele gegeben ist in „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen", 1885, S. 81—85 und S. 103. Es wurde damals für jedes Polygon ein besonderes Coordinatensystem, mit einer irgendwie schiefliegenden Axe angenommen, während später, nach Einführung des konformen Coordinatensystems für die ganze Landesaufnahme, dieses System auch für die Aufstellung der Polygongleichungen benützt wurde, wie an dem Schlesisch-Posenschen Dreiecksnetz zu sehen ist, welches als Beispiel in unserem I. Band, 1895, 4. Aufl. S. 415 aufgenommen ist.

Das mathematische Problem war gelöst, es blieb aber der Übelstand, dass immer die jüngste Kette alle diejenigen Missstimmigkeiten, welche sich in den vorhergehenden, zwanglos in freies Feld verlaufenden und oft von verschiedenen Grundlinien ausgehenden Ketten angehäuft hatten, einzig und allein durch *ihre* Winkel-Korrektionen ausgleichen musste, und dass der innere zunächst frei gebliebene Raum bei seiner späteren Überspannung mit sekundären Dreiecken sämtliche Fehler dieses nicht stimmenden Schlusses mit übernehmen musste.

Dieses rührt davon her, dass man wegen des nötigen Fortschrittes der Messungen niederen Ranges, zum Anschluss der Kataster-Aufnahmen und der topographischen Aufnahmen, nicht warten kann, bis das Ganze fertig ist, sondern alle 2 bis 3 Jahre das Gemessene berechnen und dem bereits fest stehenden anpassen muss.

Weitere Einzelheiten über die Methoden der preuss. Landes-Aufnahme giebt ein Bericht der trigonometrischen Abteilung der königlich preussischen Landes-Aufnahme von General Schreiber, aus den „Verhandlungen der 1887er Konferenz d. perm. Kommission der internat. Erdmessung, Berlin 1888, Annex X^b, S. 6—10", aus welchem folgendes entnommen ist.

Das Wesernetz (Fig. 1. S. 129) enthält 66, in drei verschiedene Rangklassen sich scheidende Punkte, nämlich:

1) 18 Anschlusspunkte, die zugleich den das Netz rings umschliessenden Hauptdreiecksketten angehören und durch deren Ausgleichung endgiltig bestimmt sind;

2) 15 Netzpunkte;

3) 33 Zwischenpunkte erster Ordnung.

Die bei 1) und 2) genannten Punkte und deren Verbindungen mit einander bilden das eigentliche Netz, welches als Ganzes für sich, jedoch unter Festhaltung der schon vorher endgiltig bestimmten Punkte bei 1), ausgeglichen ist.

Erst darnach hat die Ausgleichung der bei 3) genannten Zwischenpunkte stattgefunden, und zwar unter Festhaltung aller vorher ausgeglichenen Punkte.

Wie die Punkte, zerfallen auch die Beobachtungen in 3 Rangklassen, und zwar in *Ketten-Beobachtungen*, *Netz-Beobachtungen* und *Zwischenpunkts-Beobachtungen*, je nachdem sie zur Bestimmung von *Kettenpunkten*, *Netzpunkten* oder *Zwischenpunkten* dienen. Auf jeder Station werden diese drei Rangklassen, selbst bei gleichzeitiger Ausführung, dergestalt getrennt von einander gehalten, dass jede für sich auf der Station ausgeglichen werden kann. Demgemäss sind z. B. die Beobachtungen auf der sowohl der Kette als auch dem Netz angehörigen Station Silberberg wie folgt angeordnet und ausgeführt worden (vgl. Fig. 2. S. 131).



Fig. 2.
Station Silberberg. Von Fig. 1. S. 129 in grösserem Massstab, mit Zwischenpunkten.

1:1 000 000

a) *Ketten-Beobachtungen:* jeder der 15 Winkel zwischen den 6 Ketten-Richtungen Sievern, Neuwerk, Friedrichskoog, Nindorf—Meldorf, Kaiserberg und Stade ist 8 mal gemessen;

Dieses entspricht der allgemeinen Vorschrift für Winkelmessung in allen Kombinationen, welche wir schon in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 259—272 mitgeteilt haben.

b) *Netz-Beobachtungen:* zur Bestimmung der Richtung nach dem Netzpunkt Brillit sind die beiden Winkel Stade—Brillit und Brillit—Sievern, und zwar jeder 12mal, gemessen;

c) *Zwischenpunkts-Beobachtungen:* zur Bestimmung der Richtung nach dem Zwischenpunkt Dolosenberg sind die beiden Winkel Stade-Dolosenberg und Dolosenberg—Sievern, und zwar jeder 6 mal, gemessen. In gleicher Weise ist die Richtung nach dem Zwischenpunkt Wüstenwohlde an zwei Netzrichtungen angeschlossen worden.

Jede der Rangklassen a, b, c ist für sich auf der Station ausgeglichen.

Eine derartige Anordnung gewährt gegenüber dem Streben, alle auf einer Station vorhandenen Richtungen möglichst zusammenhängend zu beobachten, den Vorteil, dass die Beobachtungen niederen Ranges in den Zwischenzeiten, wo die Luft-Beschaffenheit Beobachtungen höheren Ranges zu machen ohnehin verbietet, ausgeführt werden können, indem sie wegen der kleineren Entfernungen nicht nur leichter gelingen, sondern auch bei etwas weniger günstigen Umständen angestellt werden dürfen; denn es liegt auf

der Hand, dass Netz-Beobachtungen, deren Fehler auf das Gebiet des Netzes beschränkt bleiben, nicht so genau zu sein brauchen, wie Ketten-Beobachtungen, deren Fehler sich über das ganze Dreiecks-System, soweit es noch nicht endgiltig feststeht, fortpflanzen, und dass ein ähnliches Verhältnis zwischen den Netz- und Zwischen-Beobachtungen besteht.

Bei dieser Anordnung hängt daher die zur Erledigung einer Station erforderliche Zeit allein von der daselbst vorhandenen höchsten Rangklasse ab, dergestalt, dass die Beobachtungen niederen Ranges dabei überhaupt nicht mitsprechen. Wollte man dagegen alle Richtungen zusammenhängend beobachten, so würde man genötigt sein, alle Beobachtungen mit der für die höchste Rangklasse erforderlichen Genauigkeit auszuführen.

Während somit eine zweckmässige Gliederung der Beobachtungen Arbeits-Ersparung bedeutet, nötigt der Mangel einer solchen zur Arbeits-Vergeudung.

Noch wichtiger für die Ökonomie der Arbeit ist die Auswahl der zu beobachtenden Richtungen in einem Netz unter allen vorhandenen. Abgesehen davon, dass diagonale und transversale Richtungen gegenüber denjenigen, welche den besten Rechnungsweg von Dreieck zu Dreieck vermitteln, einen geringen Einfluss auf die Punkt-Bestimmung, und oft sogar nur den Wert einer rohen Kontrolle haben, kommt in Betracht, dass ihre Beobachtung schwerer gelingt, weil sie die längeren sind. Der Beobachter wird also, falls sie nicht ausgeschlossen oder für sich beobachtet werden, genötigt, gerade auf diejenigen Beobachtungen, auf die es am wenigsten ankommt, die meiste Zeit — und oft eine kaum erschwingliche — zu verwenden, oder sich bei ihnen mit einer geringeren Genauigkeit zu begnügen; in letzterem Falle muss er sich aber gefallen lassen, dass sie die übrigen Beobachtungen verderben, da in der Ausgleichung die einen von den anderen sich nicht trennen lassen und die Zuteilung verschiedener Gewichte erhebliche Bedenken hat.

Über Zeitaufwand, Genauigkeit sind zu dem Wesernetz (vgl. S. 129) Angaben gemacht:

Zur Bestimmung der 15 Netzpunkte des Wesernetzes sind 4760 Einstellungen (sämtlich nach Heliotropen), und zur Bestimmung der 33 Zwischenpunkte, 3586 Einstellungen (davon 3247 nach Heliotropen) gemacht worden.

Hiermit sind beschäftigt gewesen:

im Jahre 1886: eine Sektion 162 Tage,
„ „ 1887: drei Sektionen bezw. 141, 136 und 74 Tage.

Jede Sektion bestand aus 1 Beobachter, 1 bis 2 Assistenten und 10 bis 15 kommandierten Soldaten.

Gleichzeitig sind von diesem Personal alle einstellbaren Türme je 6 mal angeschnitten und alle Centrier- und Festlegungs-Arbeiten ausgeführt worden.

Wie aus der Karte (S. 129) zu ersehen, enthält das eigentliche Netz 60 Bedingungs-Gleichungen, abgesehen von 16 örtlichen Winkel-Gleichungen auf den Anschluss-Stationen. Es kommen somit durchschnittlich 4 Netz-Bedingungen auf den Punkt. Die Ausgleichung ist übrigens nicht nach Bedingungs-Gleichungen (Correlaten), sondern nach Elementen, und zwar nach ebenen rechtwinkligen Coordinaten, ausgeführt worden, so dass anstatt eines Systems von 60 nur ein solches von 30 Normal-Gleichungen (da 15 Punkte zu bestimmen waren) gebildet und aufgelöst zu werden brauchte.

Von den 121 durch die Netz-Ausgleichung bestimmten Richtungs-Verbesserungen sind 6 grösser als 1″, die grösste hat die Richtung Hüttenberg—Deister mit 1,43″ erhalten. Die Richtungs-Verbesserungen liefern übrigens kein zutreffendes Genauigkeitsmass für die Winkel-Bestimmung im Wesernetz, da der ganze Anschluss-Zwang in ihnen enthalten ist. Frei von letzterem sind dagegen die Schlussfehler der 38 Dreiecke und nicht in Dreiecke zerlegten Vier- und Fünfecke, in denen alle Winkel gemessen worden sind. Von diesen Schlussfehlern (die der Vier- und Fünfecke, den Gewichts-Verhältnissen entsprechend, bzw. mit $\sqrt{\frac{3}{4}}$ und $\sqrt{\frac{3}{5}}$ multipliziert) liegen:

2	zwischen	2,5″	und	2,0″
6	„	2,0″	„	1,0″
30	„	1,0″	„	0,0″

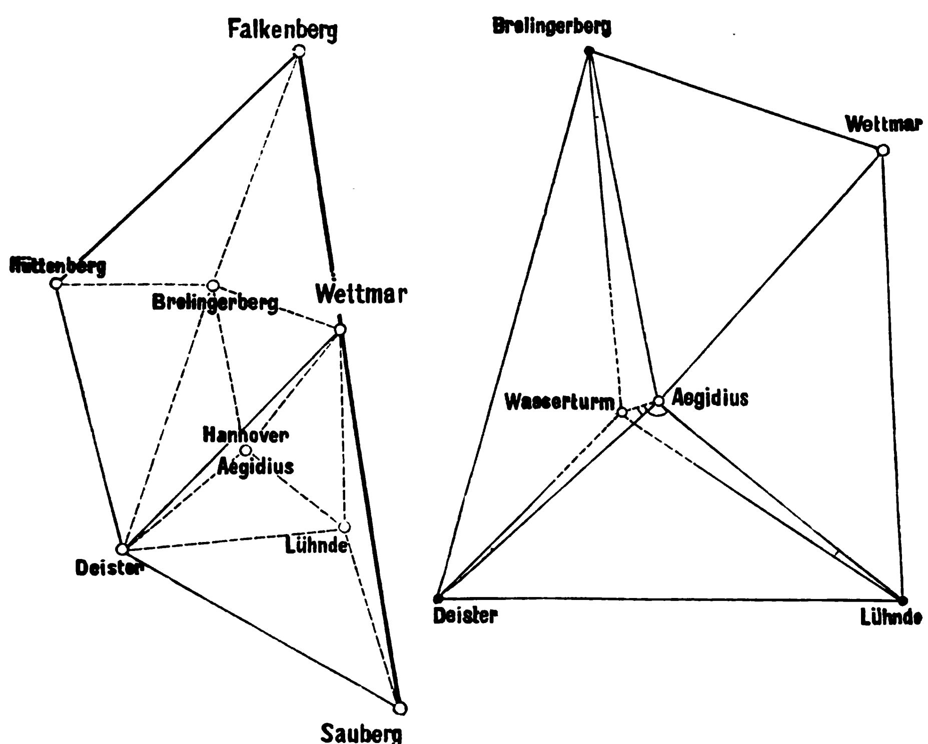
Die Summe ihrer Quadrate ist 27,22, mithin der mittlere Dreiecks-Schlussfehler:

$$\sqrt{\frac{27,22}{38}} = 0,85'',$$

woraus sich der mittlere Fehler eines durch Stations-Ausgleichung bestimmten Winkelwertes gleich $0,85'' \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,49''$ ergiebt.

Fig. 3. Massstab 1:1 1 000 000. Fig. 4. Massstab 1:500 000.

(Ergänzungen zu Fig. 1. S. 129.)



Die Berechnung der Messungen geschieht durchweg, bis zur niedrigsten Ordnung herab, nach der Methode der kleinsten Quadrate, und zwar unter völligem Anschluss der neu hinzukommenden an die bereits feststehenden Teile, so dass schliesslich ein über das ganze Land ausgedehntes widerspruchsfreies Netz von durchschnittlich 20 Punkten auf 100 Quadrat-Kilometer entsteht.

Die beste Übersicht der Ketten und Netze der preussischen Landes-Aufnahme erhält man aus den 2 Kartenbeilagen in 1 : 2 000 000 zu dem neuesten Band: „Die königlich preussische Landes-Triangulation, Hauptdreiecke VII Teil, Berlin 1895". Auch ist dazu nochmals an all das zu erinnern, was dazu bereits in unserem I. Bande, 4. Auflage 1895, in § 107—108. § 131. u. a. mitgeteilt ist.

Im Anschluss hieran geben wir mit Fig. 3. und Fig. 4. S. 133 noch zwei weitere Vervollständigungen des Gesamt-Netzes von Fig. 1. S. 129 und zwar in der Gegend der Stadt Hannover. Fig. 3. zeigt die Einschaltung des Aegidienturmes in Hannover in das Wesernetz, zusammen mit Brelingerberg und Lühnde.

Nachdem so für die Stadt-Vermessung von Hannover *ein* Punkt Aegidius festgelegt war, wurde noch ein zweiter Punkt Wasserturm dazu bestimmt, wie Fig. 4. in doppeltem Massstab von Fig. 3. andeutet.

Dabei ist Wasserturm als „Folgepunkt" im Anschluss an *Aegidius* als „Leitpunkt" gemessen und ausgeglichen, wie wir des näheren in der „Zeitschr. f. Verm." 1889, S. 1—14 mitgeteilt haben (vgl. auch Band I, 4. Aufl. 1895, § 104.).

Dieses ist zugleich der Nachweis für die Basis der Hannoverschen Stadt-Triangulierung, welche in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 185. und in unserem II. Bande, 4. Aufl. 1893, S. 249 behandelt worden ist.

Zum Schlusse von § 21. wollen wir noch auf S. 136 und 137 das Netzbild von einigen der neuesten Messungen I. Ordnung der preussischen Landes-Aufnahme vorführen, und zwar als Wiederabdruck aus einer Mitteilung von Oberstlieutenant *von Schmidt* in der „Zeitschr. f. Verm. 1894", S. 1—4, 8—9. Es sind 4 Teile:

I. Rheinisch-Hessische Dreiecks-Kette,
II. Niederrheinisches Dreiecks-Netz,
III. Belgischer Anschluss,
IV. Südlicher Niederländischer Anschluss.

Hier ist auch (S. 136) die 2513 m lange Bonner Basis mit ihrem einfachen Anschluss-Netze zu sehen, welches zu vergleichen ist mit dem *alten* Bonner Basisnetze von 1847, das wir schon im I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 514 vorgeführt haben.

Wir wollen auch nochmals zusammenfassen, dass ein beträchtlicher Teil der neueren Ketten und Netze der Landes-Aufnahme nun von uns vorgeführt ist in folgenden Stellen:

Handb. d. Verm. I. Band, 4. Aufl. 1895, S. 280—281, die Elbkette,
„ „ „ „ „ „ S. 400—411, Beispiel III. Ordnung,
„ „ „ „ „ „ S. 415, das Schlesisch-Posensche Netz,
„ „ „ „ „ „ S. 504—505, Übersichtskarte,
„ „ „ „ „ „ S. 509, Hann.-Sächs. Kette und Netz,
Hiezu i. vorlgd. III. Band, 4. Aufl. 1896, S. 129, Wesernetz mit Umfangsketten,
„ „ „ „ „ S. 136—137, Niederrhein. Netz mit Umfangsketten.

Mit diesen Netzbildern kann man auch die Übersichtskarte der Haupttriangulationen des Deutschen Reiches in 1 : 2 000 000, welche wir früher in dem Werke „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen 1882“ herausgegeben haben, ziemlich auf den heutigen Stand ergänzen.

§ 22. Seiten-Refraktion.

Bei den Unregelmässigkeiten der Wärme-Verteilung in der Atmosphäre, entsprechend der ungleichen Wärme-Ausstrahlung der Erdoberfläche (Wasser und Land, Wälder und Sand u. s. w.), ist es an sich wahrscheinlich, dass die Lichtstrahlen in der Atmosphäre nicht nur nach der Höhe abgelenkt werden, sondern auch *seitlich* kleine Refraktionen erleiden.

Wenn z. B. ein Heliotropenlicht im Fernrohr nicht als ein Punkt, sondern als ein Lichtfleck von 60″ Durchmesser erscheint, so haben jedenfalls die seitlichen Lichtteile seitliche Brechungen von $\pm$ 30″ erfahren, und ob das Intensitäts-Zentrum des Lichtflecks, auf welches die Fadenmitte eingestellt wird, allein sich in einer vertikalen Ebene fortgepflanzt hat, kann man nicht sicher wissen.

Wichtiger als solche Überlegungen sind *Beobachtungen*, zu denen wir nun übergehen.

I. Struves Beobachtungen, 1829.

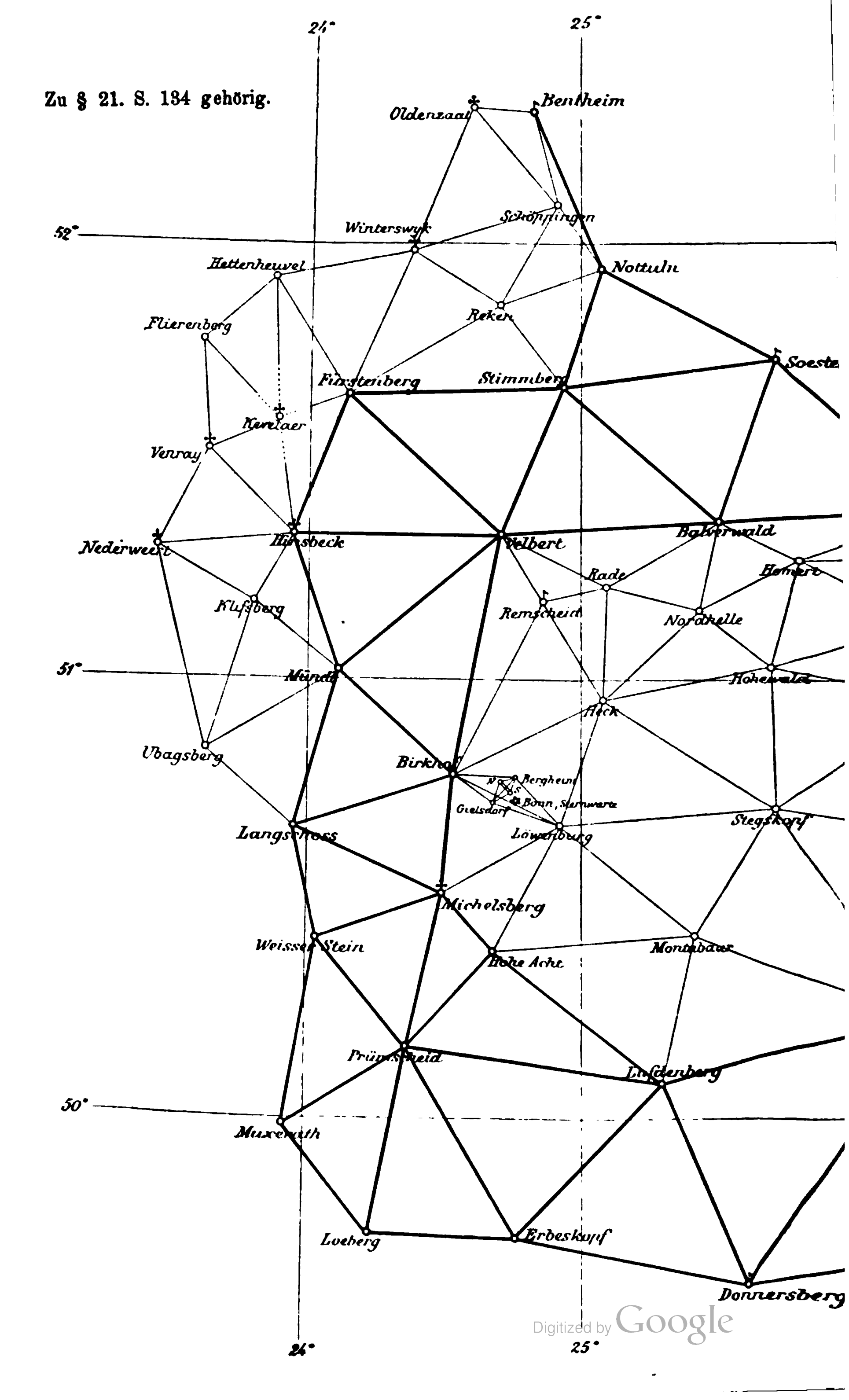
Struve hat schon im Jahre 1829 im 7. Bande der „astronom. Nachr.“ S. 391 bis 395, Seiten-Refraktionen vermutet aus dem Umstand, dass der Widerspruch w der Winkelsummen $\alpha + \beta + \gamma$ gegen 180° + sphär. Excess, bei Dreiecken mit kurzen Seiten im allgemeinen günstiger ausfiel, als bei langen Seiten. Struve ordnete die 31 Dreiecke seiner Gradmessung in den Ostsee-Provinzen Russlands nach der Grösse des Umfangs $S = a + b + c$, wo a, b und c die drei Seiten sind, und fand folgende Werte $w = \alpha + \beta + \gamma - (180° + \varepsilon)$:

Nr.	S	w	Nr.	S	w	Nr.	S	w
1.	20km	+ 0,50″	11.	63km	+ 1,09″	21.	98km	− 0,16″
2.	22	− 1,36	12.	66	− 0,55	22.	98	− 1,15
3.	33	− 0,50	13.	80	− 0,55	23.	100	+ 1,82
4.	43	+ 0,46	14.	80	+ 0,18	24.	100	− 0,18
5.	43	+ 0,45	15.	84	− 0,19	25.	102	+ 0,08
6.	49	+ 0,22	16.	88	− 0,26	26.	111	− 0,28
7.	51	− 0,33	17.	89	+ 2,18	27.	113	− 1,43
8.	57	− 0,46	18.	94	− 0,51	28.	115	+ 1,40
9.	58	− 0,15	19.	95	− 1,08	29.	122	− 0,14
10.	59	− 0,61	20.	97	− 1,15	30.	129	+ 1,03
						31.	129	+ 2,81

(1)

Diese Zahlen w zeigen allerdings eine gewisse Zunahme bei wachsendem Umfang S. Um diese Zunahme durch Seiten-Refraktion zu erklären, machte *Struve* zuerst die Annahme, dass diese Refraktion proportional der Quadratwurzel der Sichtweite s wirke. Wenn die seitliche Ablenkung stetig wie die Höhenablenkung wirkte, so müsste man wie bei letzterer einen Ablenkungs-Winkel proportional s selbst annehmen; da aber eine solche stetige Ablenkung längs der ganzen Sichtweite s jedenfalls nicht besteht, sondern vielmehr zahlreiche kleinere sich teils häufende, teils auch wieder aufhebende Ablenkungen wahrscheinlich sind, so ist diese *Struve*sche Annahme, proportional mit $\sqrt{s}$, an sich ganz am Platz. Aber ein Rechnungs-Versuch mit dieser

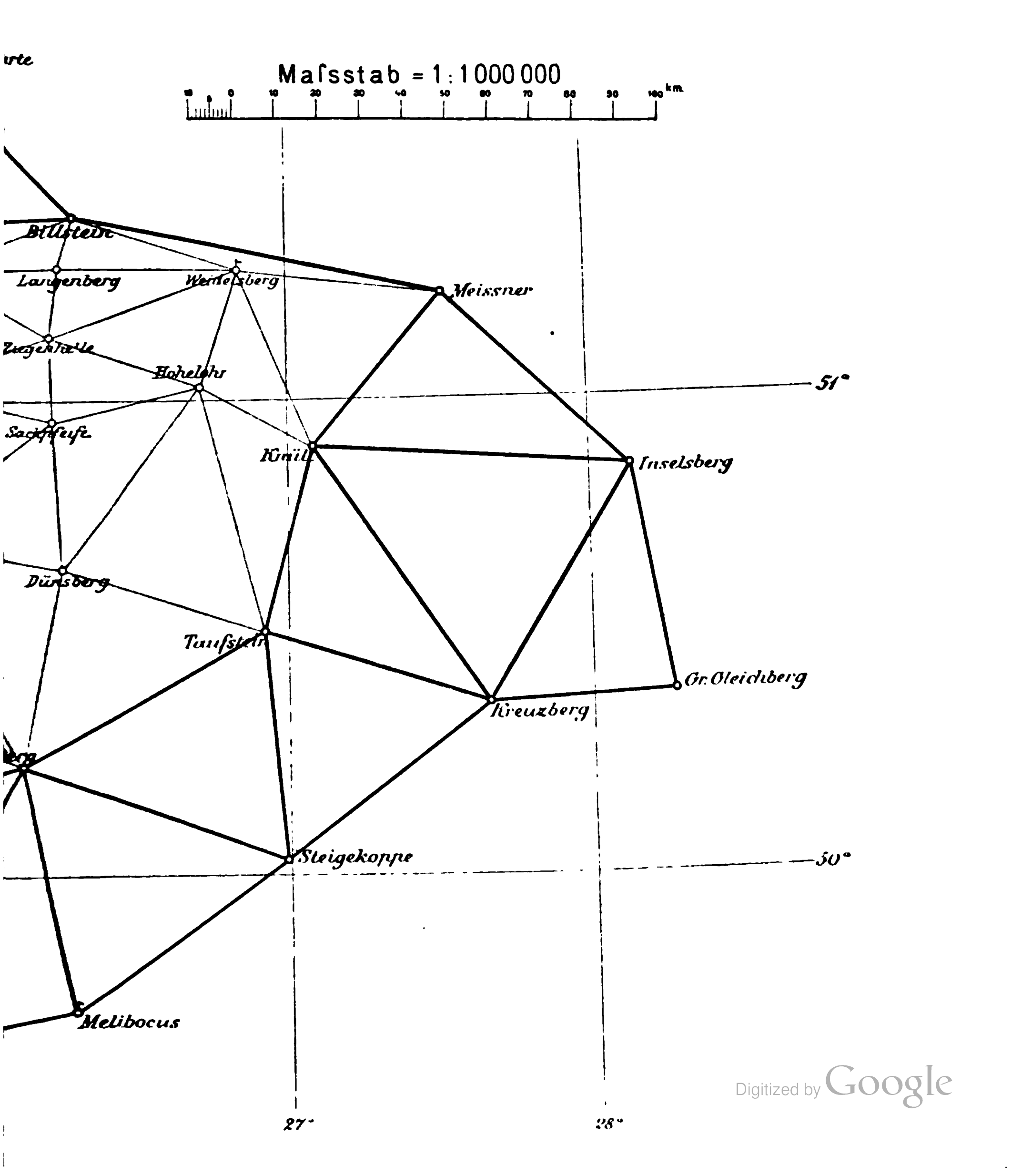
Zu § 21. S. 134 gehörig.



27°   28°

Rheinisch-Hessische Dreiecks-Kette, Niederrheinisches Dreiecks-Netz und Südlicher Niederländischer Anschluss.

-52°



Annahme gab einen inneren Widerspruch, weshalb ein Versuch in anderer Form gemacht wurde, so dass der mittlere Fehler m eines Winkels mit den Schenkel-Längen a und b von Struve so dargestellt wurde:

$$m^2 = e^2 + k^2 (a^2 + b^2) \tag{2}$$

also:

$$w^2 = 3\,e^2 + 2\,k^2 (a^2 + b^2 + c^2) \tag{3}$$

Aus den in dieser Form geführten Struveschen Berechnungen haben wir die Formel gebildet:

$$m = \sqrt{0{,}152^2 + (0{,}0128\,S)^2} = \sqrt{\mu^2 + \sigma^2} \tag{4}$$

Dabei ist m der mittlere Fehler einer beobachteten Richtung, $\mu = 0{,}152''$ der mittlere reine Theodolit-Messungsfehler und $\sigma = 0{,}0128\,S$ der Einfluss der Seiten-Refraktion.

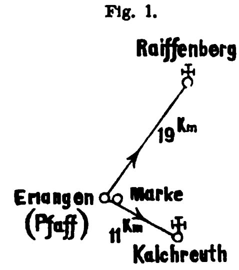
Zur Übersicht ist hiernach berechnet:

S	μ	σ	m
0km	± 0,15″	± 0,00″	± 0,15″
20	0,15	0,26	0,30
40	0,15	0,51	0,53
60	0,15	0,77	0,78
80	0,15	1,02	1,03
100	0,15	1,28	1,29

II. Pfaffs Jahresreihe der Seiten-Refraktion.

Dr. Pfaff, Professor der Mineralogie in Erlangen, hat eine ganze durchlaufende Jahresreihe von Beobachtungen horizontaler Winkel in Hinsicht auf seitliche Strahlen-Brechung angestellt. Mitteilungen hierüber sind gemacht von Bauernfeind in den Sitzungs-Berichten der „math. phys. Kl. d. k. bayer. Akademie d. Wiss. zu München“, 1872, S. 147—162 und im Auszug in der Publ. d. königl. preuss. geod. Instituts: „Der Einfluss der Lateral-Refraktion u. s. w.“ von Fischer, Berlin 1882.

Fig. 1.



Die Lage des Beobachtungs-Punktes und der drei Zielpunkte ist in Fig. 1. angegeben. Raiffenberg und Kalchreuth sind die Haupt-Zielpunkte in 19km und 11km Entfernung, und dazu ist noch eine *nahe* gelegene Marke in nur 283m Entfernung genommen.

Für diese drei Zielpunkte sind in der Zeit von November 1870 bis Oktober 1871 je 93 Messungen mit einem 20cm-Repetitions-Theodolit von Ertel gemacht; allerdings sehr ungleich verteilt, mit Lücken im Januar bis April, welche aber doch eine jährliche Periode wahrnehmen lassen.

In unserer vorigen Auflage, III. Band, 3. Aufl. 1890, S. 153—154 hatten wir einen Auszug der Pfaffschen Messungen mitgeteilt, wovon jetzt abgesehen wird, weil die darauf zu gründenden Schlüsse über Seiten-Refraktion sehr unsicher sind.

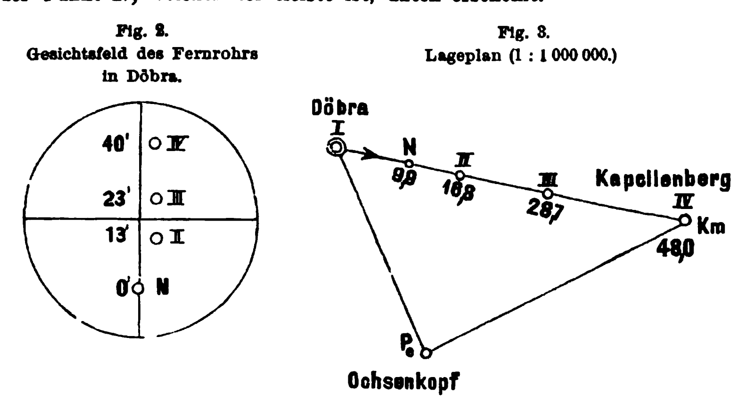
III. Bauernfeinds Beobachtungen über Seiten-Refraktion.

Aus dem Werke „Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion von Carl Max v. Bauernfeind, erste Mitteilung, München 1880“, S. 48—65, entnehmen wir mit Bezugnahme auf Fig. 2. und 3. (S. 139) folgendes:

Auf dem Punkte Döbra befand sich ein *Ertel*scher Höhenkreis mit Fernrohr, fest aufgestellt, mit welchem 4 Zielpunkte *N, II, III, IV* (Fig. 3.) in nahezu gerader Linie beobachtet wurden. Diese 4 Zielpunkte erschienen gemeinsam im Gesichtsfeld des Fernrohrs, so dass die Horizontal-Winkel, stets auf den Nullpunkt *N* bezogen, durch ein Okular-Mikrometer sehr genau gemessen werden konnten. Das Gesichtsfeld des Fernrohrs mit den 4 Zielpunkten ist in Fig. 2. angedeutet, *ohne* Umkehrung, so dass der Punkt *N*, welcher der tiefste ist, unten erscheint.

Fig. 2. Gesichtsfeld des Fernrohrs in Döbra.

Fig. 3. Lageplan (1 : 1 000 000.)



Die Entfernungen und Höhen der Punkte waren:

Punkt		Entfernung	Höhen	
Döbra	*I*	0^m	795^m über *N. N.*	0^m
	N	9 921^m	..	..
	II	16 766^m	619	— 176^m
	III	28 701^m	604	— 191^m
Kapellenberg	*IV*	47 958^m	765	— 30^m

In dieser Weise wurden die Horizontalwinkel in durchlaufenden Tagesreihen Tags mit Heliotropen, Nachts mit Lampenlicht, gemessen, im ganzen an 12 Tagen zwischen Juni und September 1877, sowie zwischen August und September 1878.

Das Ergebnis war für Seiten-Refraktion ein negatives, indem (nach Elimination einer Mikrometer-Verdrehung) keine ausserhalb der Messungs-Genauigkeit liegenden seitlichen Abweichungen sich fanden.

IV. Dreiecksschlüsse der sächsischen Triangulierung.

Bei der Triangulierung des Königreichs Sachsen, welche wir in unserem I. Bande, 4. Auflage 1895, S. 140 beschrieben haben, hat sich ergeben (S. 550 unseres Berichtes und S. 102 des amtlichen Werkes), dass die grössten Dreiecke gute Schlüsse zeigten, was durch den Umstand erklärt wird, dass lange Sichten stets *hoch* über den Boden weggehen und deswegen von Seiten-Refraktion weniger zu leiden haben als kurze und niedere Sichten.

V. Fischers Vergleichung der preussischen Triangulierungen.

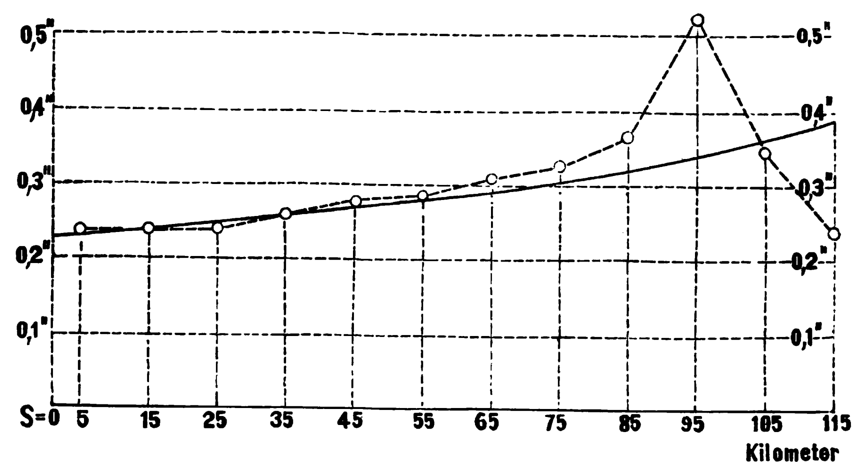
Sektions-Chef Fischer im geodätischen Institut hat im Jahre 1882 veröffentlicht: „Publikation des königlich preussischen geodätischen Instituts. Der Einfluss der Lateral-Refraktion auf das Messen von Horizontalwinkeln. Berlin 1882“ (Bericht hierüber s.

„Zeitschr. f. Verm. 1884", S. 79—81). Es wurden von den preussischen Triangulierungs-Ausgleichungen, Gradmessung in Ostpreussen, Küsten-Vermessung u. s. w. bis zum rheinischen und hessischen Dreiecksnetz die sämtlichen Netz-Verbesserungen in der Form von Richtungs-Verbesserungen (mit Hilfe der Besselschen Nullpunkts-Korrektionen, vgl. Band I, § 74) dargestellt, und, in der Zahl 1434, nach der Grösse der Sichtweiten S geordnet, wie folgende Zusammenstellung zeigt, in welcher m den Mittelwert der fraglichen Richtungs-Verbesserungen in der Gruppe mit der durchschnittlichen Sichtweite S, und p die jeweilige Zahl in einer Gruppe bedeutet.

S	p	m	S	p	m	S	p	m
5^{km}	102	0,243″	45^{km}	196	0,278″	85^{km}	18	0,361″
15	198	0,238	55	100	0,281	95	12	0,522
25	328	0,234	65	86	0,308	105	6	0,347
35	330	0,254	75	54	0,322	115	4	0,238
	958			436			40	$[p] = 1434$

Eine zusammenfassende Vergleichs-Berechnung ist von dem Urheber dieser Sammlung nicht gegeben. Wir haben daher zunächst diese Zahlen m und S in Fig. 4. graphisch dargestellt; man sieht daraus, da die Kurve jedenfalls nach oben konkav verläuft, dass eine Annahme, wie sie auch Struve zuerst versuchte, das Anwachsen von m in Beziehung zu $\sqrt{S}$ zu setzen, nicht durchzuführen ist.

Fig. 4.
Richtungsfehler als Funktion der Entfernung.



Wir haben daher drei andere Ausgleichungs-Versuche gemacht, wobei immer die Gruppenzahlen p als Gewichte im gewöhnlichen Sinne genommen wurden:

1) $m = 0{,}208'' + 0{,}0016\,S$

2) $m = 0{,}232'' + (0{,}0415\,S)^2$

3) $m = \sqrt{0{,}237^2 + (0{,}00263\,S)^2} = \sqrt{\mu^2 + \sigma^2}$

In Bezug auf die Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler sind alle diese 3 Formen nahezu gleich; im übrigen hat die dritte Form am meisten für sich; dieselbe giebt folgendes:

S	p	μ	σ	m	m' beobachtet	$m-m'=v$
5km	102	0,237"	0,018"	0,237"	0,243"	−0,006"
15	198	0,237	0,039	0,240	0,238	+0,002
25	328	0,237	0,066	0,246	0,234	+ 0,012
35	330	0,237	0,092	0,254	0,254	0,000
45	196	0,237	0,118	0,265	0,278	− 0,013
55	100	0,237	0,145	0,278	0,281	− 0,003
65	86	0,237	0,171	0,292	0,308	− 0,016
75	54	0,237	0,197	0,308	0,322	− 0,014
85	18	0,237	0,224	0,326	0,361	− 0,035
95	12	0,237	0,250	0,344	0,522	− 0,178
105	6	0,237	0,276	0,364	0,347	+ 0,017
115	4	0,237	0,302	0,384	0,238	+ 0,146
	1434					

Zu Fig. 4. ist über die drei letzten Werte für 95, 105 und 115km, welche zusammen nur 22 mal (oder 1,5 %) vorkommen, zu bemerken, dass dieses wohl nur Zufalls-Werte sind, welche das bis 85km schön verlaufende Gesetz nicht stören.

Im übrigen kann man nun sagen, dass nach den 50 jährigen Gesamt-Erfahrungen der preussischen Triangulierungen, weite Sichten im allgemeinen ungenauer sind als kurze. Ob der Grund hievon in eigentlicher sogen. Seiten-Refraktion liegt, oder nur darin, dass weite Sichten selten und nur undeutlich zu beobachten sind, ist für die darauf zu gründenden praktischen Folgerungen zunächst gleichgiltig.

Wenn man noch überlegt, ob die grössere Netz-Unsicherheit bei langen Sichten daher rührt, dass diese Sichten selten zu erlangen waren, und deswegen mit *geringeren Anschnittszahlen* in die Ausgleichung eingingen, so müssten die älteren Richtungs-Messungen, bei welchen ein fester Plan der Messungs-Anordnung nicht vorhanden war, von den neueren Winkel-Messungen in allen Kombinationen, unterschieden werden; reduziert man aber auf gleichen Zeit- oder Arbeits-Aufwand, so kommen die langen Sichten jedenfalls in den Nachteil.

In unserer vorigen Auflage, III. Band, 1895, 3. Aufl. S. 156—159, haben wir auch eine physikalische *Theorie* der Seiten-Refraktion versucht, auf welche im Falle weiteren Beobachtungs-Materials zurückzukommen wäre.

Grösse der Theodolite.

Indem mit diesem § 22. über Seiten-Refraktionen alles, was auf Winkelmessung Bezug hat, abgeschlossen wird, kann hier noch ein Nachtrag zu § 5. und überhaupt auch zu unserem II. Band, 4. Aufl. 1893, Kap. VI und Kap. VIII gebracht werden, nämlich betreffend die Grösse der Theodolite, mit Kreisdurchmesser-Wahl zwischen 10cm und 40cm.

Die trigonometrische Abteilung der preussischen Landesaufnahme hat die in unserem II. Bande, 4. Aufl. 1893, S. 182—183 abgebildeten Instrumente in folgenden Grössenverhältnissen:

Für Triangulierung I. Ordnung Fig. 13. S. 182 mit 35cm und 27cm Kreisdurchmesser,
„ „ II. „ „ „ „ „ „ 21cm „
„ „ III. „ „ 14. „ 183 „ 14cm „

Die Hannoversche Stadt-Triangulierung, welche in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, § 60. mitgeteilt ist, mit einem mittleren Fehler einer Netzrichtung $= \pm 1,''0$,

(I. Band, 1895, S. 195) ist mit den kleinen 13cm-, 14cm-Theodoliten von Band II, 1893, S. 183 und S. 184 ausgeführt, mit je 12 Sätzen im Hauptnetz (Band I, S. 185) und je 4 Sätzen in den Punkteinschaltungen (Band I, S. 400—401). Andere Stadtvermessungen haben teilweise grössere Instrumente, z. B. Berlin („Zeitschr. f. Verm." 1881, S. 13) ein 27cm-Theodolit und 2 kleinere 14cm-Instrumente, beide mit Nonien, Strassburg („Zeitschr. f. Verm." 1893, S. 130) ein 21cm-Mikroskop-Theodolit und ein 14,5cm-Nonien-Theodolit, Leipzig („Zeitschr. f. Verm." 1895, S. 104) ein 32cm-Theodolit und ein 16cm-Theodolit, beide mit Mikroskopen.

Über die Grösse der Theodolite, bzw. ob man zu gewissen Zwecken mit kleinen Instrumenten ausreichen kann, welche natürlich für Transport und Handhabung die Bequemsten sind, hat auf der Versammlung des Deutschen Geometer-Vereins 1895 in Bonn eine Erörterung stattgefunden, über welche in der „Zeitschr. f. Verm." 1895 S. 496 und ausführlicher in den Mitteilungen des Mecklenburgischen Geometer-Vereins 1895 S. 5—7 berichtet wird. An letztere Stelle giebt Kammeringenieur Vogeler noch einige weitere Angaben hinzu. Wir drucken dieses im wesentlichen hier ab:

Prof. Koll trug vor: „Es hat sich bei den trigonometrischen Arbeiten der preussischen Katasterverwaltung ganz sicher ergeben, dass eine, allen Anforderungen vollauf genügende Triangulation I. und II. Ordnung mit kleinen 5 zölligen (13,5cm) Schraubenmikroskop-Theodoliten bei nur 12 maliger Beobachtung der Richtungen in I. Ordnung und 8 maliger Beobachtungen II. Ordnung ausgeführt werden kann." —

Kammeringenieur *Vogeler* entgegnete hierauf: In Mecklenburg wird zur Zeit die Triangulierung des Netzes II. und III. Ordnung beschafft, wobei wir 8 zöllige (21,5cm) Mikroskop-Theodolite verwenden. Wir haben seit 30 Jahren in Mecklenburg für die Zwecke der Kleintriangulierung dieselben kleinen Instrumente von nur 13,5cm im Gebrauch, wie die vorher genannten, wir wissen auch sehr wohl, dass man mit diesen Theodoliten sehr genau messen kann, aber trotzdem haben wir uns entschlossen, neue grössere Instrumente anzuschaffen.

Wir hatten schon auf unserer Geometer-Versammlung 1891 in Berlin erfahren, wie günstige Resultate mit den fünfzölligen Theodoliten in der Kataster-Verwaltung gemacht worden seien, und weiter, dass diese Erfahrungen niedergelegt seien in dem Werke „Die Verbindungs-Triangulation zwischen dem Rheinischen Dreiecksnetze und der Triangulation des Dortmunder Kohlenreviers", welches von Herrn Professor Dr. Reinhertz herausgegeben ist. Wir haben dieses Werk eingehend studiert und gefunden, dass die Erfahrungen sich nur auf wenige trigonometrische Punkte stützen, die man in den Jahren 1881 bis 1883 gemessen hat. Es sind dieses die Erfahrungen von zwei Trigonometern mit einem Instrumente. Es mag sein, dass gerade dieses Instrument besonders leistungsfähig gewesen ist; denn nach S. 31 der Verbindungs-Triangulation beträgt der mittlere Fehler einer Richtung $\pm 2{,}01''$ (mit Messung in zwei Fernrohrlagen). Nach unseren Erfahrungen und den Erfahrungen anderer Trigonometer mit verschiedenen Instrumenten kann man die durchschnittliche Leistungsfähigkeit fünfzölliger Mikroskop-Theodolite auf einen mittleren Richtungsfehler von 3" bis 4" veranschlagen, während die achtzölligen Theodolite nur etwa einen Fehler von 1,5" bis 2" erwarten lassen. Dies heisst aber mit andern Worten, dass man mit einem fünfzölligen Instrument einen Winkel viermal so oft beobachten muss, wie mit einem achtzölligen Instrument, wenn man dieselbe Genauigkeit erreichen will. Bei der Triangulierung eines Netzes II. und III. Ordnung hat man mit Entfernungen von 3 bis 4 Kilometer zu thun; hier gilt es, die günstigsten Beleuchtungsverhältnisse auszunützen und durch wenige Beobachtungen schon gute Resultate zu erzielen. Es ist hier also ein leistungsfähiges Instrument, und besonders ein Instrument mit starkem Fernrohr am Platze. Auch durch den Transport des grösseren Instruments werden die Arbeiten nicht verteuert, denn bei einer Triangulierung II. und III. Ordnung hat man einen grossen Apparat an Geräten mitzunehmen und Entfernungen von 3—4km von einem Punkt zum andern zurückzulegen, daher ist ein Wagen unbedingt erforderlich. Wir haben bei der Neuanschaffung von Instrumenten uns nach den langjährigen Erfahrungen gerichtet, die man bei der preussischen Landes-Aufnahme gemacht hat. Diese Behörde verwendet für die Triangulierung II. Ordnung einen achtzölligen Theodolit (abgebildet in unserem II. Bande, 1895, 4. Aufl. S. 182) und zwei ebensolche Instrumente sind in Mecklenburg jetzt im Gebrauch. Ein Sektions-Chef des geodätischen Instituts, welcher grosse Erfahrung in Haupttriangulierungen besitzt, hat sich über diese Instrumentenfrage so aus-



gesprochen: Bei allen Theodoliten steht die Grösse des Fernrohrs mit der Grösse des Kreises in einem gewissen Verhältnisse. Wenn nun ein gutes Fernrohr für Triangulierungen von Netzen I. und II. Ordnung durchaus am Platze ist, so wird die ganze Konstruktion des Theodolits hierdurch schon wesentlich bedingt, dann wird man aber dieses Instrument nicht mit einem ganz kleinen Kreise ausrüsten lassen; denn im allgemeinen wird ja auch der grössere Kreis der besser geteilte sein und eine grössere Ablesungsgenauigkeit gestatten.

Soweit der Mecklenburgische Bericht über die Bonner Verhandlungen, den wir im wesentlichen abgedruckt haben. Im übrigen kann noch aus unseren eigenen Messungen mit 13cm-Theodoliten aus „Zeitschr. f. Verm." 1892, S. 26 ein mittlerer Richtungsmessungsfehler von $\pm$ 2,31″ berichtet werden (Messung in zwei Fernrohrlagen mit zusammen vier Ablesungen, wie auch im Vorstehenden stets angenommen ist).

Es mag auch aus Reinhertz „Verbindungs-Triangulation" S. 33 noch citiert werden, dass abgesehen von Teilungsfehlern das zehnzöllige Instrument der Landes-Aufnahme ein etwa zehnmal so grosses Gewicht liefert, wie das zur Verbindungs-Triangulation benützte fünfzöllige.

Aus der „Zeitschr. f. Instrumentenkunde" 1892, S. 104—105 entnehmen wir „über die Leistung eines kleinen Instrumentes", dass bereits Struve darauf hingewiesen hat, dass kleine Instrumente *verhältnismässig* genauere Resultate liefern als grosse, und dass astronomische Messungen mit 17,5cm-Kreisen unerwartet günstige Ergebnisse lieferten.

Fassen wir alles dieses zusammen, so kann man wohl sagen, dass manche Praktiker mit teuren und *grossen* Instrumenten unnötig vorgehen, z. B. Stadtpolygonzüge mit 25cm-Mikroskop-Theodolit („Zeitschr. f. Verm." 1888, S. 78), dass aber die auf der Bonner Versammlung aufgestellte Behauptung, für Triangulierung I. Ordnung seien fünfzöllige Theodolite (13,5cm) ausreichend und zweckmässig, mit den dafür vorgebrachten Messungsergebnissen noch nicht begründet ist.

§ 23. Genauigkeit und Geschwindigkeit der Basismessung.

Über die Leistungsfähigkeit der in den früheren § 9—15. behandelten Basismess-Einrichtungen haben wir verschiedene Angaben gesammelt, welche im Folgenden zusammengestellt sind.

Die Fehler der Basismessungen sind wesentlich zweierlei Art, erstens unregelmässige von der Handhabung der Apparate u. s. w. herrührende Fehler, von denen man gewöhnlich annimmt, dass sie proportional der Quadratwurzel der Länge wachsen, und zweitens regelmässige mit der gemessenen Länge selbst anwachsende Fehler, zu welchen vor allem die Mass-Unsicherheiten der gebrauchten Massstäbe selbst gehören.

Man wird im allgemeinen annehmen können, dass die regelmässigen Fehler im Gesamtergebnis überwiegen, indessen sind sie schwer zu bestimmen (und wahrscheinlich sind dieselben oft unterschätzt worden).

Leichter und sicherer zu bestimmen sind die unregelmässigen Fehler, mit welchen wir uns nun zuerst beschäftigen wollen. Man findet diese Fehler durch Messungs-Wiederholungen.

Besonders wichtig ist hiebei die Doppelmessung einer Linie in verschiedenen Teilstrecken.



Man habe hiefür folgendes:

Strecke s_1 gebe die Differenz hin und her d_1
„ s_2 „ „ „ „ d_2
. . . .
„ s_n „ „ „ „ d_n

Daraus bildet man die mittlere Differenz nach Band I, 4. Aufl. 1895, § 11.

$$D = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{d_1^2}{s_1} + \frac{d_2^2}{s_2} + \dots \frac{d_n^2}{s_n}\right)} = \sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{d\,d}{s}\right]}$$

oder den mittleren Fehler *einer* Messung der Längen-Einheit (1^{km}):

$$m = \frac{D}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2n}\left[\frac{d\,d}{s}\right]} \tag{1}$$

Damit hat man auch den mittleren Fehler des Mittels aus zwei Messungen der Längen-Einheit:

$$m' = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1}\sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{d\,d}{s}\right]} \tag{2}$$

oder den mittleren Fehler des Mittels aus zwei Messungen einer Länge L:

$$M = m'\sqrt{L} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{n}\frac{[d\,d]}{s}} \tag{3}$$

Die Doppelmessungs-Ergebnisse der Basis der Gradmessung in Ostpreussen von 1834 haben wir bereits in (30) unten auf S. 76 mitgeteilt und die Anwendung der vorstehenden Formeln (1)—(3) auf dieses schon mehrfach von uns benützte klassische Beispiel der Gradmessung in Ostpreussen haben wir bereits in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 38 gezeigt.

Wenn alle Teilstrecken s_1 $s_2 \dots$ nahezu gleich sind, so braucht man die Quotienten $d : \sqrt{s}$ bzw. $d^2 : s$ nicht einzeln auszurechnen.

Als Beispiel für gleiche Strecken, jedoch für dreifache Messung aller Teilstrecken, nehmen wir die schweizerische Basismessung von Aarberg mit dem spanischen Apparat (vgl. § 13. S. 89):

Strecke	Messung I	Messung II	Messung III	Mittel
s_1	400,0370m	400,0364m	400,0370m	400,0368m
s_2	400,0390	400,0383	400,0379	400,0384
s_3	400,0383	400,0382	400,0388	400,0384
s_4	400,0570	400,0580	400,0584	400,0578
s_5	400,0352	400,0356	400,0358	400,0354
s_6	399,9045	399,9044	399,9043	399,9044
Summe	2400,1110	2400,1109	2400,1117	2400,1112

Nun bildet man die sämtlichen 18 Differenzen v zwischen den Streckenmitteln und den Einzelmessungen, mit Quersummen $[v] = 0$ zur Probe, worauf die Quadrate v^2 sich ergeben:

	v	v^2	v	v^2	v	v^2	$[v]$
1.	— 0,2mm	0,04	+ 0,4mm	0,16	— 0,2mm	0,04	0,0mm
2.	— 0,6	0,36	+ 0,1	0,01	+ 0,5	0,25	0,0
3.	+ 0,1	0,01	+ 0,2	0,04	— 0,4	0,16	— 0,1
4.	+ 0,8	0,64	— 0,2	0,04	— 0,6	0,36	0,0
5.	+ 0,2	0,04	— 0,2	0,04	+ 0,1	0,01	+ 0,1
6.	— 0,1	0,01	0,0	0,00	+ 0,1	0,01	0,0
		1,10		0,29		0,83	2,22 = $[v^2]$

Der mittlere Fehler einer Messung einer Strecke von rund $0,4^{km}$ wird hiernach:

$$m_1 = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n\,(\sigma - 1)}} = \sqrt{\frac{2,22}{12}} = \pm\,0,430^{mm} \tag{4}$$

Hiebei ist mit σ die Wiederholungszahl der Strecken-Messung bezeichnet, also in diesem Falle $\sigma = 3$. Weiter berechnet man den mittleren Fehler einer Messung von 1^{km}, da $s = 0,4^{km}$ ist:

$$m = m_1 \sqrt{\frac{1}{0,4}} = \pm\,0,68^{mm} \tag{5}$$

Auch hat man den mittleren Fehler der 3fach wiederholten Messung der Gesamtlänge von $2,4^{km}$:

$$M = \sqrt{\frac{2,4}{3}}\,m = \pm\,0,61^{mm} \tag{6}$$

Man wird hiernach das Gesamtergebnis schreiben:

$$L = 2400,1112^{m} \pm 0,0061^{m}$$

Wenn hier die Strecken s nicht alle gleich wären, so müsste man nicht bloss v und v^2, sondern auch alle Werte $v : \sqrt{s}$ bzw. $v^2 : s$ bilden, und dann rechnen:

$$m = \sqrt{\frac{1}{n\,(\sigma - 1)}\left[\frac{v\,v}{s}\right]} \tag{7}$$

Sind alle s gleich, so stimmt das mit (5) und (6) überein.

Nach diesen Formeln, welche zur Berechnung des mittleren unregelmässigen Basismessungs-Fehlers aus Messungs-Wiederholungen dienen, geben wir im Folgenden eine Reihe von Beispielen hiefür, wobei immer m den mittleren unregelmässigen (aus Wiederholungen berechneten) Fehler *einer* Messung von 1 Kilometer Länge, bedeutet.

1736. *Basis von Yarouqui in Peru*, 2 Messungen mit hölzernen 15 oder 20 Fuss langen Latten (La Condamine Mesure des trois premiers degrés dans l'hemisphère australe, Paris 1751, S. 5) „nous nous accordâmes à moins de trois pouces près sur une longueur de 6273 toises.“ Dieses giebt $81,21^{mm}$ auf $12,226^{km}$ doppelt gemessen oder den mittleren Fehler für eine Messung von 1^{km}: . . . . . . $m = \pm\,16,42^{mm}$.

1736. *Basis von Tornea in Lappland*, 2 Messungen mit hölzernen Latten, 7407 Toisen, Differenz 4 Zoll. (Astr. Nachr. 6. Band, 1828, S. 20.) Dieses giebt $20,152^{mm}$ auf $14,436^{km}$ oder . . . . $m = \pm\,20,15^{mm}$.

1739. *Nachmessung der Picardschen Basis von Juvisy*, durch *Cassini* (Base du système métrique, III, S. 505), Basis von 5747 Toisen mit Eisenstangen gemessen, welche längs einer 50 Toisen langen Schnur unmittelbar aneinander gelegt wurden. Die Basis ist 5 mal gemessen:

	Toisen	Fuss	Zoll	Linien	Meter
1.	5747	2′	8″	6‴	= 11201,991
2.	„	4′	0″	9‴	= 11202,431
3.	„	3′	4″	10‴	= 11202,217
4.	„	4′	5″	10‴	= 11202,569
5.	„	4′	0″	0‴	= 11202,411
				Mittel	$11202,324^{m} \pm 0,100^{m}$.

Betrachtet man alle Abweichungen als unregelmässige Fehler, so erhält man den mittleren Fehler einer Messung von 1^{km}: . . . . $m = \pm 67{,}0^{mm}$.

1805. ***Benzenbergs*** Basismessung mit hölzernen Latten für das Rheinische Kataster (vgl. § 9. S. 62) . . . . $m = \pm 8{,}2^{mm}$.

1819. ***Schwerds kleine Basis.*** Zwei Messungen auf 20° R reduziert: $859{,}442734^m$ und $859{,}440943^m$ Differenz $= 1{,}791^{mm}$. (*Schwerd*, „Die kleine Speyrer Basis“, S. 33.) Dieses giebt . . . . $m = \pm 1{,}37^{mm}$.

1834—1872. ***Basismessungen mit dem Besselschen Apparate.***

Die Längen- und die Strecken-Verteilung der zahlreichen seit 1834 mit dem Besselschen Apparate gemachten Basismessungen haben wir schon in § 16. S. 101—102 mitgeteilt, und da auch die Messungs-Differenzen bereits anderwärts, nämlich in dem Werke: „Deutsches Vermessungswesen von Jordan-Steppes 1882“, I, S. 133 von uns zusammengestellt wurden, bilden wir hier die Tabelle der mittleren unregelmässigen Fehler m für je *eine* Messung von 1 Kil.:

Jahr	Länge	Basismessung	mittlerer Fehler m
1834	$1{,}822^{km}$	Königsberg (Gradm. in Ostpreussen) . .	$\pm 2{,}77^{mm}$
1838	2,701	Kopenhagen	0,86
1846	2,336	Berlin (Küstenvermessung)	1,55
1847	2,134	Bonn	0,73
1852	2,301	Lommel (Belgien)	0,66
1853	2,489	Ostende	0,54
1854	2,763	Strehlen (Schlesien)	1,75
1871	5,875	Braak (Holstein)	1,59
1872	8,909	Grossenhain (Sachsen)	1,46

(Die Angaben für Grossenhain sind von Nagel veröffentlicht im „Civilingenieur“, 28. Band, 1882, 1. Heft, vgl. auch Helmert, „Zeitschr. f. Verm. 1883“, S. 596.)

Besonders zu erwähnen ist hier noch die Göttinger Basismessung, weil dieselbe in metronomischer Beziehung neu behandelt wurde, wie wir bereits in § 14. S. 95—97 beschrieben haben. Die Genauigkeits-Berechnung, entsprechend 4 verschiedenen metronomischen Formeln, ist von General Schreiber in der „Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 1—17 mitgeteilt worden. Aus den 33 Strecken-Differenzen der 5193^m langen Linie (eine Strecke $= 157^m$) ergab sich der mittlere Fehler m einer Messung von 1^{km}, unter der Annahme unregelmässiger $\pm$ gleichwahrscheinlicher Fehler so:

	Formel (vgl. § 14. S. 96—97)	mittl. Fehler m
I.	$l = L - (k - 1{,}4)\,m$	$\pm 0{,}80^{mm}$
II.	$l = L - (k - 1{,}4)\,m - (k - 1{,}4)^2\,\varrho$	0,70
III.	$l = L - (k - 1{,}4)\,m - (k - 1{,}4)^2\,\varrho + \alpha\,h$ . . .	0,55
IV.	$l = L - (k - 1{,}4)\,m - (k - 1{,}4)^2\,\varrho + \alpha\,h + \alpha^2\,k$.	0,57

Die Differenzen für die ganze Länge 5193^m (hin und her) der Göttinger Basis wurden nach diesen 4 Formeln:

I	II	III	IV
$-14{,}10^{mm}$	$-13{,}04^{mm}$	$-8{,}17^{mm}$	$-7{,}62^{mm}$

1879—1880. ***Basismessung des geodätischen Instituts.***

Im Jahre 1879 wurde die alte schlesische Basis bei Strehlen, 2763^m lang, welche erstmals 1854 mit dem Besselschen Apparat gemessen worden war, von dem



geodätischen Institute mit einem Brunnerschen Apparate (S. 85) nachgemessen. Die Linie wurde in 10 gleichen Teilen von je 276^m hin und her gemessen. Die Messungs-Differenzen sind in dem „Generalbericht f. d. Europ. Gradm. für 1879“, S. 104 veröffentlicht; man berechnet hieraus den mittleren unregelmässigen Fehler einer Messung von 1^{km}: . . . . $m = \pm 0{,}76^{mm}$.

Einiges weitere hierüber giebt auch der „Generalbericht über den Fortschritt der Arbeiten für d. Europ. Gradm. im Jahre 1880“, S. 33—35.

Über die Bonner Basismessung 1892 haben wir bereits einiges citiert in Band I, 1895, 4. Aufl. S. 514. (Brunner = $2512{,}995^m$, Bessel = $2512{,}984^m$, Differenz = 11^{mm}).

1858. *Spanische Basismessungen.*

Spanische Basis von Madridejos, mit dem älteren Brunnerschen Apparate (S. 84) gemessen. Das Mittelstück, 2767^m der 5teiligen Basis (s. o. S. 106,) wurde in 12 Absätzen je zweimal gemessen (Astr. Nachr. 61. Band, 1864, S. 340). Die 11 ersten Abschnitte haben je 234^m Länge und die Differenzen der 11 Doppelmessungen sind: $+0{,}23$ $-0{,}20$ $+0{,}49$ $+0{,}00$ $-0{,}02$ $-0{,}23$ $-0{,}32$ $+0{,}39$ $-0{,}09$ $-0{,}28$ $+0{,}36^{mm}$, das letzte Stück hat nur 194^m Länge und gab bei der Doppelmessung die Differenz $-0{,}14$. Aus diesen 12 Doppelmessungen berechnet man . $m = \pm 0{,}40^{mm}$.

Über zwei kleinere, im Jahre 1860 ebenfalls mit dem älteren Brunnerschen Apparate gemessene Grundlinien giebt der „Generalbericht d. Europ. Gradm. für 1869“, S. 65 die Einzelheiten der Doppelmessungen, woraus man berechnet:

Basis von Mahon, 2359^m in 6 Absätzen, $m = \pm 0{,}43^{mm}$
„ „ Ivice, 1665^m „ 4 „ $m = \pm 0{,}32^{mm}$

Ausser diesen drei Linien sind bis 1879 noch 6 Grundlinien in Spanien gemessen worden, worüber Einzelheiten mitgeteilt sind in dem amtlichen Werke: „Memorias del instituto geográfico y estadistico. Tomo III. Madrid 1881, und Tomo IV, Madrid 1883. (Arcos de la Frontera III, S. 259, Lugo III, S. 337, Vich III, S. 419, Olite IV, S. 99.)

Schweizerische Basismessungen.

In den Jahren 1880—1881 wurden mit dem neuen spanischen Apparate (vgl. S. 87—89) drei Grundlinien in der Schweiz gemessen, bei Aarberg 2400^m, bei Weinfelden 2540^m und bei Bellinzona 3200^m. Die erste Linie 3mal (s. o. S. 144) die beiden anderen je 2 mal.

Aus den Messungs-Differenzen berechnet man den mittleren Fehler einer Messung von 1^{km}: . . . . Aarberg $m = \pm 0{,}68^{mm}$
Weinfelden $m = \pm 1{,}27^{mm}$
Bellinzona $m = \pm 0{,}89^{mm}$

Weiteres hierüber giebt das amtliche Werk: „Le réseau de triangulation suissse, publié par la commission géodésique suisse, troisième volume, la mensuration des bases par A. Hirsch et J. Dumur. Lausanne 1888.

Nordamerikanische Basismessungen mit dem Repsold-Comstockschen Apparat (§ 13. S. 89—93).

Nach dem Werke: „Report upon the primary triangulation of the United States Lake Survey, by Comstock etc. Washington 1882, S. 262, S. 290, S. 303 berechnet man aus den Messungs-Differenzen die mittleren unregelmässigen Fehler einer Messung von 1^{km}:



1877 Chicago-Base 7509ᵐ in 8 Strecken . . . . $m = \pm 1{,}12^{mm}$
1878 Sandusky-Base 6227ᵐ in 6 „ 1,19
1879 Olney-Base 6589ᵐ in 6 „ 0,79

Dabei sind die auf S. 97—98 erwähnten Korrektionen für die Ungleichheit der Temperaturen beider Massstabteile berücksichtigt.

1881. *Californien. Yolo-Country.*

United States coast and geodetic survey, methods and results on the length of the Yolo-Base-Line. Appendix Nr. 11. Report for 1883. Washington 1884, berechnet von Charles A. Schott, Assistent. (Vgl. auch „Generalbericht d. Europ. Gradm. für 1883", Annexe III, S. 2—3.)

Die 17,5ᵏᵐ lange Linie wurde teils zweifach, teils dreifach gemessen. Aus den 18 Differenzen-Vergleichungen zwischen der ersten und zweiten Messung berechnet man den mittleren Fehler einer Messung von 1ᵏᵐ . . . . $m = \pm 2{,}03^{mm}$

Österreichische Basismessungen.

1862. Grundlinie bei Josephsstadt, zwei Messungen, 2772,174020 und 2772,180159 Wiener Klafter, Differenz = 0,006139 W. Kl. („Generalbericht d. Europ. Gradm. 1863", S. 15). Dieses giebt 11,64ᵐᵐ Differenz auf 5,257ᵏᵐ, oder . . . . $m = \pm 3{,}59^{mm}$

1868. Basis in Dalmatien, zwei Messungen 1305,33270 und 1305,33186 Wiener Klafter, Differenz = 0,00084 W. Kl. („Generalbericht d. Europ. Gradm. 1870", S. 28), oder 1,6ᵐᵐ auf 2,475ᵏᵐ . . . . $m = \pm 0{,}72^{mm}$

1863. *Schwedische Grundlinie* auf Axevella, zwei Messungen 1357,03274 Toisen und 1357,03360 Toisen, Differenz = 0,00086 Toisen („Generalbericht d. Europ. Gradm. 1863", S. 28) oder 1,68ᵐᵐ auf 2,645ᵏᵐ . . . . $m = \pm 0{,}73^{mm}$

1865. *Italienische Basis von Catania.* Eine Basis 3692ᵐ wurde 6mal gemessen („Generalbericht d. Europ. Gradm. 1865", S. 64 und 65).

Wenn man die 6 Messungen als gleichartig behandelt, so findet man

$m = \pm 1{,}96^{mm}$

Die Messungen 1. 2. und 3. sind in der einen, 4. 5. 6. in der andern Richtung gemacht. Die beiden Arten zeigen eine regelmässige Differenz. Behandelt man daher die 3 ersten Messungen und die 3 letzten Messungen je für sich, so findet man die mittleren unregelmässigen Fehler für 1ᵏᵐ bzw. für 1. 2. 3. $m = \pm 0{,}85^{mm}$ und für 4. 5. 6. $m = \pm 0{,}47^{mm}$

1873. *Basis von Simlak*, gemessen von Oudemans bei der Triangulierung von Java (s. o. §. 14. S. 94).

Eine Länge von 3909ᵐ wurde in 20 Strecken von je rund 200ᵐ doppelt gemessen, woraus sich ergiebt . . . . $m = \pm 1{,}69^{mm}$

1890. *Französische Basismessung* bei Juvisy, in der Nähe von Paris. Ein Bericht in Comptes rendes etc. 112. Band, 1891 S. 770—773 und Auszug in „Zeitschr. f. Verm." 1891, S. 26—29 giebt hierüber: Die neue Grundlinie liegt an Stelle der schon von Picard 1669 mit 4 hölzernen Stangen und 1739 von Cassini mit 4 eisernen Stäben gemessenen Linie von 7,2ᵏᵐ (s. o. § 9. S. 63). Die Neumessung 1890 geschah mit einer 4ᵐ langen Platin-Kupfer-Stange von Brunner (vgl. S. 84), wobei eine Umwicklung mit dickem Wollenstoff stattfand, innerhalb dessen Wasser zirkulierte zum



Zweck der Temperatur-Ausgleichung. Die Messung erfolgte in 24 Abschnitten von ungleichen, im Mittel 300^m betragenden Längen. Der mittlere unregelmässige Fehler einer Messung von 1^{km} ergab sich nach der Formel (1) S. 144 für den südlichen Teil $m = 1{,}02^{mm}$, für den nördlichen Teil $m = 1{,}90^{mm}$, im Ganzen . . $m = \pm 1{,}52^{mm}$.

Geschwindigkeit der Basismessung.

Bei der Beurteilung der Leistungs-Fähigkeit eines Basis-Apparates kommt ausser der Genauigkeit auch die Geschwindigkeit in Betracht, weshalb wir hiefür eine Anzahl von Angaben gesammelt haben, die im Folgenden zusammengestellt sind. Dabei bedeutet immer v die gemessene Länge für 1 Stunde.

Schwerd mass im Jahre 1820 in 3 Tagen mit 30 Stunden eine 859^m lange Grundlinie zweimal (Schwerd: „Die kleine Speyrer Basis", S. 23—32). Dieses giebt für 1 Stunde . . . . $v = 57^m$

Die Württembergische Grundlinie Solitude—Ludwigsburg von $13\,032^m$ Länge wurde in 19 Tagen einmal gemessen (Kohler: „Die Landes-Vermessung des Königreichs Württemberg", S. 57). Rechnet man 1 Tag durchschnittlich zu 6 Stunden, so ist . . . . $v = 114^m$

Struve fand 1840 das mittlere Fortschreiten in 1 Stunde 42 Toisen für den Tennerschen Apparat und 36 Toisen für seinen Apparat („Vierteljahrsschrift der astr. Gesellschaft 1870", S. 69), dieses giebt

für den Apparat von Tenner . . . . $v = 82^m$
„ „ „ „ Struve . . . . $v = 70^m$

Basismessungen der preussischen Landes-Aufnahme mit dem Besselschen Apparat.

Nach einer bereits früher in der „Zeitschr. f. Verm." 1880, S. 387 und 1883, S. 583 gemachten Zusammenstellung haben wir folgende Maximal-Leistungen in 1 Tag, wobei 1 Lage = 4 Stangen = $15{,}6^m$ ursprünglich als Einheit zu grunde gelegt ist:

1834	Königsberg	68,6 Lagen	= 1070^m
1871	Braak	67 „	= 1045
1877	Oberhergheim	113 „	= 1763
1880	Göttingen	131 „	= 2044
1883	Meppen	150 „	= 2340

Dieses sind *Maximal*-Leistungen für je 1 Tag; was die *mittlere* Geschwindigkeit für 1 Stunde betrifft, so war dieselbe in Königsberg nach S. 47 „der Gradm. in Ostpreussen" 8 Lagen = 125^m in 1 Stunde. Teils durch die Vervollkommnungen des Apparates, teils durch die Übung steigerte sich die Geschwindigkeit so sehr, dass bei Göttingen auf 1 Lage etwa 5 Minuten, bei Meppen nur noch etwa 3 Minuten auf 1 Lage kamen. Hiernach haben wir folgende Geschwindigkeiten in 1 Stunde:

Königsberg . . . . $v = 125^m$
Göttingen . . . . $v = 187^m$
Meppen . . . . $v = 300^m$

Sächsische Basismessung bei Grossenhain.

Diese Basis ist ebenfalls mit dem Besselschen Apparat gemacht. Nach der Mitteilung „Zeitschr. f. Verm." 1883, S. 600 erforderte die $8\,909^m$ lange Linie folgende Zeiten:

Hinmessung 13 Tage = 118,5 Stunden, also 75 Meter in 1 Stunde
Rückmessung 12 „ = 88,0 „ „ 101 „ „ 1 „

Im Mittel hat man 206,5 Stunden für $17\,818^m$ oder die mittlere Geschwindigkeit in 1 Stunde: . . . . $v = 86^m$

Basismessungen des geodätischen Instituts.

Mit einem Brunnerschen Apparat, ähnlich dem ersten spanischen Apparate, wurden die zwei Grundlinien bei Strehlen (2763^m) und bei Berlin (2336^m) in den Jahren 1879—1880 gemessen. Nach Mitteilung von Fischer wurden zu Anfang stündlich 5 Stangenlagen (= 20^m) gemacht; nachdem aber das Personal eingeübt war, kamen bei der Strehlener Basis auf 1 Stunde durchschnittlich 7—8 Lagen, und bei der Rückmessung 10 Lagen. Bei der Berliner Basis wurden bei etwa dreistündiger Arbeitszeit Vormittags und dreistündiger Nachmittags zusammen 60 Lagen = 240^m gemessen.

Hiernach ist die Geschwindigkeit für 1 Stunde anzunehmen: . . . $v = 40^m$

Spanische Basismessungen mit dem Brunnerschen Apparat.

Der erste Brunnersche Apparat, mit welchem die Basis von Madridejos gemessen wurde, hatte eine sehr geringe Geschwindigkeit. Koppe schreibt hierüber in der Abhandlung „der Basisapparat des Generals Ibanez und die Aarberger Basismessung" S. 2:

Die erste spanische Basismessung, 14663^m, dauerte vom 22. Mai bis zum 7. September 1858. Sie erforderte 78 Arbeitstage, also 5,3 Tage für 1 Kilometer. Rechnet man 1 Tag = 6 Stunden, so erhält man für 1 Stunde . . . . $v = 31^m$

In dem Werke: „Expériences faites avec l'appareil à mesurer les bases u. s. w. traduit par Laussedat, Paris 1860", S. 210 ist angegeben, dass die Geschwindigkeit 2 Minuten für 1 Meter war, oder für 1 Stunde. . . . . $v = 30^m$

Bei den zwei kleinen spanischen Grundlinien von Mahon und Ivice auf den balearischen Inseln war nach dem „Generalbericht der Europ. Gradm. für 1869", S. 65 die Messungs-Geschwindigkeit in 1 Stunde: . . . . $v = 120^m$

Schweizerische Basismessungen.

1880—1881 die Grundlinien bei Aarberg, Weinfelden und Bellinzona (vgl. § 13. S. 85 bis 89). Die Zeitverhältnisse sind sehr genau angegeben, man findet die Geschwindigkeit in 1 Stunde:

Aarberg . . . . $v = 142^m$
Weinfelden . . . . $v = 114^m$
Bellinzona . . . . $v = 144^m$

Ausserdem sind auch die *Kosten* angegeben (S. 86 der amtl. Veröffentlichung), nämlich für alle drei Linien 37600 Fr. oder 4600 Fr. für 1 Kilometer.

Nordamerikanische Basismessungen mit dem Repsold-Comstockschen Apparat (vgl. § 13. S. 90—93).

„Report upon the primary triangulation" etc. S. 262, S. 290, S 300 giebt:

1877 Chicago-Base. Die mittlere Messung in 1 Tag war 292^m, die grösste Leistung in 1 Tag 500^m,

1878 Sandusky-Base. Der Durchschnitt für 1 Tag bei der Hinmessung war 88 Röhren = 352^m, bei der Rückmessung 100 Röhren = 400^m,

1879 Olney-Base. Die mittlere Röhrenzahl in 1 Tag war 105 = 420^m, die grösste Zahl an 1 Tag war 168 Röhren = 672^m. Gemessen wurde an 32 Tagen.

Die Tagesleistung wächst mit den Übungsjahren. Nehmen wir zum Schlusse 1 Tag = 6 Stunden = 420^m, so wird für 1 Stunde: . . . . $v = 70^m$

Neue französische Messung mit einer Brunnerschen 4^m langen Platin-Kupfer-Stange (s. o. S. 148—149).

Nach dem Bericht in Comptes rendus etc. 112. Band 1891 S. 772 erforderte die 7,226^{km} lange Linie zur Hinmessung 25 Tage, zur Rückmessung 18 Tage, also 43 Tage mit 14,5^{km}. Rechnet man 1 Tag = 6 Stunden, so giebt dieses 14500 : 258 = 56^m auf 1 Stunde . . . . $v = 56^m$

Schluss-Betrachtungen über Basismessung.

Die neueren Basismessungen sind technisch so fein behandelt, dass der mittlere unregelmässige Messungs-Fehler nicht mehr als etwa 1 Millimeter für 1 Kilometer beträgt. Dieses geht aus den auf S. 146—148 gesammelten mittleren Fehlern deutlich hervor, denn wir haben für den mittleren Fehler einer Messung von 1 Kilometer, in runden Durchschnittszahlen:

S. 146	für Bessels Apparat	$m = \pm 1{,}3^{mm}$
S. 147	„ den neuen spanischen Apparat	$0{,}9^{mm}$
S. 148	„ „ nordamerikanischen „	$1{,}0^{mm}$
	Durchschnitt	$m = \pm 1{,}1^{mm}$

Für Doppelmessung vermindert sich dieses noch auf $1{,}1 : \sqrt{2} = 0{,}8^{mm}$ für 1^{km}, indessen wollen wir den runden Wert $m = \pm 1^{mm}$ für 1^{km} als unregelmässigen von der Messung selbst herrührenden Fehler einer neueren Basis nun annehmen.

Ganz anders, nämlich ungünstiger, steht es mit den regelmässigen, namentlich den metronomischen Fehlern der Basismessungen.

Wir haben in §. 11. S. 75 berichtet, dass bei der Besselschen Basismessung bei Königsberg, 1834, der Hauptfehler, nämlich die Vergleichung mit einem von anderwärts gegebenen Normalmass, nur = 0,6 Milliontel der Länge gefunden wurde, und ähnliche kleine Werte wurden auch später mit dem Besselschen Apparate gefunden; indessen sind wahrscheinlich jene älteren Vergleichungen in Bezug auf Genauigkeit überschätzt, indem später mit dem Besselschen Apparate Unsicherheiten bis zu $0{,}02^{mm}$ auf eine Stange von 4^{m}, d. h. 5 Milliontel der Länge, gefunden wurden. (Vgl. dazu oben S. 147 auch die Differenz Brunner-Bessel = 11^{mm} auf $2{,}5^{km}$.)

Die beiden betrachteten Fehlerteile, nämlich m = mittlerer unregelmässiger Fehler und m' = mittlerer regelmässiger Fehler, setzen sich in bekannter Weise zum Gesamtfehler M für die Länge L zusammen, nach der Gleichung:

$$M = \sqrt{(m\sqrt{L})^2 + (m'\,L)^2} = \sqrt{m^2\,L + m'^2\,L^2} \qquad (1)$$

Nehmen wir nach dem bisherigen $m = 1^{mm}$ für $L = 1^{km}$ und als Minimum m' ebenfalls $= 1^{mm}$ für $L = 1^{km}$, so wird:

$$M = \sqrt{L + L^2}$$

Zur Übersicht ist hernach folgendes berechnet:

Gemessene Basis-Länge L	Mittlerer unregelm. Fehler $m\sqrt{L}$	Mittlerer regelmäss. Fehler $m'\,L$	Mittlerer Gesammt-Fehler M	Verhältnis $\frac{M}{L}$
				Milliontel
1^{km}	$\pm 1{,}00^{mm}$	$\pm 1{,}00^{mm}$	$\pm 1{,}41^{mm}$	1,41
2^{km}	$1{,}41^{mm}$	$2{,}00^{mm}$	$2{,}24^{mm}$	1,12
5^{km}	$2{,}24^{mm}$	$5{,}00^{mm}$	$5{,}10^{mm}$	1,02
10^{km}	$3{,}16^{mm}$	$10{,}00^{mm}$	$10{,}05^{mm}$	1,005

Hieraus ist zu sehen, dass bei grösseren Längen neben den systematischen Fehlern m', die unregelmässigen Messungs-Fehler m fast verschwindend sind; dieses



ist noch viel mehr der Fall, als die vorstehende Tabelle zeigt, weil wir hier nur m' = 1 Milliontel angenommen haben, während es in Wirklichkeit das 5—10 fache hievon betragen kann.

Durch solche Überlegungen wird der Fingerzeig gegeben, dass die Technik auf einem falschen Wege war, als sie Apparate, wie den älteren Brunnerschen und ähnliche schuf. (Vgl. § 13. S. 84.)

Die Messungs-Geschwindigkeiten sind nach der Zusammenstellung S. 149—150 sehr verschieden; die äussersten Werte scheinen zu sein:

Älterer Brunnerscher Apparat . . . . . . v = 30 Meter in 1 Stunde
Bessels Apparat, Landes-Aufnahme bei Meppen v = 300 „ „ „ „

Die Hauptsache der Basismessung, nämlich der metronomische Teil, liegt nun in den Händen des internationalen Mass- und Gewichts-Bureaus (vgl. § 8. S. 56 und in dieser Beziehung werden ohne Zweifel die nächsten Basismessungen sich wesentlich von den früheren unterscheiden.

§ 24. Basis-Anschlüsse.

Wenn man die mittleren Fehler zweier Grundlinien und den mittleren Winkelfehler einer verbindenden Triangulierung kennt, so kann man auf theoretischem Wege den Fehler berechnen, welcher beim Durchrechnen der Triangulierung von einer Grundlinie zur anderen sich wohl einstellen wird, oder man kann auch berechnen, um wie viel eine Triangulierungskette in der Messung und Berechnung ihren wahren Endpunkt verfehlen wird, im Sinne der Entfernung und im Sinne der Richtung.

Theoretische Betrachtungen hiezu haben wir in den vorhergehenden §§ 17—20 gegeben, und es ist hiezu an alles zu erinnern, was bereits in unserem I. Bande, 1895, 4. Aufl., in Kap. V über Triangulierungs-Genauigkeit verhandelt worden ist. Auch erfahrungsmässige Genauigkeitsangaben sind daselbst in grosser Zahl gesammelt und wir wollen auch nochmals an die wertvollen auf mühsame Berechnungen gegründeten Angaben der preussischen Landes-Aufnahme über Entfernungs- und Azimutalfehler langer Ketten erinnern, welche im I. Bande der Landestriangulation enthalten und von uns (in „Jordan-Steppes, Deutsches Vermessungswesen I“ S. 138—139) dahin zusammengefasst worden sind, dass eine Dreiecksseite in 100^{km} Entfernung an der Basis, mit 7 Milliontel ihrer Länge erhalten wird, oder dass eine Kette von 130^{km} einen Entfernungsfehler von nur 3 Milliontel der Entfernung und einen Richtungsfehler von kaum 1″ bietet.

Wichtiger als die so zu berechnenden theoretischen Anschlussfehler sind die thatsächlich in der Praxis aufgetretenen Anschlussfehler und wir haben daher schon frühzeitig solche Anschlüsse aus der vorhandenen Litteratur gesammelt, wie aus unseren früheren Auflagen und zugehörigen Veröffentlichungen zu ersehen ist; es ist aber schwer auf diesem Gebiete rein objektive Nachrichten zu erlangen, weil sehr oft die Vermutung nicht zu unterdrücken ist, dass die Berechner früherer Zeiten die Anschlüsse in der Triangulierungsausgleichung mehr oder weniger haben miteinspielen lassen. —

Das Wichtigste auf diesem Gebiete sind die neueren Untersuchungen des geodätischen Institutes, von welchen wir im Folgenden einige Auszüge vorführen:



Wir betrachten zuerst ein Werk von *Helmert:*

Veröffentlichung des Königlich preussischen Geodätischen Instituts und Centralbureaus der internationalen Erdmessung. Die europäische Längengradmessung in 52 Grad Breite von Greenwich bis Warschau. I. Heft, Hauptdreiecke und Grundlinienanschlüsse von England bis Polen, herausgegeben von F. R. Helmert mit zwei lithographischen Tafeln. Berlin, Druck und Verlag von Stankiewicz, Buchdruckerei, 1893.

Wir haben von diesem Werke schon in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 283—299 die neue Theorie der Triangulierungsausgleichung mit Richtungsgewichten mitgeteilt und können nun weiter aus dem 4. Kapitel über die Grundlinien und ihre Anschlüsse folgendes berichten, wobei mit (H. S. . . .) die Citate aus dem Originalwerk beigegeben sind.

Alle mit dem Basisapparat von Bessel gemessenen Grundlinien beruhen auf der Toise von Bessel, welche Bessel selbst 1823 setzte (H. S. 225):

$$P = 863{,}9992 \text{ Par. Linien bei } 16{,}25° \text{ oder bei } 13° \text{ R.}$$

Wir haben diese Toise bereits in § 7. S. 53—54 und in § 11. S. 75, Gleichung (19) erwähnt, dieselbe kommt in Bessels „Gradmessung in Ostpreussen" S. 22 vor mit der Angabe, dass ihre wahre Länge = 863,9992 Par. Linien sei, mit der Gleichung:

$$P = 863{,}835384 + 0{,}0126014 \text{ R}°$$

was man auch so schreiben kann

$$P = 863{,}99920 \; (1 + 0{,}0000145877 \; [\text{R}° - 13°])$$
$$= 863{,}99920 \; (1 + 0{,}00001167016 \; [\text{C}° - 16{,}25°])$$

d. h. Bessel hat in der Gradmessung in Ostpreussen den Ausdehnungs-Coefficienten 0,00001167 für 1° C, und bei den Pendelversuchen nahm Bessel den von Borda für Eisen bestimmten Wert $\alpha = 0{,}0000114$ als Ausdehnungs-Coefficient (H. S. 226).

Die in neuester Zeit gemachte Vergleichung der Bessel schen Toise im internationalen Massbureau zu Breteuil gab (H. S. 226):

$$P = 1949{,}061^{mm} \text{ bei } 16{,}25°$$

und den Ausdehnungs-Coefficienten $\alpha = 0{,}00001160$. Durch diese Neubestimmung konnten die mit Bessels Apparat gemessenen Grundlinien auf internationales Metermass reduziert werden. Das Endergebnis ist nach H. S. 230—231, dass alle auf Bessels Bestimmungen beruhenden geodätischen Linien bezw. Dreiecksseiten, nachdem sie inzwischen formell mit 443,296 : 864 auf Metermass reduziert sind, nun noch mit einer Korrektion von + 57,7 Einheiten der 7. Logarithmenstelle versehen werden müssen, um sie auf internationales Metermass zu reduzieren.

Diese Zahl ist für die Zukunft wichtig und wir wollen dazu sogleich auch aus der Veröffentlichung der Landes-Aufnahme, Landes-Triangulation, Hauptdreieck V. Teil, Berlin 1893 Seite V citieren:

Allen in Metern ausgedrückten Ergebnissen der Landes-Aufnahme hat man, um sie auf internationales Metermass zu bringen, eine Reduktion zuzufügen, welche beträgt:

$$\text{logarithmisch} + 0.0000058 \text{ oder } + 58 \text{ Einheiten der 7. Stelle}$$

oder in Teilen der Längen selbst:

$$+ \frac{58}{4.3429\ldots} = 13{,}4 \text{ Milliontel}$$
$$\text{oder } + 13{,}4^{mm} \text{ auf } 1^{km}.$$

So wurden behandelt die Grundlinien von Königsberg, Berlin, Bonn, Ostende und Lommel, Strehlen, Grossenhain, Göttingen, woraus mit Rücksicht auf Nebenumstände eine Reduktionstabelle (H. S. 241) entsteht. Nachdem hierbei auch die mitt-

leren Fehler der Grundlinien geschätzt waren, nämlich $\pm$ 10·0 (d. h. 10 Einheiten des 7stell. Logar.) und entsprechend auch $\pm$ 18·0 für englische und $\pm$ 10·0 für russische Linien, kommen die Vergrösserungsnetze in Betracht, durch welche der trigonometrische Weg von der Basis selbst bis zur ersten Hauptdreiecksseite hergestellt wird, mit Fehlerschätzung nach Näherungsformeln (H. S. 245) und endlich dazu die trigonometrische Verbindung längs der Hauptketten von Basis zu Basis, wozu Fehlerschätzungen nach H. S. 83 möglich sind. Das sind nun alles Genauigkeitsbestimmungen a priori, und es entsteht die brennende Frage, wie die trigonometrische Zusammenrechnung zwischen den Grundlinien thatsächlich stimmen wird, ob die faktischen Anschlussfehler den theoretisch berechneten Fehlern entsprechen werden?

Die 9 Grundlinien mit ihren 8 Verbindungs-Triangulierungsnetzen wurden einer Ausgleichung unterworfen (H. S. 243—244), wobei die Verbesserungen $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_9$ der Grundlinien selbst als unabhängige Unbekannte und die Verbesserungen $v_1 v_2 \ldots v_8$ der 8 Verbindungs-Triangulierungen als Beobachtungen auftreten, mit Gewichten, welche der Form und Ausdehnung der Netze a priori angepasst sind. Der mittlere Gewichtseinheitsfehler ergab sich nach der Ausgleichung $= \pm 33$ und für das Durchschnittsgewicht 4—5 der mittlere Fehler $= \pm 16$ Einheiten der 7. logar. Dezimale oder $= 16 : 4.34 = 3{,}8^{mm}$ auf 1^{km}, ein ungemein *kleiner* Betrag (giltig für ein v oder σ).

Die Hauptergebnisse der Basisgenauigkeiten und der Verbindungs-Triangulierungsgenauigkeiten sind in einer Tabelle auf H. S. 251 enthalten, welche wir hier in zwei Teilen vorführen:

Mittlere Fehler a priori (H. S. 251.) (1)

Nr.	Grundlinie	Basis, direkte Messung	Vergrösserungs-Netz	Verbindungs-Netz
1	Englische Basis	± 18	± 40	
2	Ostender „	± 10	± 35	± 100
3	Lommeler „	± 10	± 30	± 50
4	Bonner „	± 10	± 30	± 32
5	Göttinger „	± 10	± 9	± 37
6	Grossenhainer „	± 10	± 7	± 28
7	Strehlener „	± 10	± 23	± 38
8	Berliner „	± 10	± 21	± 22 zu (6,8)
9	Königsberger „	± 10	± 23	± 83
Durchschnitt		± 28		± 55 7. Log.-Stelle
		± 6,4		± 12,7mm auf 1km

Der vorstehenden Tabelle für Fehler a priori entspricht nun folgende zweite Tabelle der Fehler a posteriori:

Mittlere Fehler a posteriori (H. S. 251). (2)

Nr.	Grundlinie	Verbindungsausgleichung: Verbesserung ς	Verbindungsausgleichung: Verbesserung v	Länge des Verbindungs-Netzes
				km
1	Englische Basis	− 4·6		
			− 4·5	200
2	Ostender „	− 21·1		
			− 12·9	170
3	Lommeler „	− 2·0		
			− 13·8	140
4	Bonner „	+ 22.2		
			− 2·8	220
5	Göttinger „	+ 7·4		
			+ 4·6	250
6	Grossenhainer „	− 1·0		
			− 7·3	260
7	Strehlener „	+ 14·7		
			+ 10·8 zu (6,8)	130
8	Berliner „	− 7·2		
			+ 18·2	540
9	Königsberger „	+ 12·0		
				210 km
Durchschnitt		± 16·0	± 16·0 7. Log.-Stelle	
		= ± 3,71	3,7mm auf 1km	

Die mittleren Fehler sind in dieser Tabelle in Einheiten der 7. Log.-Dezimale angesetzt, d. h. da $d \log x = \frac{0{,}434}{x}$ ist, muss man die 7. Log.-Stelle mit 4,34 dividieren, um sie in Milliontel der Längen (oder in Millimeter für 1 Kilometer) zu verwandeln.

Die unmittelbaren Basisfehler, im Durchschnitt $\pm 2{,}5^{mm}$ auf 1^{km}, sind Schätzungen, nach Anbringung der Reduktionen auf das internationale Meter.

Was weiter die mittleren Fehler der Verbindungs-Triangulierungen zwischen zwei Grundlinien betrifft, so hat man für Ketten erster Ordnung unsere früheren Formeln von § 18, insbesondere die Formel (13) S. 111, welche mit anderen Bezeichnungen, und logarithmisch ausgedrückt in H. S. 83, Anmerkung, angegeben ist.

Da aber die Ketten erster Ordnung mit ihren $20-50^{km}$ langen Seiten nicht unmittelbar an die nur $5-7^{km}$ langen Grundlinien anschliessen können, sondern besondere Basisnetze, gewöhnlich rhombisch (vgl. S. 104—108) zur Vermittlung haben, so mussten dafür die mittleren Übertragungsfehler besonders bestimmt werden. Den mittleren Fehler der Höhe h eines einzelnen gleichschenkligen Dreiecks haben wir bereits in § 18. bestimmt, nämlich nach der Formel (22) auf S. 113 oben, welche mit gleichen Gewichten $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, und Weglassung von ϱ giebt:

$$\mu(h) = \frac{m\,(h)}{h} = \frac{\mu}{\sin(1)}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Hat man zwei solche gleichschenklige Dreiecke auf beiden Seiten einer Grundlinie angesetzt, etwa wie in Fig. 4. S. 114, jedoch mit ungleichen Höhen h und h', so erhält man daraus

$$m\,(h + h') = \frac{\mu\,h}{\sin(1)}\sqrt{\frac{2}{3}} \pm \frac{\mu\,h'}{\sin\,(1')}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$m\,(h + h') = \mu\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{h^2}{\sin^2(1)} + \frac{h'^2}{\sin^2(1')}}$$

Dieses ist in anderer Form dasselbe wie die erste Formel in H. S. 245, und, um auch die zweite dort angegebene Formel für zwei rechtwinklige Dreiecke nachzuweisen, nehmen wir unsere allgemeine zu Fig. 4. S. 113 gehörige Formel (25) S. 114 und setzen darin, um a und a' in eine zu b rechtwinklige Gerade zu verwandeln:

$$\begin{array}{llll} \alpha = 0\;, & (1) = \gamma & (3) = 90^\circ\;, & (2) = 90^\circ - \gamma\;, \quad \beta = 90^\circ \\ \alpha' = 0 & (1') = \gamma' & (3') = 90^\circ & (2') = 90^\circ - \gamma' \end{array}$$

und dazu $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, dann wird (ohne ϱ):

$$(m\,(B))^2 = \mu^2\left(\frac{b^2\sin^2\gamma + a^2\cos^2\gamma + c^2}{\sin^2\gamma\cdot 3} + \frac{b^2\sin^2\gamma' + a'^2\cos^2\gamma' + c'^2}{\sin^2\gamma'\,.\,3}\right)$$

$$= \frac{\mu^2}{3}\left(b^2 + \frac{a^4}{b^2} + \frac{c^4}{b^2} + b^2 + \frac{a'^4}{b^2} + \frac{c'^4}{b^2}\right)$$

$$= \frac{\mu^2}{3}\left(2\,b^2 + \frac{a^4 + a'^4}{b^2} + \frac{(a^2+b^2)^2 + (a'^2+b^2)^2}{b^2}\right)$$

$$(m\,(B))^2 = \frac{2\,\mu^2}{3}\left(b^2 + \frac{a^4 + a'^4}{b^2} + (a^2 + a'^2)\right)$$

Dieses ist die zweite Formel von H. S. 245. Durch solche Formeln wurden die Wirkungen der Basis-Netze geschätzt und in Verbindung mit der Kettenformel (13)

S. 111 sind dann die mittleren Fehler a priori bestimmt worden, welche in den zwei letzten Spalten der oben S. 154 gegebenen Tabelle (1) auftreten.

Betrachten wir nun diese Tabelle (1) S. 154 und die darauffolgende Tabelle (2) S. 154, so fällt uns zuerst auf, wie klein die meisten auftretenden Beträge sind, mehr aber noch, wie sehr klein die a posteriori erhaltenen Fehler sind im Vergleich mit den a priori geschätzten, z. B. 12,7 : 3,7 bei den Verbindungsnetzen. Es wird gesagt (H. S. 252), dass zu diesem befriedigenden Ergebnis der Zufall wohl viel beigetragen habe. Unter allen Umständen bieten diese Fehlertabellen ein vortreffliches und in mancher Hinsicht erstes aus weiten Gebieten genügend kritisch gesammeltes Urteil über die Genauigkeit moderner Triangulierungen.

Eine zweite wichtige Untersuchung über Basis-Anschlüsse ist mitgeteilt in den „Verhandlungen der X. allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung zu Brüssel 1892", Seite 518—456. „Verbindung und Vergleichung geodätischer Grundlinien", zusammengestellt im Zentral-Bureau der Internationalen Erdmessung von Dr. Kühnen, wovon ein Auszug auch in der „Zeitschr. f. Verm." 1894, S. 75—79 gegeben ist.

Es war verfügbar je *ein* Anschluss zwischen den Ländern: Algerien, Spanien, Frankreich, England, Belgien, Deutschland, Russland; — Deutschland, Schweiz, Italien, Oesterreich; — Deutschland, Dänemark. Zwar giebt es zwischen Deutschland und Russland 4 und zwischen Deutschland und Dänemark 2 Anschlüsse, doch lagen die Verhältnisse für nur je *einen* von diesen so einfach, dass sie für den Bericht 1892 berücksichtigt werden konnten. Wären nun die Anschlüsse der verschiedenen Länder allein zusammengestellt, so wäre die Arbeit wenig lehrreich gewesen. Dagegen gewinnt sie ein grosses Interesse dadurch, dass eine Vergleichung fast aller europäischen Grundlinien (nebst den algerischen) ausgeführt worden ist. Im Ganzen erstreckt sich die Vergleichung von $7^1/_2{}^\circ$ westl. Länge (Lugo) bis $58^1/_2{}^\circ$ östl. Länge (Orsk), und von $35^1/_2{}^\circ$ nördl. Breite (Oran) bis $55^1/_2{}^\circ$ nördl. Breite (Amager).

Die Hauptschwierigkeiten der Arbeit bestanden darin, eine sichere Reduktion der einzelnen Basislängen auf das internationale Meter festzustellen. Für die Hälfte der Grundlinien war diese Schwierigkeit bereits durch die Europäische Längengradmessung von Prof. Helmert gehoben, über welche im Vorstehenden S. 154 berichtet ist.

Als allgemeine Bezugsbasis ist nach dem Vorgange der Helmertschen Längengradmessung die Basis von Lommel gewählt. Die Ergebnisse sind in einer Tabelle zusammengestellt, welche ausser 9 deutschen Grundlinien weiter 2 belgische, 2 neue und 3 alte französische, 6 spanische, 3 algerische, 2 englische, 3 schweizerische, 2 italienische, 2 österreichische, 1 dänische und 13 russische — zusammen 48 Grundlinien enthält, die durch rund 1000 Dreiecke mit einander verbunden sind.

Diese grosse und wichtige Tabelle findet sich in den „Verhandlungen der Konferenz in Brüssel 1892" auf S. 540—545 mit 46 Grundlinien und ein Auszug daraus in der „Zeitschr. f. Verm." 1894, S. 78—79. Hier genügt es, daraus folgendes mitzuteilen:

Die Anschlüsse stimmen im allgemeinen über Erwarten günstig, es ergiebt sich für je 2 Grundlinien eine mittlere Anschluss-Differenz von $15{,}6^{mm}$ für 1^{km}.

Ein Polygon, welches fast ganz Zentral-Europa umfasst, nämlich von der Grundlinie Berlin ausgehend, über Göttingen, Bonn, Oberhergheim, Aarberg, Weinfelden, Bellinzona, Somma, Udine, Grossenhain bis zurück nach Berlin, schliesst mit einem Widerspruch von nur $15{,}5^{mm}$ für 1^{km}. —

Solcher Polygone, aber in viel geringerer Ausdehnung, konnten mehrere in Spanien geschlossen werden; auch dort sind die Resultate, bis auf eines, günstig. — Die Anschlussdifferenzen gegen Lommel addieren sich nur bei der russischen Längengradmessung systematisch und erreichen bei Orsk den bedeutenden Betrag von 570^{mm} für 1^{km}. Im übrigen sind die drei grössten Abweichungen gegen Lommel: Lugo (Spanien) mit 81^{mm}, Taschbunar (russ. Breitengradmessung von Struve) mit 54^{mm} und Oran (Algerien) mit 36^{mm} für 1^{km}.

Die Anschlüsse zwischen Grundlinien benachbarter Länder, die mit *verschiedenen* Apparaten gemessen worden sind, sind in der folgenden Tabelle enthalten. (In Belgien und Dänemark diente der preussische Bessel'sche Basisapparat.)

Anschluss	Entfernung in km	Anzahl der verbindenden Dreiecke	Anschlussdifferenz in 7. Stelle des Log.	Anschlussdifferenz in mm für 1 km
1) Algerien — Spanien (Oran — Cartagena)	450	18	— 105	— 24,2
2) Spanien — Frankreich (Vich — Perpignan)	100	10	— 9	— 2,1
3) Frankreich — England (Paris — engl. Basen) . . .	300	27	+ 14	+ 3,2
4) Frankreich — Belgien (Paris — Ostende)	275	26	+ 46	+ 10,6
5) England — Belgien (engl. Basen — Ostende) . . .	150	9	— 10	— 2,3
6) Deutschland — Schweiz (Oberhergheim — Aarberg)	100	15	— 40	— 9,2
7) Schweiz — Italien (Bellinzona — Somma)	75	3	— 29	— 6,7
8) Preussen — Russland (Strehlen — Czenstochau) .	150	11	+ 2	+ 0,5
Summe	1600 km	119	± 255	± 58,8
Durchschnitt	200	13	± 32	± 7,4

Der rohe Durchschnitt giebt also zwischen je zwei Grundlinien mit 13 Verbindungsdreiecken auf 200^{km} Entfernung eine Anschluss-Differenz $= 0.000\,0032$ im Logarithmus oder $\frac{32}{4,34} = 7,4^{mm}$ für 1^{km}.

Im Ganzen kommt der Verfasser zu folgenden Schlüssen:

I. Nach Reduktion auf internationale Meter zeigen die Grundlinien, welche in benachbarten Ländern mit *verschiedenen* Apparaten gemessen sind, keinen Unterschied gegen die Grundlinien, die mit *demselben* Apparat gemessen worden sind.

II. Die Vergleichung der Grundlinien vermittelst Dreiecksketten lässt deshalb weitere Schlüsse über die Massvergleichung, über die Reduktionsfaktoren, oder über die angewandte Messungsmethode nicht mehr zu (d. h. diese Feinheiten verschwinden neben den Triangulierungsfehlern).

III. Um alle Grundlinien wirklich einheitlich auf einander beziehen zu können, ist es erforderlich, entweder sämtliche Grundlinien mit demselben Apparat zu messen, oder eine einzige Grundlinie mit allen Apparaten zu messen, und hiernach die einzelnen Apparate gegen einander zu bestimmen.

§ 25. Änderung der geographischen Breite.

Die seit etwa 10 Jahren konstatierte und nun in gründlicher Erforschung befindliche Änderung der geographischen Breite eines Ortes, allgemeiner die Schwankungen der Erdaxe, bis zu 0,3″ Ausweichung von der Mittellage, bildet eine Haupt-



aufgabe der heutigen internationalen Erdmessung und muss wohl auch in unserem der Geodäsie gewidmeten Bande summarisch behandelt werden, obgleich astronomische Messungen sonst hier ausgeschlossen sind.

Wir hatten schon in der „Zeitschr. f. Verm." 1891 einiges hierüber aus den Verhandlungen der permanenten Kommission der internationalen Erdmessung von Freiburg 1890 berichtet, mit Mitteilungen von Herrn Professor *Albrecht* am geodätischen Institut, welcher auch für die allgemeine Konferenz der Erdmessung in Berlin 1891 den amtlichen Bericht erstattet (vgl. „Zeitschr. f. Verm." 1891, S. 579—580) und den nachstehenden Auszug daraus unterstützt hat.

Nachdem schon früher 1842—1843 an der Polhöhe von Pulkowa kleine Änderungen vermutet und rechnerisch erörtert waren (Helmert, Höhere Geodäsie, II. Band, 1884, S. 394) ist die Frage der Breiten-Änderung auf der Erdmessungs-Konferenz in Rom, 1883, bestimmter gestellt worden. Auf dieser Konferenz wurde diese Frage von Fergola angeregt.

Es wurde vorgeschlagen, an mehreren passend gewählten Orten auf der Erdoberfläche unter Anwendung gleicher Instrumente und einheitlicher Beobachtungsmethoden Breitenbestimmungen vorzunehmen, welche in hinreichend von einander abstehenden Zeitepochen zu wiederholen seien.

Die Konferenz in Rom beschäftigte sich eingehend mit dieser Frage, ohne dass indes praktische Folgen hieraus hervorgingen.

Die Resultate einer mehr als einjährigen Beobachtungsreihe des Herrn Küstner auf der Berliner Sternwarte nach der Methode Horrebow-Talcott brachten von Neuem diese Frage in Fluss.

Durch die Ergebnisse dieser letzterwähnten Beobachtungsreihe war die Frage einer Veränderlichkeit der Polhöhe in ein akuteres Stadium getreten, da Küstner zu dem Resultat gelangt war, dass die Beobachtungen derselben Sternpaare im Frühjahr 1885 eine um $0{,}20'' \pm 0{,}04''$ kleinere Polhöhe ergaben als diejenigen im Frühjahr 1884. (Vgl. Küstner, Neue Methode zur Bestimmung der Aberrations-Konstante nebst Untersuchungen über die Veränderlichkeit der Polhöhe, Berlin 1888, S. 47.)

Dadurch wurde die Frage nahe gerückt, ob nicht vielleicht neben den schon mehrfach vermuteten säkularen Änderungen der Polhöhe auch Schwankungen innerhalb kürzerer Fristen nachzuweisen seien. Die Möglichkeit derartiger Veränderungen, als Folge der meteorologischen Vorgänge an der Erdoberfläche ist unbestritten; nur erschien es zweifelhaft, ob dieselben die Grenzen der Messbarkeit erreichen.

Auf der Konferenz der Permanenten Kommission in Salzburg 1888 wurde der Beschluss gefasst, mit eigenen Mitteln und Kräften zur Aufklärung der Frage der Veränderlichkeit der Lage der Erdaxe im Erdkörper beizutragen, und zur Vorbereitung weiterer umfassenderer Untersuchungen dieser Art Vorversuche anzustellen, welche dem Zentralbureau übertragen wurden.

Darauf hin wurden vom Anfang 1889 ab fortlaufende Breitenbestimmungen in Berlin, Potsdam und Prag unter Anwendung der Methode von Horrebow-Talcott ausgeführt.

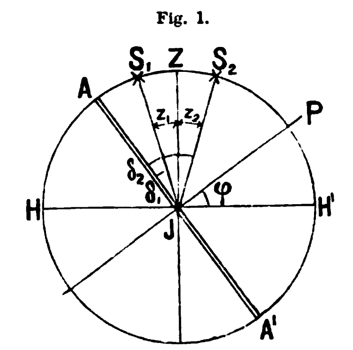
Der Grundgedanke dieser Methode ist in Fig. 1. S. 159 angedeutet, er beruht auf der Meridian-Zenit-Distanzmessung zweier Sterne in nahezu gleichen Zenitabständen. (Vgl. Albrecht, Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, Leipzig 1894, 3. Aufl., S. 75 u. ff.)



Sind S_1 und S_2 zwei Sterne, welche auf verschiedenen Seiten von dem Zenit Z eines Punktes J kulminieren und die Deklinationen δ_1 und δ_2 haben, so sind die beiden Zenitdistanzen z_1 und z_2, ausgedrückt in der Breite φ des Beobachtungsortes und den Deklinationen δ_1 und δ_2 der beiden Sterne:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \varphi - \delta_1 \qquad\qquad z_2 = -\varphi + \delta_2 \\ \text{also} \qquad \varphi &= \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \frac{z_1 - z_2}{2} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Fig. 1.



Wenn man nun solche Sterne hat, deren Zenitdistanzen z_1 und z_2 sehr nahe *gleich* sind, nämlich nur um wenige Minuten verschieden, während z_1 und z_2 selbst bis zu 25°—30° betragen dürfen, so braucht man zur Messung der *Differenz* $z_1 - z_2$, auf welche es ankommt, die Kreisteilung nicht, sondern nur Mikrometer-Ablesungen, deren Fehler hinreichend klein gemacht werden können.

Die Vorteile des Verfahrens sind: Minimum an Rechnungsarbeit, höchster Genauigkeitsgrad der Resultate, nahezu völlige Unabhängigkeit von systematischen Fehlern.

Um aber von den Fehlern in den angenommenen Deklinationen der Sterne unabhängig zu werden, wurde ein Kettenverfahren angewendet, dergestalt, dass auf jeder der Stationen 9 Sterngruppen von je 8 bis 9 Sternpaaren ausgewählt wurden, so dass an jedem klaren Abende je zwei dieser Sterngruppen nach einem festen Beobachtungsprogramm beobachtet werden konnten.

Die Veränderung der Polhöhe kann dadurch unabhängig von den Deklinationsunsicherheiten der Sterne erhalten werden, dass zunächst innerhalb jeder Sterngruppe die Reduktionen jedes einzelnen Sternpaares auf das mittlere Deklinations-System der betreffenden Gruppe abgeleitet, und die übergreifenden Gebiete je zweier Gruppen dazu benützt werden, die Deklinations-Systeme der Gruppen unter einander (unabhängig von der Veränderlichkeit der Polhöhe) festzustellen.

Die Ergebnisse der Beobachtungen, auf eine und dieselbe Sterngruppe reduziert, und daher von der Unsicherheit der angenommenen Deklinationen der Sterne befreit, sind enthalten in den Verhandlungen der vom 15.—21. Sept. 1890 zu Freiburg i. B. abgehaltenen Konferenz der permanenten Kommission der internationalen Erdmessung. Berlin 1891, S. 14—18.

Diese Ergebnisse wurden graphisch dargestellt, wie aus den hier folgenden Kurven für Berlin, Potsdam, Prag zu ersehen ist.

Fig. 2. Berlin.

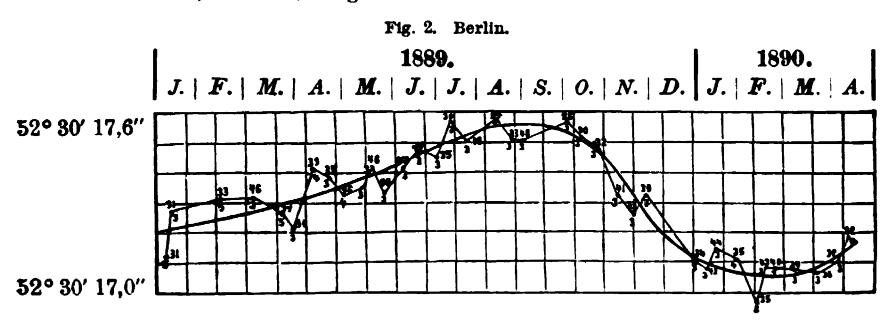




Fig. 3. Potsdam.

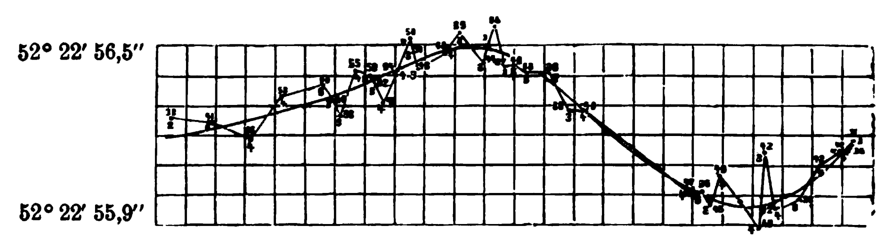
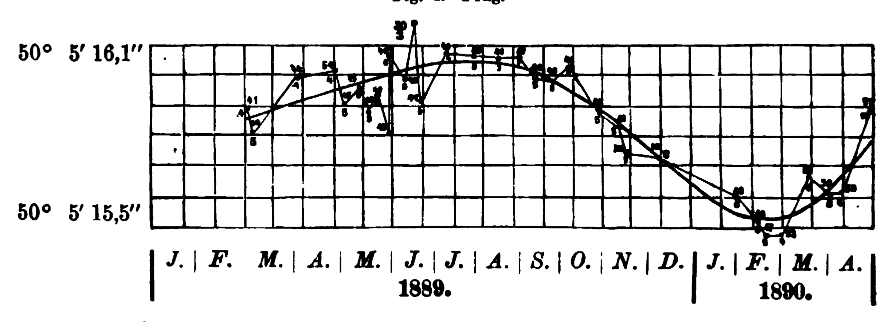


Fig. 4. Prag.



In diesen Darstellungen sind die Zeiten als Abscissen und die Breiten als Ordinaten behandelt.

In den Abscissen ist 1 Teil = 20 Tage oder = $^2/_3$ Monat, in den Ordinaten ist 1 Teil = 0,1″. Die beigeschriebenen Zahlen bedeuten die Sternpaare der Beobachtungen und die Zahl der Beobachtungstage z. B. bei Potsdam $\frac{33}{2}$ bedeutet 2 Beobachtungstage zwischen dem 1. und 20. Januar 1889, und Anwendung von 33 Sternpaaren.

Die Kurven zeigen einen so nahe parallelen Verlauf auf allen drei Stationen, dass an der Realität der Polhöhenänderung nicht zu zweifeln ist.

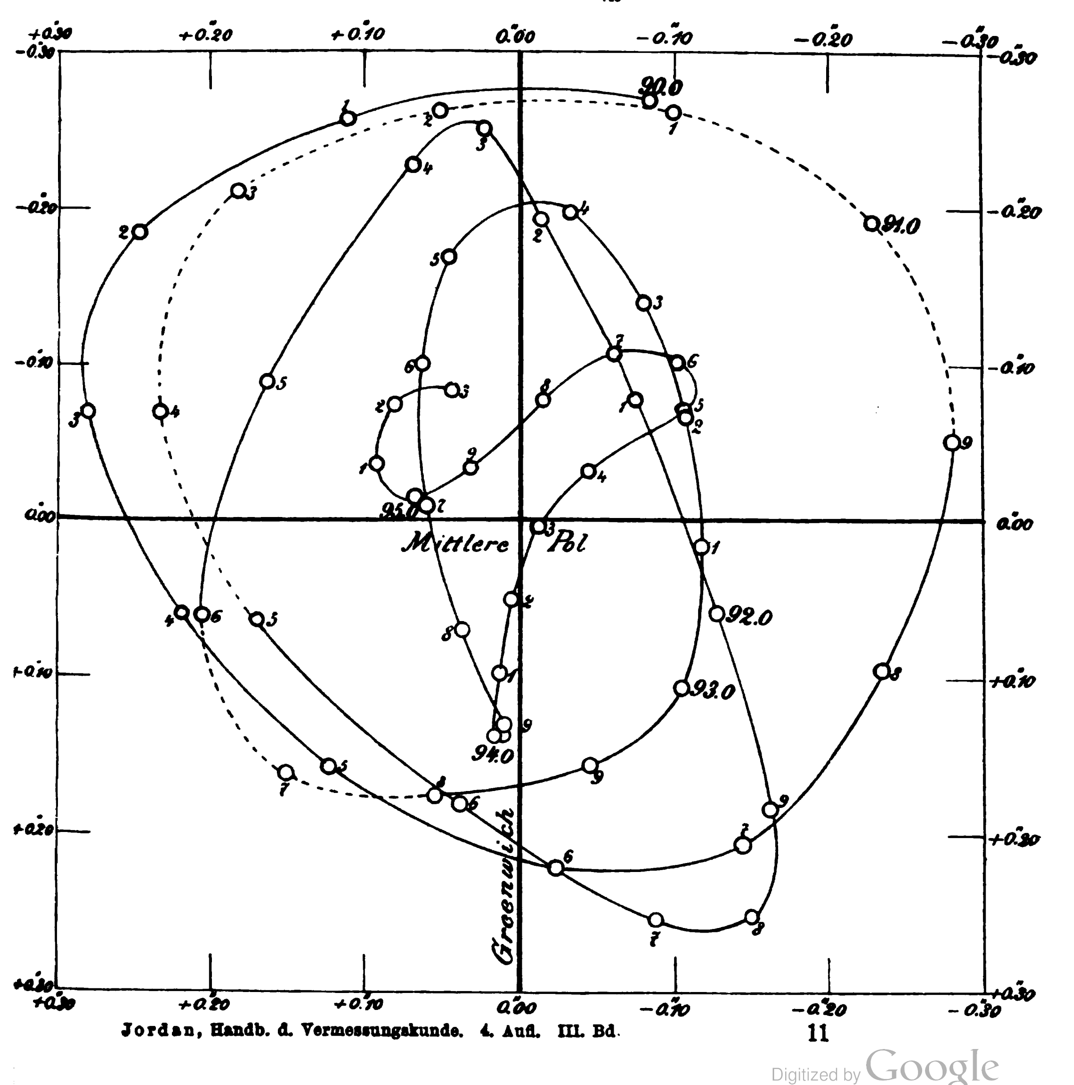
Dank der regen Beteiligung einer grösseren Anzahl von Sternwarten und sonstigen Beobachtungsstationen sind die Beobachtungen fortgesetzt worden und haben es ausser Zweifel gestellt, dass die Polhöhenschwankungen durch wirkliche Lagenänderungen der Umdrehungsaxe veranlasst sind.

Die eingehendste Behandlung der vom Beginn des Jahres 1889 ab erhaltenen Resultate ist in einem Berichte enthalten, den Professor Albrecht der XI. allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung im Herbst 1895 in Berlin vorgelegt hat und der auch auszugsweise in den Astronomischen Nachrichten 139. Band, anfangs 1896 erschienen ist.

Die azimutale Polveränderung kann an einem und demselben Orte durch Azimutbeobachtungen gefunden werden, indessen genügen auch Polhöhenmessungen allein dazu, welche an Orten verschiedener Länge angestellt sind und durch Rechnung zusammengefasst werden.

Wenn für einen Beobachter in Greenwich, oder im Meridian von Greenwich, der Momentan-Pol am Himmel um den Betrag x höher steht als der mittlere Pol, so wird auch die beobachtete Polhöhe φ um ebensoviel grösser sein als die mittlere Polhöhe φ_0 oder es wird sein $\varphi - \varphi_0 = x$. Wenn zugleich der Pol in Greenwich um den Betrag y rechts vom Meridian des mittleren Pols steht, so hat das auf die Polhöhenmessung in Greenwich, oder im Meridian von Greenwich keinen Einfluss, dagegen auf einem Punkte in der Länge 90° östlich von Greenwich wird dieses y sich als Polhöhenvergrösserung zeigen, während umgekehrt hier x unbemerkt bleibt.

Fig. 5. Bewegung des Nordpols der Erde von 1890—1895.
Punkte in Abständen von $1/_{10}$ Jahr.



Allgemein in der Länge λ östlich von Greenwich werden die erwähnten Komponenten x und y der Polabweichung eine Polhöhenänderung erzeugen:

$$\varphi - \varphi_0 = x \cos \lambda + y \sin \lambda \tag{2}$$

Hat man eine Gruppe gleichzeitiger Bestimmungen von $\varphi - \varphi_0$ auf möglichst verschiedenen Längen λ, so kann man daraus die Konstanten x und y durch Ausgleichung bestimmen, und zwar nach denselben Formeln, welche z. B. in diesem Bande § 6. für periodische Schraubenfehler S. 45—48 angewendet wurden.

Das Ergebnis der hiernach geführten Ausgleichung ist in Fig. 5. S. 161 gezeichnet. Diese Figur ist nicht dem Anblick am Himmel entsprechend, sondern sie ist so gedacht, als ob der Beobachter ausserhalb der Erde steht und auf die Erdoberfläche sieht. Der Coordinaten-Nullpunkt stellt den mittleren Pol mit der Polhöhe φ_0 vor und die verschiedenen Kurvenpunkte sind die Momentan-Pole zu verschiedenen Zeiten mit den Polhöhen φ. Die $+x$ Axe von Fig. 5. ist von dem mittleren Pol gegen Greenwich hin gerichtet und die $+y$ Axe entspricht der Länge $\lambda = 90°$ westlich von Greenwich.

Liegt der Momentanpol P im ersten Quadranten des Coordinatensystems (zwischen $+x$ und $+y$), so befindet sich P für alle Orte, deren Länge λ zwischen 0° und 90° beträgt, näher an diesem Orte als P_0, d. h. es ist der Polabstand $90° - \varphi$ kleiner als $90° - \varphi_0$ oder es ist φ grösser als φ_0, oder es gilt auch in diesem Sinne die Gleichung (2).

§ 26. Bedeutung der geographischen Coordinaten in der Geodäsie.

Unter geographischen Coordinaten eines Punktes auf der krummen Erdoberfläche versteht man die geographische Breite und die geographische Länge des Punktes in der bekannten, schon in der elementaren Geographie geläufigen Bedeutung, welche auf dem Umdrehungs-Ellipsoid Gegenstand weiterer Betrachtung im Nachfolgenden sein werden.

Nach der Mitteilung von § 25. über die Veränderlichkeit desjenigen astronomisch-geodätischen Elementes, welches man seit Jahrtausenden als das festeste von allen gehalten hatte, haben wir noch einige Worte zu sagen über die Bedeutung, welche die geographischen Breiten und die dazu gehörigen Längen und Azimute in der *Geodäsie* spielen:

Auch wenn von der jetzt konstatierten Veränderlichkeit dieser Elemente abgesehen wird, ist deren Messungsgenauigkeit, im günstigsten Fall, 0,1" bei weitem noch nicht entsprechend der geodätischen Punktbestimmung auf der Erde, welche linear auf weite Entfernungen etwa $\pm$ 0,1 Meter und auf kurze Entfernungen $\pm$ 0,01 Meter beträgt. Da nun eine Breitensekunde rund $= \dfrac{10\,000\,000}{324\,000} = 31$ Meter giebt, also 0,1" immer noch 3 Metern entspricht, kann die astronomische Genauigkeit der geodätischen Punktfestlegung noch bei weitem nicht folgen.

Dazu kommen aber noch die Lotabweichungen (vgl. Einleitung S. 11—12), welche auf den Verlauf einer Dreieckskette leicht mehrere Sekunden bringen kann, so dass also von der Übereinstimmung der astronomischen Breiten- und Längenbestimmung mit der geodätischen Punktbestimmung in Hinsicht auf Messungsschärfe keine Rede sein kann.



Allerdings astronomische Längen und Azimute *zusammen* spielen hier noch eine andere Rolle, wovon aber hier auch noch nicht gehandelt werden kann.

Vielmehr ist es hier, vor Beginn der mathematisch-geodätischen Rechnungen auf dem Ellipsoid, nur nötig zu erklären, dass die Breiten und Längen, welche bis auf Tausendel und Zehntausendel-Sekunden (0,001″ bis 0,0001″ und teilweise noch weiter) angegeben werden, in der Geodäsie zunächst gar keinen anderen Zweck haben als die geometrische Punktbestimmung auf einer krummen Fläche, welche, als Umdrehungs-Ellipsoid angenommen, selbst nur hypothetischer Natur ist.

Dieser Entwicklungsgang ist unerlässlich, und *nach* Erledigung der geodätischen Theorieen für Ellipsoid und Kugel wird auch das Verständnis für die von jenen Voraussetzungen freie Geodäsie sich eröffnen.

Kapitel II.

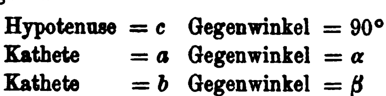
Mathematische Hilfsmittel der geodätischen Entwicklungen.

Wir schalten dieses kleine Kapitel hier ein, um die gebräuchlichsten Formeln und Zahlenwerte für geodätische Entwicklungen zur Hand zu haben und nach Bedarf citieren zu können.

§ 27. Sphärische Trigonometrie.

I. Rechtwinkliges sphärisches Dreieck.

Wir nehmen nach Andeutung von Fig. 1. die Bezeichnungen an:



Hypotenuse	$= c$	Gegenwinkel	$= 90°$
Kathete	$= a$	Gegenwinkel	$= \alpha$
Kathete	$= b$	Gegenwinkel	$= \beta$

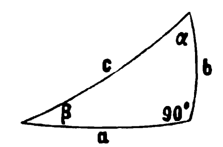


Fig. 1. Rechtwinkliges sphärisches Dreieck.

Hiemit hat man folgende Gleichungen:

$$\cos c = \cos a \cos b$$

$$\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c} \text{ und } \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c} \text{ und } \cos \beta = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} c}$$

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{tang} a}{\sin b} \text{ und } \operatorname{tang} \beta = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin a}$$

$$\cos \alpha = \sin \beta \cos a \text{ und } \cos \beta = \sin \alpha \cos b$$

In dieser Gestalt prägen sich diese Gleichungen leicht dem Gedächtnis ein, wenn man die Analogieen mit den Formeln der *ebenen* Trigonometrie im Auge behält.

Z. B. würde man für ein *ebenes* rechtwinkliges Dreieck, entsprechend Fig. 1., schreiben:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \mathrm{tang}\,\alpha = \frac{a}{b}$$

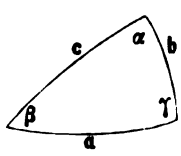
und nun braucht man nur noch auswendig zu wissen, dass *sinus* im Zähler *sinus* und im Nenner *sinus*, sowie *tangens* entsprechend *tangens* und *sinus* hat, endlich dass *cos* im Zähler und im Nenner beidemal *tang* hat, um diese Formeln immer aus dem Gedächtnis anschreiben zu können.

Ferner merke man sich, dass die erste Formel $\cos c$ dem pythagoräischen Satze der Ebene, d. h. $c^2 = a^2 + b^2$ entspricht, und dass die 2te und 6te Formel der Beziehung in der Ebene $\alpha + \beta = 90°$ entsprechen.

Ausserdem hat man die Nepersche Regel: Wenn man die Stücke $\alpha, c, \beta, 90° - a, 90° - b, \alpha \ldots$ in cyklischer Aufeinanderfolge betrachtet, so ist der Cosinus irgend eines Stückes gleich dem Sinus-Produkt der getrennten und gleich dem Cotangenten-Produkt der anliegenden Stücke.

II. Allgemeines sphärisches Dreieck.

Fig. 2.
Sphärisches Dreieck.



Nach Fig. 2. bezeichnen wir:

Seite a mit dem Gegenwinkel α
„ b „ „ „ β
„ c „ „ „ γ

Man hat zuerst folgende 4 Gleichungs-Gruppen, welche je *vier* Stücke enthalten, und zur Bestimmung eines Dreiecks aus drei gegebenen Stücken genügen:

Cosinus-Satz

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$$
$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos\beta$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma$$

Sinus-Satz

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$$

Contangenten-Satz

$$\mathrm{cotg}\, a \sin b = \cos b \cos\gamma + \sin\gamma\, \mathrm{cotg}\,\alpha$$
$$\mathrm{cotg}\, b \sin c = \cos c \cos\alpha + \sin\alpha\, \mathrm{cotg}\,\beta$$
$$\mathrm{cotg}\, c \sin a = \cos a \cos\beta + \sin\beta\, \mathrm{cotg}\,\gamma$$

$$\mathrm{cotg}\, a \sin c = \cos c \cos\beta + \sin\beta\, \mathrm{cotg}\,\alpha$$
$$\mathrm{cotg}\, b \sin a = \cos a \cos\gamma + \sin\gamma\, \mathrm{cotg}\,\beta$$
$$\mathrm{cotg}\, c \sin b = \cos b \cos\alpha + \sin\alpha\, \mathrm{cotg}\,\gamma$$

Polar-Cosinus-Satz

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$$
$$\cos\beta = -\cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos b$$
$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c$$

Nicht unmittelbar zur Auflösung eines Dreiecks dienend, aber anderweitig oft brauchbar, ist eine Beziehung zwischen *fünf* Stücken des Dreiecks, welche in sechsfacher Anwendung folgende Gruppe giebt:

$$\begin{aligned}
\sin a \cos\beta &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos\alpha \\
\sin b \cos\gamma &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos\beta \\
\sin c \cos\alpha &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos\gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin a \cos\gamma &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos\alpha \\
\sin b \cos\alpha &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos\beta \\
\sin c \cos\beta &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos\gamma
\end{aligned}$$

Weiter haben wir die wichtigen Gauss schen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\sin\frac{a}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} &= \sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \\
\sin\frac{a}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2} &= \sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\
\cos\frac{a}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} &= \cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \\
\cos\frac{a}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} &= \cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen verschiedene Anwendungen zu; wenn z. B. b, c und α gegeben und β, γ, a zu berechnen sind, so bestimmt man zuerst $\frac{\beta+\gamma}{2}$ und $\frac{\beta-\gamma}{2}$, womit man auch β und γ hat, und dann $\frac{a}{2}$ auf mehr als einem Wege.

Wenn wir hiebei zur vorübergehenden Abkürzung die Zähler und Nenner der entstehenden Brüche mit Z, N, sowie Z', N' bezeichnen, so haben wir:

$$tang\,\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{Z}{N}$$

$$tang\,\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{Z'}{N'}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{Z}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{N}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}} \qquad \sin\frac{a}{2} = \frac{Z'}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{N'}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

Wenn hier $\frac{a}{2} < 45°$ ist, so ist die Bestimmung aus $\sin\frac{a}{2}$ vorzuziehen, und wenn $\frac{a}{2} > 45°$, so ist $\cos\frac{a}{2}$ günstiger.

Bei der Doppelbestimmung, die man auch für $\cos\frac{a}{2}$ selbst oder für $\sin\frac{a}{2}$ hat, gelten zu günstigster Auswahl dieselben Regeln, wie bei der Berechnung der Hypotenuse eines ebenen Dreiecks, wie bereits in unserem Band II. 4. Aufl. 1893, S. 230 angegeben ist.

Der sphärische Exzess eines sphärischen Dreiecks ist der Überschuss der Winkelsumme über 180°, d. h.:

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$$

Wenn r der Kugelhalbmesser und F die krumme Oberfläche des sphärischen Dreiecks ist, so findet man daraus den Exzess ε nach der Formel:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2}\,\varrho$$

dabei ist $\varrho = \frac{180^\circ}{\pi}$ oder für Sekunden $\varrho = \frac{180 \,.\, 60 \,.\, 60}{\pi} = 206\,265''$. (Vgl. S. 170.)

Aus den Seiten a, b, c erhält man den sphärischen Exzess durch die Formel:

$$tang\,\frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{tang\,\frac{s}{2}\;tang\,\frac{s-a}{2}\;tang\,\frac{s-b}{2}\;tang\,\frac{s-c}{2}}$$

wobei $a + b + c = s$.

§ 28. Reihen-Entwicklungen.

In der höheren Geodäsie spielen konvergierende Reihen eine wichtige Rolle.

Als Grundlage der konvergierenden Potenz-Reihen betrachten wir zuerst die Taylorsche Reihe mit der Veränderlichen x und mit der Änderung h derselben:

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \ldots$$

Dabei bedeutet $f'(x)$ die erste Ableitung von $f(x)$ nach x, $f''(x)$ die zweite Ableitung u. s. w., ferner ist:

$1! = 1$	$5! = 120$	$9! = 362880$
$2! = 1.2 = 2$	$6! = 720$	$10! = 3628800$
$3! = 1.2.3 = 6$	$7! = 5040$	$11! = 39916800$
$4! = 1.2.3.4 = 24$	$8! = 40320$	$12! = 479001600$

In anderer Form sind diese Fakultäten:

$1! = 1$	$5! = 2^3.3.5$	$9! = 2^7.3^4.5.7$
$2! = 2$	$6! = 2^4.3^2.5$	$10! = 2^8.3^4.5^2.7$
$3! = 2.3$	$7! = 2^4.3^2.5.7$	$11! = 2^8.3^4.5^2.7.11$
$4! = 2^3.3$	$8! = 2^7.3^2.5.7$	$12! = 2^{10}.3^5.5^2.7.11$

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$2^n =$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096.

Die sehr oft gebrauchten trigonometrischen Anwendungen der Taylorschen Reihe sind:

$$\sin(x+h) = \sin x + h\cos x - \frac{h^2}{2}\sin x - \frac{h^3}{6}\cos x + \frac{h^4}{24}\sin x + \ldots$$

$$\sin(x-h) = \sin x - h\cos x - \frac{h^2}{2}\sin x + \frac{h^3}{6}\cos x + \frac{h^4}{24}\sin x - \ldots$$

$$\cos(x+h) = \cos x - h\sin x - \frac{h^2}{2}\cos x + \frac{h^3}{6}\sin x + \frac{h^4}{24}\cos x - \ldots$$

$$\cos(x-h) = \cos x + h\sin x - \frac{h^2}{2}\cos x - \frac{h^3}{6}\sin x + \frac{h^4}{24}\sin x + \ldots$$

$$tang\,(x+h) = tang\,x + h\frac{1}{cos^2 x} + h^2\frac{sin\,x}{cos^3 x} + \frac{h^3}{3}\frac{cos^2 x + 3\,sin^2 x}{cos^4 x} + \ldots$$

$$cotg\,(x+h) = cotg\,x - h\frac{1}{sin^2 x} + h^2\frac{cos\,x}{sin^3 x} - \frac{h^3}{3}\frac{sin^2 x + 3\,cos^2 x}{cos^4 x} + \ldots$$

Manchmal ist es bequem, alles in $tang\,x = t$ auszudrücken, wie folgende Beispiele zeigen:

$$cos\,(x+h) = cos\,x\left(1 - h\,t - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6}\,t + \frac{h^4}{24}\ldots\right)$$

$$\frac{1}{cos\,(x+h)} = \frac{1}{cos\,x}\left(1 + h\,t + \frac{h^2}{2}(1+2\,t^2) + \frac{h^3}{6}\,t\,(5+6\,t^2) + \frac{h^4}{24}(5+28\,t^2+24\,t^4)\ldots\right)$$

$$tang\,(x+h) = tang\,x + h\,(1+t^2) + h^2\,t\,(1+t^2) + \frac{h^3}{3}(1+4\,t^2+3\,t^4)$$

Folgendes sind die weitergehenden Ableitungen von $tang\,x$:

$$tang\,x = t$$

$$\frac{d\,t}{d\,x} = 1 + t^2$$

$$\frac{d^2\,t}{d\,x^2} = 2\,t\,(1+t^2)$$

$$\frac{d^3\,t}{d\,x^3} = 2\,(1+t^2)(1+3\,t^2)$$

$$\frac{d^4\,t}{d\,x^4} = 8\,t\,(1+t^2)(2+3\,t^2)$$

$$\frac{d^5\,t}{d\,x^5} = 8\,(1+t^2)(2+15\,t^2+15\,t^4)$$

$$\frac{d^6\,t}{d\,x^6} = 16\,t\,(1+t^2)(17+60\,t^2+45\,t^4)$$

$$\frac{d^7\,t}{d\,x^7} = 16\,(1+t^2)(17+231\,t^2+525\,t^4+315\,t^6)$$

$$\frac{d^8\,t}{d\,x^8} = 128\,t\,(1+t^2)(62+378\,t^2+630\,t^4+315\,t^6)$$

$$\frac{d^9\,t}{d\,x^9} = 128\,(1+t^2)(62+1320\,t^2+5040\,t^4+6615\,t^6+2835\,t^8)$$

$$\frac{d^{10}\,t}{d\,x^{10}} = 256\,t\,(1+t^2)(1382+12720\,t^2+34965\,t^4+37800\,t^6+14175\,t^8)$$

$$\frac{d^{11}\,t}{d\,x^{11}} = 256\,(1+t^2)(1382+42306\,t^2+238425\,t^4+509355\,t^6+467775\,t^8+155925\,t^{10})$$

Ebenso auch die Ableitungen von $cotg\,x$:

$$cotg\,x = c$$

$$\frac{d\,c}{d\,x} = -(1+c^2)$$

$$\frac{d^2\,c}{d\,x^2} = +2\,c\,(1+c^2)$$

$$\frac{d^3 c}{d x^3} = -2(1+c^2)(1+3c^2)$$

$$\frac{d^4 c}{d x^4} = +8c(1+c^2)(2+3c^2) \text{ u. s. w.}$$

die Coëfficienten sind hier dieselben wie bei den Ableitungen von t, jedoch findet bei den ungeraden Ableitungen Zeichenänderung statt.

Mit dem Vorstehenden hat man zugleich die Ableitungen von *log cos x* und *log sin x*, denn es ist:

$$\frac{d\, l\cos x}{d x} = -\operatorname{tang} x \qquad \frac{d\, l\sin x}{d x} = \operatorname{cotg} x$$

$$\frac{d^2\, l\cos x}{d x^2} = -\frac{d t}{d x} = -(1+t^2) \qquad \frac{d^2\, l\sin x}{d x^2} = \frac{d c}{d x} = -(1+c^2)$$

u. s. w.

Auf die zuerst angegebene Taylorsche Reihe gründet sich auch die Maclaurinsche Reihe:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3} f'''(0)$$

wobei $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ u. s. w. diejenigen Werte sind, welche entstehen, wenn in $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ u. s. w. die Veränderliche x gleich Null gesetzt wird.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Binomial-Reihe:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots$$

Die Coëfficienten dieser Reihe heissen Binomial-Coëfficienten, und haben folgende Bedeutungen:

$$\binom{n}{1} = \frac{n}{1}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3} \text{ u. s. w.}$$

Z. B.

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$$

$$(1+x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$$

7te Potenz giebt	1	7	21	35	35	21	7	1			
8„ „ „	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9„ „ „	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10„ „ „	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

die Wiederkehr ist ausgedrückt durch $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2 b + 3a^2 c + 3b^2 c + 6abc + 3ab^2 + 3ac^2 + 3bc^2.$$

Die Binomial-Reihe gilt allgemein für ganze oder gebrochene positive oder negative Exponenten n und konvergiert immer, wenn $x < 1$ ist. Einige häufig gebrauchte Anwendungen dieser Reihe sind folgende:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \ldots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 + \frac{33}{2048}x^7 + \ldots$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \frac{63}{256}x^5 + \frac{231}{1024}x^6 - \frac{429}{2048}x^7 + \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \ldots$$

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \frac{7}{256}x^{10} - \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \frac{63}{256}x^{10} + \ldots$$

Logarithmische Reihe.

$$\left.\begin{aligned} l(1+x) &= +x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots \\ l(1-x) &= -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right) \end{aligned}\right\}$$

Hiebei ist l das Zeichen für natürliche Logarithmen mit der Basis $e = 2{,}1828\ldots$ oder es ist $l\,z$ der natürliche Logarithmus von z. Dagegen bedeutet $\log z$ den dekadischen oder Briggschen Logarithmus mit der Basis 10, und es besteht die Beziehung:

$$\log z = \mu\,(l\,z)$$

Der Faktor μ heisst der Modulus des Briggschen Logarithmen-Systems.

Auf 20 Stellen genau hat man hiezu:

$$\mu = 0{,}43429\ 44819\ 03251\ 82765 \qquad \frac{1}{\mu} = 2{,}30258\ 50929\ 94045\ 68402$$

$$\log \mu = 9.63778\ 43113\ 00536\ 78912 \qquad \log \frac{1}{\mu} = 0.36221\ 56886\ 99463\ 21088$$

Wenn man grössere Multiplikationen oder Divisionen mit dem Faktor $\mu = 0{,}43429\ldots$ auszuführen hat, so kann man eine Tafel der Vielfachen von μ oder $1 : \mu$ benützen, wie sie in manchen älteren Logarithmen-Tafeln sich finden z. B. Thesaurus S. 641 und Steinhauser 20stell. Logar., Wien 1880 S. XII bis $100\,\mu$ und S. XI umgekehrt.

Exponential-Reihe.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$a^x = 1 + \frac{x\,l\,a}{1} + \frac{(x\,l\,a)^2}{2!} + \frac{(x\,l\,a)^3}{3!} + \frac{(x\,l\,a)^4}{4!} + \dots$$

$$10^x = 1 + \frac{x}{\mu} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{\mu}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{x}{\mu}\right)^4 + \dots$$

$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045 \quad log\, e = \mu = 0{,}43429\dots \quad l\,10 = \frac{1}{\mu} = 2{,}3026\dots$ (S. 169).

Goniometrische Reihen.

In den Potenzreihen für *sin* x, *cos* x, u. s. w. ist x in analytischem Masse zu nehmen, zu dessen Erklärung an die Berechnung eines Kreisbogens zu einem Centriwinkel erinnert wird. In einem Kreise mit dem Halbmesser r sei ein Centriwinkel α in Graden (also z. B. $\alpha = 30°$, $\alpha = 40°$ u. s. w.) gegeben und es soll der zugehörige Bogen b berechnet werden, wozu die Proportion dient:

$$b : 2\,r\,\pi = \alpha : 360°$$

also
$$b = \frac{2\,r\,\pi\,\alpha°}{360°} = \frac{r\,\alpha°}{\varrho°} \text{ wenn } \varrho° = \frac{180°}{\pi}$$

Setzt man
$$\frac{\alpha°}{\varrho°} = \alpha, \text{ so wird } b = r\,\alpha$$

Dieses führt allgemein zu der Erklärung: Wenn $x°$, x', x'' ein Winkelwert in geometrischem Mass, d. h. in Graden, Minuten oder Sekunden ist, und x der entsprechende Wert in analytischem Masse, so bestehen die Gleichungen:

$$x = \frac{x°}{\varrho°} \text{ wobei } \varrho° = \frac{180}{\pi} = \frac{180}{3{,}14159\dots}$$

$$x = \frac{x'}{\varrho'} \quad " \quad \varrho' = \frac{180\,.\,60}{\pi} = \frac{4800}{3{,}14159\dots}$$

$$x = \frac{x''}{\varrho''} \quad " \quad \varrho'' = \frac{180\,.\,60\,.\,60}{\pi} = \frac{288000}{3{,}14159\dots}$$

oder für neue Teilung:

$$x = \frac{x^g}{\varrho^g} \text{ wobei } \varrho^g = \frac{200}{\pi} = \frac{200}{3{,}14159\dots}$$

Die genaueren Zahlenwerte hiezu sind:

$\pi =$	3,14159 26535 89793	$log\ \pi =$	0.49714 98726 94134
$\frac{1}{\pi} =$	0,31830 98861 83791	$log\ \frac{1}{\pi} =$	9.50285 01273 05866
$\varrho° =$	57,29577 95130 82321	$log\ \varrho° =$	1.75812 26324 09172
$\frac{1}{\varrho°} =$	0,01745 32925 19943	$log\ \frac{1}{\varrho°} =$	8.24187 73675 90828
$\varrho' =$	3437,74677 07849 39253	$log\ \varrho' =$	3.53627 38827 92816
$\frac{1}{\varrho'} =$	0,00029 08882 08666	$log\ \frac{1}{\varrho'} =$	6.46372 61172 07184

$\varrho'' = 206264{,}80624\ 70963\ 55156$	$\log \varrho'' = 5.31442\ 51331\ 76459$
$\frac{1}{\varrho''} = 0{,}00000\ 48481\ 36811$	$\log \frac{1}{\varrho''} = 4.68557\ 48668\ 23541$
$\varrho^{\circ} = 63{,}66197\ 72367\ 58134$	$\log \varrho^{\circ} = 1.80388\ 01229\ 69847$
$\frac{1}{\varrho^{\circ}} = 0{,}01570\ 79632\ 67949$	$\log \frac{1}{\varrho^{\circ}} = 8.19611\ 98870\ 30153$

Zu weit getriebenen Reihenentwicklungen braucht man auch π^2, π^3 ... $\left(\text{für die Potenzen von } \frac{1}{\varrho}\right)$:

$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846$	$\log \pi = 0.49714\ 98726\ 94133\ 85435$
$\pi^2 = 9{,}86960\ 44010\ 89358\ 61883$	$\log \pi^2 = 0.99429\ 97453\ 88267\ 70870$
$\pi^3 = 31{,}00627\ 66802\ 99820\ 1754$	$\log \pi^3 = 1.49144\ 96180\ 82401\ 56305$
$\pi^4 = 97{,}40909\ 10340\ 02437\ 24$	$\log \pi^4 = 1.98859\ 94907\ 76535\ 41741$
$\pi^5 = 306{,}01968\ 47852\ 81453$	$\log \pi^5 = 2.48574\ 93634\ 70669$
$\pi^6 = 961{,}38919\ 35753\ 044$	$\log \pi^6 = 2.98289\ 92361\ 64803$
$\pi^7 = 3020{,}29322\ 77768$	$\log \pi^7 = 3.48004\ 91089$
$\pi^8 = 9488{,}53101\ 60757$	$\log \pi^8 = 3.97719\ 89816$
Diese Werte sind unmittelbar durch Multiplikationen von π erhalten.	$\log \pi^9 = 4.47434\ 88542$
	$\log \pi^{10} = 4.97149\ 87269$

Am häufigsten braucht man ϱ in Sekunden, weshalb wir die Logarithmen der Potenzen dieses ϱ, nebst dem oft dazu gebrauchten Faktor μ im Folgenden zusammenstellen.

n	$\log \varrho^n$	$\log \frac{1}{\varrho^n}$	$\log \frac{\mu}{\varrho^n}$	n
			9.637 7843·113	0
1	5.314 4251·332	4.685 5748·668	4.323 3591·781	1
2	0.628 8502·664	9.371 1497·336	9.008 9340·449	2
3	5.943 2753·995	4.056 7246·005	3.694 5089·118	3
4	1.257 7005·327	8.742 2994·673	8.380 0837·786	4
5	6.572 1256·659	3.427 8743·341	3.065 6586·454	5
6	1.886 5507·991	8.113 4492·009	7.751 2335·122	6
7	7.200 9759·322	2.799 0240·678	2.436 8083·791	7
8	2.515 4010·654	7.484 5989·346	7.122 3832·459	8
9	7.829 8261·986	2.170 1738·014	1.807 9581·127	9
10	3.144 2513·318	6.855 7486·682	6.493 5329·795	10
12	3.773 1016	6.226 8984	5.864 6827	12

In der Charakteristik der Logarithmen sind hier nur die Werte zwischen 0 und 9 geschrieben z. B. für $\log \varrho^2 = 10.628\ldots$ ist nur geschrieben $0.628\ldots$ u. s. w. und ebenso sind auch die -10 u. s. w. am Schlusse einfach weggelassen; der Punkt oben z. B. 1·332 steht nach der 7ten Stelle. Diese Bemerkungen gelten auch für alle übrigen Logarithmenrechnungen dieses Buches.



Obige Tabelle gilt für alte Teilung und ϱ in Sekunden. Für neue Teilung stehen die entsprechenden Potenzlogarithmen in des Verfassers logar.-trig. Tafeln für neue Teilung, Stuttgart 1894, S. 417, und die wichtigsten Konstanten mit μ und ϱ für neue Teilung sind:

$$\frac{\mu}{\varrho} = \frac{\mu \pi}{200} = 0{,}00682\ 18817\ 69209\ 06737 \qquad log = 7.83390\ 41883\ 30689$$

$$\frac{\mu}{6\varrho^2} = 178596{,}44708\ 17149 \qquad log = 5.25187\ 28149\ 77198$$

$$\frac{\mu}{2\varrho^3} = 535789{,}34124\ 51446 \qquad log = 5.72899\ 40696\ 96861$$

$$\frac{\mu}{180\varrho^4} = 1{,}46889\ 69001 \qquad log = 0.16699\ 13143$$

$$\frac{\mu}{12\varrho^4} = 22{,}03345\ 35017 \qquad log = 1.34308\ 25734$$

Die folgenden Reihen gelten für x in analytischem Masse:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \frac{x^{10}}{3628800} + \ldots$$

$$\operatorname{tang} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \frac{1382x^{11}}{155925}, \quad \operatorname{tang}\frac{x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{240} + \ldots$$

$$\operatorname{cotang} x = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x_6}{945} - \ldots\right)$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \frac{251x^8}{40320} + \ldots$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \frac{31x^6}{15120} + \ldots\right)$$

$$x = \operatorname{arc}\sin y = y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} + \frac{5y^7}{112} + \frac{35y^9}{1152} + \frac{63y^{11}}{2816} + \frac{231y^{13}}{13312} + \ldots \quad (y = \sin x)$$

$$x = \operatorname{arc}\operatorname{tang} y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \frac{y^9}{9} - \frac{y^{11}}{11} + \frac{y^{13}}{13} - \ldots \quad (y = \operatorname{tang} x)$$

$$l\sin x = l\,x - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \frac{x^8}{37800} - \frac{x^{10}}{467775} - \frac{691x^{12}}{3831077250}$$

$$l\cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17x^8}{2520} - \frac{31x^{10}}{14175} - \frac{691x^{12}}{935550}$$

$$l\operatorname{tang} x = l\,x + \frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{90} + \frac{62x^6}{2835} + \frac{127x^8}{18900} + \frac{146x^{10}}{66825} + \frac{2828954x^{12}}{3831077250}$$

Die Coëfficienten dieser drei letzten Reihen erfüllen die Bedingungen:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{180} + \frac{7}{90} = \frac{1}{12}, \quad \text{allgemein } S_n + T_n = C_n$$

und $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 2^3 \frac{1}{6}$, $\frac{1}{180} + \frac{1}{12} = 2^4 \frac{1}{180}$, allgemein $S_n + C_n = 2^n S_n$ (weil $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$).

Diese Reihen gelten, wie schon oben bemerkt, für x in analytischem Masse; wird x in Graden, Minuten oder Sekunden gezählt, so muss mit dem betreffenden ϱ dividiert werden, und für gewöhnliche Logarithmen ist mit dem Modulus μ im Ganzen zu multiplizieren, wodurch man für Gradmass und gewöhnliche Logarithmen hat:

$$\log \sin x = \log \frac{x}{\varrho} - \left\{ \frac{\mu}{6\varrho^2} x^2 + \frac{\mu x^4}{180 \varrho^4} + \frac{\mu x^6}{2835 \varrho^6} + \frac{\mu x^8}{37800 \varrho^8} + \frac{\mu x^{10}}{467775 \varrho^{10}} \right\}$$

$$\log \cos x = \qquad - \left\{ \frac{\mu}{2\varrho^2} x^2 + \frac{\mu x^4}{12 \varrho^4} + \frac{\mu x^6}{45 \varrho^6} + \frac{\mu\, 17 x^8}{2520 \varrho^8} + \frac{\mu\, 31 x^{10}}{14175 \varrho^{10}} \right\}$$

$$\log \operatorname{tang} x = \log \frac{x}{\varrho} + \left\{ \frac{\mu}{3\varrho^2} x^2 + \frac{\mu\, 7 x^4}{90 \varrho^4} + \frac{\mu\, 62 x^6}{2835 \varrho^6} + \frac{\mu\, 127 x^8}{18900 \varrho^8} + \frac{\mu\, 146 x^{10}}{66825 \varrho^{10}} \right\}$$

Hiebei ist für Sekunden $\log \frac{1}{\varrho} = 4.685\,5748{\cdot}668$ und die übrigen Coëfficienten-Logarithmen sind die folgenden:

	x^2	x^4	x^6	x^8	x^{10}	x^{12}
log sin	8.230 7827·945	6.124 8112·7	4.298 6804	2.544 891	0.82350	9.1208
log cos	8.707 9040·492	7.300 9025·3	6.098 0210	4.951 432	3.83337	2.7331
log tang	8.531 8127·902	7.270 9393·1	6.091 0721	4.949 725	3.83295	2.7330

Die entsprechenden Werte für neue Teilung sind mitgeteilt in des Verfassers logar.-trig. Tafeln für neue Teilung, 1894, S. 417.

Mit diesen Reihen kann man die *log sin* u. s. w. bis auf 15 Stellen berechnen etwa für Winkel von 0° bis zu 10°, und wenn man zu einem *kleinen* Winkel x einen scharfen Wert *log sin* x oder *log tang* x braucht, so erhält man ihn mit wenigen Reihengliedern besser unmittelbar als durch Interpolation aus der 10stelligen Tafel.

Für x etwa zwischen 10° und 35° hat man die Eulerschen Reihen, welche in des Verfassers 6stell. Tafeln für neue Teilung auf S. VII angegeben sind mit neu ausgerechneten Coëfficienten für neue Teilung.

Für x in der Nähe von 45°, etwa zwischen 35° und 55° haben wir *neue* Formeln aufgestellt in der genannten 6stelligen Tafel S. VIII, und es mag hier kurz deren Entwicklung angedeutet werden. Nach dem Taylorschen Satze ist zunächst allgemein

$$l \cos (X + x) = l \cos X - \frac{x}{1} \operatorname{tang} X - \frac{x^2}{2} \frac{d \operatorname{tang} X}{d X} - \frac{x^3}{6} \frac{d^3 \operatorname{tang} X}{d X^3} - \ldots$$

Die Ableitungen von *tang* X sind bereits auf S. 167 angegeben, und deren Werte für $X = 45°$ oder $= 50^g$, lassen sich daraus mit $t = 1$ leicht ermitteln, woraus folgt:

$$l \cos (50^g + x) = l \cos 50^g - \frac{x}{1} - \frac{2 x^2}{2} - \frac{4 x^3}{6} - \frac{16 x^4}{24} +$$

und auf gleichem Wege wird gefunden:

$$l \sin (50^g + x) = l \sin 50^g + \frac{x}{1} - \frac{2 x^2}{2} + \frac{4 x^3}{6} - \frac{16 x^4}{24} + \ldots$$

Wenn x in Einheiten von 1^g gezählt wird, so muss man x mit ϱ_g und x^2 mit ϱ_g^2 dividieren u. s. w., wobei $\log \varrho_g = 1.80\,388\ldots$ ist, und zum Übergang auf briggische Logarithmen ist der Faktor μ im Ganzen zuzusetzen ($\log \mu = 9.63778\ldots$). Wenn dieses geschehen ist, soll erhalten werden:

$$\log \cos (50^g + x) = \log \cos 50^g - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \alpha_3 x^3 + \ldots$$
$$\log \sin (50^g + x) = \log \sin 50^g + \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 - \ldots$$

Nun empfiehlt es sich, Näherungswerte abzusondern, nämlich:

$$log\left(1-\frac{2\,x}{100}\right)=-\frac{2}{100}\,\mu\,x-\left(\frac{2}{100}\right)^2\frac{\mu\,x^2}{2}-\left(\frac{2}{100}\right)^3\frac{\mu\,x^3}{3}-\ldots$$

$$log\left(1+\frac{2\,x}{100}\right)=+\frac{2}{100}\,\mu\,x-\left(\frac{2}{100}\right)^2\frac{\mu\,x^2}{2}+\left(\frac{2}{100}\right)^3\frac{\mu\,x^3}{3}-\ldots$$

Dieses ist so bemessen, dass α_1 sehr nahe $=\frac{2\mu}{100}$ und α_3 sehr nahe $=\left(\frac{2}{100}\right)^3\frac{\mu}{2}$ wird, dass also bei der Zusammenfassung die Coëfficienten von x und von x^3 klein werden. Die weitere Ausführung, auf welche hier nicht eingegangen werden kann, giebt die Gebrauchsformel auf S. VIII unserer logar-trig. Tafeln für neue Teilung. In der „Zeitschr. f. Verm." 1893, S. 600—602 wird mitgeteilt, dass jene „neuen Formeln" für $log\,sin\,(50^g-x)$ und $log\,cos\,(50^g-x)$, welche vom Verfasser 1893 zuerst veröffentlicht wurden, auch von Herrn Prof. Schols in Delft aufgestellt (aber nicht veröffentlicht) wurden und es ist Herr Schols in der Ausrechnung erheblich weiter, nämlich bis zur 20ten Potenz mit 27 Stellen gegangen, wie die von ihm in der „Zeitschr. f. Verm." 1893, S. 601 mitgeteilten Zahlenwerte zeigen. Die im Vorstehenden mitgeteilten Formeln und Zahlenwerte gehen zum Teil über die Bedürfnisse des praktischen Geodäten hinaus, wir sind dazu geführt worden durch die Berechnungen zu den „logarithmisch-trigonometrischen Tafeln für neue Teilung mit 6 Stellen von W. Jordan, Stuttgart Wittwer 1894", aus deren Veranlassung vielstellige Fundamentalzahlen mitgeteilt worden sind von Schols und Nell in der „Zeitschr. f. Verm." 1893, S. 600—602, 1894, S. 74—75 und S. 160. Nell giebt dort die Zahlen e, μ, π, ϱ u. s. w. auf 30 Stellen und ihre Logarithmen auf 20 Stellen.

Als Quelle ist hier hauptsächlich zu nennen der „Thesaurus logarithmorum completus" von Georg Vega, Leipzig 1794, im allgemeinen mit 10stelligen Logarithmen. Derselbe giebt auf S. 308 und 309 die Zahlen π 140stellig, $l\,10=\frac{1}{\mu}$, μ und e 48stellig und auf S. 633 die wirkliche Reihenausrechnung von π auf 140 Stellen. Manches hiezu bieten auch die ersten (ältesten) Ausgaben von Vegas 7stelligen logar.-trig. Tafeln, und Vega-Hülsse, Leipzig 1840, ferner Steinhauser Hilfstafeln zur präzisen Berechnung 20stelliger Logarithmen, Wien 1880 (mit Berichtigungen von Nell, „Zeitschr. f. Verm." 1893 S. 603).

All dieses vielstellige Zahlenmaterial braucht fast nur, wer sich mit feinen Berechnungen von Zahlentafeln mathematischer oder geodätischer Art beschäftigt. Wir werden auch am Schluss von § 30. hierauf nochmals zurückkommen.

§ 29. Weitere Reihen.

Bei geodätischen Entwicklungen hat man oft das Bedürfnis, die Potenzen $sin^n\,x$ und $cos^n\,x$ in den $sin\,n\,x$ und $cos\,n\,x$ u. s. w. auszudrücken, z. B. um jene Potenzen zu integrieren und dergl.; auch die umgekehrten Verwandlungen werden gebraucht.

Man kann alles dieses schrittweise aus den einfachsten goniometrischen Formeln herleiten:

$$sin\,2\,x=2\,sin\,x\,cos\,x \qquad cos\,2\,x=cos^2\,x-sin^2\,x$$

$$\begin{aligned} sin\,3\,x &= sin\,(2\,x+x)=sin\,2\,x\,cos\,x+cos\,2\,x\,sin\,x \\ &= 2\,sin\,x\,cos^2\,x+cos^2\,x\,sin\,x-sin^3\,x \end{aligned}$$

$$sin\,3\,x=2\,sin\,x\,cos^2\,x-sin^3\,x$$

In dieser und ähnlicher Weise könnte man alle von S. 176—177 Formeln Schritt für Schritt entwickeln, doch kommt man besser zum Ziel mit Hilfe der imaginären Ausdrücke für $sin\,x$ und $cos\,x$, zu welchen wir nun übergehen.

Die Reihen für $\sin x$ und für $\cos x$ stehen in Beziehung zur Exponentialreihe e^x:

$$\sin x = \quad \frac{x}{1!} \quad . \quad -\frac{x^3}{3!} \quad . \quad +\frac{x^5}{5!} \quad . \quad - \ldots$$

$$\cos x = 1 \quad . \quad -\frac{x^2}{2!} \quad . \quad +\frac{x^4}{4!} \quad . \quad -\frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Wenn man hier $x = i x$ setzt (wobei $i = \sqrt{-1}$), so wird $x^2 = -x^2, x^3 = -i x^3$, $x^4 = + x^4$, $x^5 = i x^5$ u. s. w. und damit bekommt man aus den obigen drei Reihen:

$$e^{+ix} = \cos x + i \sin x \text{ und } e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

oder

$$\cos x = \frac{e^{+ix} + e^{-ix}}{2} \text{ und } \sin x = \frac{e^{+ix} - e^{-ix}}{2i}$$

und wenn man noch $x = n x$ setzt, so bekommt man den Satz von Moivre:

$$\cos n x \pm i \sin n x = e^{\pm i n x} = (e^{\pm i x})^n = (\cos x \pm i \sin x)^n$$

Wenn man hier nach dem binomischen Satz entwickelt, so erhält man:

$$\cos n x + i \sin n x = \cos^n x + \binom{n}{1} \cos^{n-1} x \, i \sin x - \binom{n}{2} \cos^{n-2} x \sin^2 x - \ldots$$

$$\cos n x - i \sin x = \cos^n x - \binom{n}{1} \cos^{n-1} x \, i \sin x - \binom{n}{1} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \ldots$$

Durch Subtraktion und Addition findet man hieraus:

$$\left.\begin{aligned} \sin n x &= \binom{n}{1} \cos^{n-1} x \sin x - \binom{n}{3} \cos^{n-3} x \sin^3 x + \binom{n}{5} \cos^{n-5} x \sin^5 x \ldots \\ \cos n x &= \cos^n x - \binom{n}{2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4} \cos^{n-4} x \sin^4 x - \ldots \end{aligned}\right\} (1)$$

Wenn man umgekehrt $\sin^n x$ und $\cos^n x$ als Funktion der $\sin n x$ und $\cos n x$ haben will, so setzt man:

$$e^{+ix} = p = \cos x + i \sin x \text{ also } p^m = \cos m x + i \sin m x$$

$$e^{-ix} = q = \cos x - i \sin x \quad „ \quad q^m = \cos m x - i \sin m x$$

dann ist $p q = 1$

$$p + q = 2 \cos x \qquad p^m + q^m = 2 \cos m x$$

$$p - q = 2 i \sin x \qquad p^m - q^m = 2 i \sin m x$$

wir machen davon folgende Anwendungen durch Potenzen von $(p + q)$ und von $(p - q)$:

$$(2 \cos x)^2 = (p + q)^2 \qquad (2 i \sin x)^2 = (p - q)^2$$

$$= (p^2 + q^2) + 2 p q \qquad = (p^2 + q^2) - 2 p q$$

$$4 \cos^2 x = 2 \cos 2 x + 2 \qquad -4 \sin^2 x = 2 \cos 2 x - 2$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2 x \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2 x$$

Dieses sind die bekannten goniometrischen Formeln. Wir fahren fort:

$$(2 \cos x)^4 = p^4 + 4 p^3 q + 6 p^2 q^2 + 4 p q^3 + q^4$$

$$= (p^4 + q^4) + 4 (p^2 + q^2) p q + 6 p^2 q^2$$

$$16 \cos^4 x = 2 \cos 4 x + 8 \cos 2 x + 6 \text{ oder } \cos^4 x = \frac{1}{8} \cos 4 x + \frac{1}{2} \cos 2 x + \frac{3}{8}$$

Auf gleichem Wege bekommt man auch $sin^4 x$, und durch Weiterverfolgung dieses Weges kann man jede derartige Formel finden, z. B.

$$\begin{aligned}
(2\, i\, sin\, x)^5 &= (p - q)^5 \\
32\, i^5\, sin^5 x &= p^5 - 5\, p^4\, q + 10\, p^3\, q^2 - 10\, p^2\, q^3 + 5\, p\, q^4 - q^5 \\
&= (p^5 - q^5) - 5\,(p^3 - q^3)\, p\, q + 10\,(p^2 - q^2)\, p\, q \\
32\, i\, sin^5 x &= 2\, i\, sin\, 5\, x - 10\, i\, sin\, 3\, x + 20\, i\, sin\, 2\, x \\
sin^5 x &= \frac{1}{16}\, sin\, x - \frac{5}{16}\, sin\, 3\, x + \frac{5}{8}\, sin\, 2\, x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2\, cos\, x)^5 &= (p + q)^5 = p^5 + 5\, p^4\, q + 10\, p^3\, q^2 + 10\, p^2\, q^3 + 5\, p\, q^4 + q^5 \\
32\, cos^5 x &= (p^5 + q^5) + 5\,(p^3 + q^3)\, p\, q + 10\,(p^2 + q^2)\, p\, q \\
&= 2\, cos\, 5\, x + 10\, cos\, 3\, x + 20\, cos\, 2\, x \\
cos^5 x &= \frac{1}{16}\, cos\, 5\, x + \frac{5}{16}\, cos\, 3\, x + \frac{5}{8}\, cos\, 2\, x
\end{aligned}$$

Die Coëfficienten für $sin^n x$ und $cos^n x$ sind dieselben, nur findet bei $sin^n x$ Zeichenwechsel statt.

In solcher Weise kann man rasch die Gebrauchsformeln einzeln entwickeln, etwa bis $sin^{10} x$ und $cos^{10} x$, welche wir nachher zusammenstellen werden. Es ist auch möglich, allgemeine Formeln für $sin^n x$ und $cos^n x$ aufzustellen, die Entwicklung ist aber etwas umständlich, weil man gerades und ungerades n unterscheiden muss. Die allgemeinen Formeln sind diese:

1) für gerade Exponenten:

$$sin^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}}\left(\frac{1}{2}\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} cos\, 2\, x + \binom{2n}{n-2} cos\, 4\, x - \ldots\right)$$

$$cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}}\left(\frac{1}{2}\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1} cos\, 2\, x + \binom{2n}{n-2} cos\, 4\, x - \ldots\right)$$

2) für ungerade Exponenten:

$$sin^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}}\left(\binom{2n+1}{n} sin\, x - \binom{2n+1}{n-1} sin\, 3\, x + \ldots\right)$$

$$cos^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}}\left(\binom{2n+1}{n} cos\, x + \binom{2n+1}{n-1} cos\, 3\, x + \ldots\right) \quad (2)$$

In diesen Reihen ist so lange fortzufahren, bis ein Coëfficient = 0 wird.

Entsprechend den Formelgruppen (2) und (1) sind die nachfolgenden einzelnen Gebrauchsformeln bis zur 10ten Ordnung angeschrieben:

$$sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, cos\, 2\, x$$

$$sin^3 x = \frac{3}{4}\, sin\, x - \frac{1}{4}\, sin\, 3\, x$$

$$sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\, cos\, 2\, x + \frac{1}{8}\, cos\, 4\, x$$

$$sin^5 x = \frac{5}{8}\, sin\, x - \frac{5}{16}\, sin\, 3\, x + \frac{1}{16}\, sin\, 5\, x$$

$$sin^6 x = \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\, cos\, 2\, x + \frac{3}{16}\, cos\, 4\, x - \frac{1}{32}\, cos\, 6\, x$$

$$\sin^7 x = \frac{35}{64}\sin x - \frac{21}{64}\sin 3x + \frac{7}{64}\sin 5x - \frac{1}{64}\sin 7x$$

$$\sin^8 x = \frac{35}{128} - \frac{7}{16}\cos 2x + \frac{7}{32}\cos 4x - \frac{1}{16}\cos 6x + \frac{1}{128}\cos 8x$$

$$\sin^9 x = \frac{63}{128} - \frac{21}{64}\sin 3x + \frac{9}{64}\sin 5x - \frac{9}{256}\sin 7x + \frac{1}{256}\sin 9x$$

$$\sin^{10} x = \frac{63}{256} - \frac{105}{256}\cos 2x + \frac{15}{64}\cos 4x - \frac{45}{512}\cos 6x + \frac{5}{256}\cos 8x - \frac{1}{512}\cos 10x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$$

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$\cos^5 x = \frac{5}{8}\cos x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 5x$$

$$\cos^6 x = \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{3}{16}\cos 4x + \frac{1}{32}\cos 6x$$

$$\cos^7 x = \frac{35}{64}\cos x + \frac{21}{64}\cos 3x + \frac{7}{64}\cos 5x + \frac{1}{64}\cos 7x$$

$$\cos^8 x = \frac{35}{128} + \frac{7}{16}\cos 2x + \frac{7}{32}\cos 4x + \frac{1}{16}\cos 6x + \frac{1}{128}\cos 8x$$

$$\cos^9 x = \frac{63}{128}\cos x + \frac{21}{64}\cos 3x + \frac{9}{64}\cos 5x + \frac{9}{256}\cos 7x + \frac{1}{256}\cos 9x$$

$$\cos^{10} x = \frac{63}{256} + \frac{105}{256}\cos 2x + \frac{15}{64}\cos 4x + \frac{45}{512}\cos 6x + \frac{5}{256}\cos 8x + \frac{1}{512}\cos 10x$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\sin 3x = 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x$$
$$\sin 4x = 4\sin x\cos^3 x - 4\sin^3 x\cos x$$
$$\sin 5x = 5\sin x\cos^4 x - 10\sin^3 x\cos^2 x + \sin^5 x$$
$$\sin 6x = 6\sin x\cos^5 x - 20\sin^3 x\cos^3 x + 6\sin^5 x\cos x$$
$$\sin 7x = 7\sin x\cos^6 x - 35\sin^3 x\cos^4 x + 21\sin^5 x\cos^2 x - \sin^7 x$$
$$\sin 8x = 8\sin x\cos^7 x - 56\sin^3 x\cos^5 x + 56\sin^5 x\cos^3 x - 8\sin^7 x\cos x$$
$$\sin 9x = 9\sin x\cos^8 x - 84\sin^3 x\cos^6 x + 126\sin^5 x\cos^4 x - 36\sin^7 x\cos^2 x + \sin^9 x$$
$$\sin 10x = 10\sin x\cos^9 x - 120\sin^3 x\cos^7 x + 252\sin^5 x\cos^5 x - 120\sin^7 x\cos^3 x + 10\sin^9 x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$$
$$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x$$
$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x$$
$$\cos 6x = \cos^6 x - 15\cos^4 x\sin^2 x + 15\cos^2 x\sin^4 x - \sin^6 x$$
$$\cos 7x = \cos^7 x - 21\cos^5 x\sin^2 x + 35\cos^3 x\sin^4 x - 7\cos x\sin^7 x$$

$$\cos 8x = \cos^8 x - 28 \cos^6 x \sin^2 x + 70 \cos^4 x \sin^4 x - 28 \cos^2 x \sin^6 x + \sin^8 x$$
$$\cos 9x = \cos^9 x - 36 \cos^7 x \sin^2 x + 126 \cos^5 x \sin^4 x - 84 \cos^3 x \sin^6 x + 9 \cos x \sin^8 x$$
$$\cos 10x = \cos^{10} x - 45 \cos^8 x \sin^2 x + 210 \cos^6 x \sin^4 x - 210 \cos^4 x \sin^6 x + 45 \cos^2 x \sin^8 x - \sin^{10} x$$

Abgekürzte Potenz-Reihen mit mittlerem Argument.

Man kann in einer Potenzreihen-Entwicklung nach dem Taylorschen Satz immer die Hälfte der Glieder sparen durch Einführung eines *mittleren* Arguments, wie sich so zeigen lässt:

Man setzt zuerst: $$x + h = \left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2}$$

und dann: $$x = \left(x + \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2}$$

Dann hat man nach dem Taylorschen Satze:

$$f(x+h) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} f'\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{8} f''\left(x + \frac{h}{2}\right) + \ldots$$
$$f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2} f'\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{8} f''\left(x + \frac{h}{2}\right) - \ldots$$

Daraus findet man durch Subtraktion und Addition:

$$f(x+h) - f x = h f'\left(x + \frac{h}{2}\right) + h^3 \ldots \tag{3}$$

$$\frac{f(x+h) + f(x)}{2} = f\left(x + \frac{h}{2}\right) + h^2 \ldots \tag{4}$$

In (3) kommt kein Glied mit h^2 vor und in (4) ist kein Glied mit h; diese Glieder wurden durch Einführung von $x + \frac{h}{2}$ als Argument von f und von f' erspart.

Als einfache Anwendung der Gleichung (3) nehmen wir z. B.:

$$\sin u - \sin v = (u - v) \cos \frac{u + v}{2} + (u - v)^3 \ldots$$

Will man hier nur bis auf $(u - v)^2$ einschl. genau rechnen, so kann man in dem Glied mit $(u - v)$ nach Belieben u oder v schreiben, z. B.:

$$\sin u = \sin v + (u - v) \cos u + (u - v)^3 \ldots \tag{5}$$

oder

$$\sin u = \sin v + (u - v) \cos v + (u - v)^3 \ldots \tag{6}$$

Diese zwei letzten Formeln sind *gleich* genau, insofern Glieder von gleichem Potenzrang in beiden vernachlässigt sind.

Eine andere Anwendung dieses Prinzips ist folgende:

Wenn $f(x, x')$ eine Funktion von x und x' ist, welche nach Potenzen von $(x' - x)$ entwickelt werden kann, so ist:

$$f(x, x') = f(x, x) + (x' - x) f'(x) + (x' - x)^2 + \ldots$$

oder

$$f(x, x') = f(x', x') + (x - x') f'(x') + (x' - x)^2 + \ldots$$

Aus diesen beiden Gleichungen zusammen folgt:

$$f(x, x') = \frac{f(x, x) + f(x', x')}{2} + (x' - x) \frac{f'(x) - f'(x')}{2}$$

Es unterscheiden sich aber $f'(x)$ und $f'(x')$ selbst nur um Glieder von der Ordnung $(x' - x)$, also ist:

$$f(x, x') = \frac{f(x, x) + f(x', x')}{2} + (x' - x)^2 \ldots$$

Dabei sind $f(x, x)$ und $f(x', x')$ diejenigen 2 Werte von $f(x, x')$, welche entstehen, wenn bzw. $x' = x$ und $x = x'$ gesetzt wird.

Folgendes sind zwei einfache Beispiele hiefür:

$$\sqrt{x\,x'} = \frac{x + x'}{2} + (x' - x)^2 \ldots$$

$$\sqrt{\frac{x^2 + x'^2}{2}} = \frac{x + x'}{2} + (x' - x)^2 \ldots$$

oder in Worten: das geometrische Mittel, das Mittel der Methode der kleinsten Quadrate und viele andere Mittel zweier Zahlen x und x' sind dem arithmetischen Mittel gleich, auf Glieder von der Ordnung $(x' - x)$ einschliesslich genau.

Zum Schluss dieser Betrachtungen erinnern wir daran, dass Näherungsformeln, welche nur auf *ein* Glied genau sein sollen, am einfachsten in der Gestalt von Differentialformeln angeschrieben werden. Wenn man z. B. $\sin u - \sin v$ nur auf Glieder von der Ordnung $u - v$ genau haben will, so setzt man:

$$\sin u - \sin v = d \sin v \quad \text{oder} \quad = - d \sin u$$

und:

$$u - v = d\,v \quad \text{oder} \quad = - d\,u$$

und man hat damit:

$$d \sin u = \cos u\, d\,u \quad \text{oder} \quad d \sin v = \cos v\, d\,v$$

woraus entsteht:

$$\sin u - \sin v = (u - v) \cos u \quad \text{oder} \quad = (u - v) \cos v$$

in Übereinstimmung mit den obigen (5) und (6).

Reihen-Umkehrung.

Wenn eine konvergierende Potenzreihe vorliegt von dieser Form:

$$y = A\,x + B\,x^2 + C\,x^3 + D\,x^4 + \ldots \tag{7}$$

so kann man die Aufgabe stellen, umgekehrt x durch eine konvergierende Reihe nach Potenzen von y darzustellen.

In erster Näherung giebt die Reihe (7) jedenfalls, nach x aufgelöst:

$$x = \frac{y}{A} + y^2 \ldots$$

also

$$y = A\,x + B\left(\frac{y}{A} + y^2 \ldots\right)^2 + \ldots$$

und dieses giebt nach x aufgelöst:

$$x = \frac{y}{A} - \frac{B}{A^3}\,y^2 + \ldots$$

In dieser Weise kann man fortfahren, und Schritt für Schritt höhere Glieder $y^3 \ldots y^4 \ldots$ u. s. w. hinzufügen, was in besonderen Fällen oft nützlich ist. Man kann das Verfahren auch allgemeiner darstellen, indem die Auflösung der Reihe (7) diese Form annehmen soll:

$$x = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \ldots$$

Hier haben die Coëfficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{A} \quad , \quad \beta = -\frac{B}{A^3} \\ \gamma &= \frac{2B^2}{A^5} - \frac{C}{A^4} \quad , \quad \delta = -\frac{5B^3}{A^7} + \frac{5BC}{A^6} - \frac{D}{A^5} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Obgleich solche Entwicklungen wohl am besten am einzelnen Fall durchgeführt werden, wollen wir doch beispielshalber eine solche Reihenumkehrung mit 4 Elementen hersetzen (aus „Zeitschr. f. Verm." 1894 S. 38 und S. 149), welche vielleicht wieder gebraucht werden kann, oder auch umgekehrt das am Schlusse S. 181 Gesagte begründet.

$$\left.\begin{aligned} \varDelta &= A x - B y^2 - C x^2 - D x y^2 + E x^3 - F x^2 y^2 + G y^4 \\ \lambda &= a y + b y x + c y x^2 - d y^3 + e y x^3 - f y^3 x \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Die schrittweise vollführte Auflösung dieser zwei Gleichungen von x und y gab

$$\begin{aligned} x = {} & \frac{1}{A}\varDelta + \frac{B}{A a^2}\lambda^2 + \frac{C}{A^3}\varDelta^2 \\ & + \left(\frac{2BC}{A^3 a^2} + \frac{D}{A^2 a^2} - \frac{2Bb}{A^2 a^3}\right)\varDelta\lambda^2 + \left(\frac{2C^2}{A^5} - \frac{E}{A^4}\right)\varDelta^3 \\ & + \left(\frac{3Bb^2}{A^3 a^4} - \frac{6BbC}{A^4 a^3} - \frac{2Bc}{A^3 a^3} + \frac{4CD}{A^4 a^2} + \frac{6BC^2}{A^5 a^2} - \frac{2bD}{A^3 a^3} - \frac{3BE}{A^4 a^2} + \frac{F}{A^3 a^2}\right)\varDelta^2\lambda^2 \\ & + \left(\frac{5C^3}{A^7} - \frac{2CE}{A^6}\right)\varDelta^4 \\ & + \left(\frac{2Bd}{A a^5} - \frac{2B^2 b}{A^2 a^5} + \frac{B^2 C}{A^3 a^4} + \frac{BD}{A^2 a^4} - \frac{G}{A a^4}\right)\lambda^4 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} y = {} & \frac{1}{a}\lambda - \frac{b}{A a^2}\varDelta\lambda + \left(\frac{b^2}{A^2 a^3} - \frac{bC}{A^3 a^2} - \frac{c}{A^2 a^2}\right)\varDelta^2\lambda + \left(\frac{d}{a^4} - \frac{Bb}{A a^4}\right)\lambda^3 \\ & + \left(\frac{4Bb^2}{A^2 a^5} - \frac{bD}{A^2 a^4} - \frac{2BbC}{A^3 a^4} - \frac{2Bc}{A^2 a^4} - \frac{4bd}{A a^5} + \frac{f}{A a^4}\right)\varDelta\lambda^3 \\ & + \left(\frac{2b^2 C}{A^4 a^3} - \frac{b^3}{A^3 a^4} + \frac{2bc}{A^3 a^3} - \frac{2bC^2}{A^5 a^2} + \frac{bE}{A^4 a^2} - \frac{2Cc}{A^4 a^2} - \frac{e}{A^4 a^2}\right)\varDelta^3\lambda \end{aligned} \tag{11}$$

Hierin ist auch der frühere Fall (7) teilweise inbegriffen, man braucht nur in (9) zu setzen:

$$A = A \quad , \quad -C = B \quad , \quad E = C$$

und dazu $\qquad B = 0 \quad , \quad D = 0 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = 0$

dann geht (10) über in:

$$x = \frac{1}{A}\varDelta - \frac{B}{A^3}\varDelta^2 + \left(\frac{2B^2}{A^5} - \frac{C}{A^4}\right)\varDelta^3 + \left(-\frac{5B^3}{A^7} + \frac{5BC}{A^6}\right)$$

also innerhalb der vergleichbaren Teile übereinstimmend mit (8).

Oder man setze in (9) $a = A$, $b = 0$, $c = 0$, $d = -C$, $e = 0$, $f = 0$, dann wird

$$y = \frac{1}{A}\lambda - \frac{C}{A^4}\lambda^3$$

was ebenfalls innerhalb des Vergleichbaren mit (8) stimmt.

In ähnlicher Weise kann man auch *zwei* Reihen mit einander vergleichen; es sei gegeben:

$$A x + B x^2 + C x^3 + \ldots \quad = A' y + B' y^2 + C' y^3 + \ldots$$

Dann kann man x so darstellen:

$$x = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \ldots$$

wo die Coëfficienten α, β, γ ... folgende Bedeutungen haben:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{A'}{A} \quad , \quad \beta = \frac{B'}{A} - \frac{B A'^2}{A^3} \\ \gamma &= \frac{C'}{A} - \frac{2 B A' B'}{A^3} - \frac{C A'^3}{A^4} + \frac{2 B^2 A'^3}{A^5} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

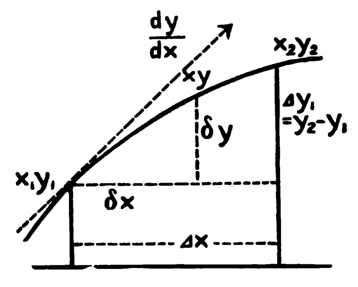
Solche Reihenumkehrungen kommen oft vor, es ist aber selten nützlich, solche allgemein vorbereitete Formeln mit Coëfficienten A, B, C... anzuwenden, weil in den praktischen Fällen die Coëfficienten meist auch *unter sich* einfache Beziehungen haben (z. B. goniometrische), welche dann bei der stufenweisen Auflösung sogleich mitbenützt werden.

§ 30. Interpolation.

Wir betrachten verschiedene Werte einer Funktion y, welche gewissen in arithmetischer Progression stehenden Werten des Arguments x entsprechen und nehmen die Bezeichnungen nach folgender Anordnung:

Argument	Funktion	Differenzen		
x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$	
		Δy_3		
x_4	y_4			

Fig. 1.



Es handelt sich um einen Zwischenwert von x, welcher z. B. zwischen x_1 und x_2 liegt und $= x_1 + \delta x$ sei, wobei δx kleiner als das allgemeine Intervall Δx ist, weshalb wir setzen:

$$\frac{\delta x}{\Delta x} = z \qquad \text{also } z < 1 \qquad (1)$$

der zu diesem $x_1 + \delta x$ gehörige Funktionswert y wird berechnet nach der Interpolationsformel:

$$y = y_1 + z\Delta y_1 - \frac{z}{1}\frac{1-z}{2}\Delta^2 y_1 + \frac{z}{1}\frac{1-z}{2}\frac{2-z}{3}\Delta^3 y_1 - \frac{z}{1}\frac{1-z}{2}\frac{2-z}{3}\frac{3-z}{4}\Delta^4 y_1 \quad (2)$$

oder $y = y_1 + z_1\,\Delta y_1 + z_2\,\Delta^2 y_1 + z_3\,\Delta^3 y_1 + z_4\,\Delta^4 y_1 + \ldots$

Da z kleiner als 1 angenommen ist, werden die Coëfficienten dieser Reihe abwechselnd positiv und negativ, wie hier geschrieben, indem gesetzt ist:

$$z_1 = z \ , \ z_2 = -\frac{z}{1}\frac{1-z}{2} \ , \ z_3 = +\frac{z}{1}\frac{1-z}{2}\frac{2-z}{3} \ , \ z_4 = -\frac{z}{1}\frac{1-z}{2}\frac{2-z}{3}\frac{3-z}{4} \quad (3)$$

u. s. w.

Man hat auch Tafeln für diese Coëfficienten berechnet, welche bei häufiger Interpolations-Arbeit mit höheren als zweiten Differenzen nützlich sind. Wir geben hier nur ein kleines Täfelchen für 10 teiliges Intervall, bis zur 5ten Ordnung z_5.

z	z_2	z_3	z_4	z_5
	—	+	—	+
0,1	0,045	0,0285	0,0207	0,016
0,2	0,080	0,0480	0,0336	0,026
0,3	0,105	0,0595	0,0402	0,030
0,4	0,120	0,0640	0,0416	0,030
0,5	0,125	0,0625	0,0391	0,027
0,6	0,120	0,0560	0,0336	0,023
0,7	0,105	0,0455	0,0262	0,017
0,8	0,080	0,0320	0,0176	0,011
0,9	0,045	0,0165	0,0087	0,005

Ein einfaches Zahlenbeispiel hiezu möge die Anwendung erläutern:

x	$y = \log x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
26	1.4149733	+	—	+	—	+
		163905				
27	4313638		5963			
		157942		421		
28	4471580		5542		46	
		152400		375		9
29	4623980		5167		37	
		147233		338		7
30	4771213		4829		30	
		142404		308		
31	4913617		4521			
		137883				
32	5051500					

$y = \log 26{,}4$

		1.4149733
0,4	. 163905 =	65562·0
0,120 .	5963 =	715·56
0,064 .	421 =	26·94
0,042 .	46 =	1·93
0,03 .	8 =	0·24
	$\log 26{,}4$ =	1.4216039·67

Die Abweichung von dem richtigen Werte 4216039 rührt von den Abrundungen her.

Da die Differenzen abwechselnd positiv und negativ sind, in demselben Sinn wie die z, so sind hier alle Produktglieder positiv geworden.

Sehen wir von ausgedehnten Tabellenberechnungen ab (für welche die Interpolation häufig in anderer Form ausgeführt wird), so haben wir es in der Geodäsie selten mit höheren als zweiten Differenzen zu thun, mit solchen aber sehr häufig bei fundamentalen trigonometrischen Berechnungen in 10stelligen Logarithmen des Thesaurus logarithmorum, wie an einem Beispiele gezeigt werden soll:

Es liege vor $x = 15° \ 30' \ 34{,}67492''$ und man soll den zugehörigen Wert $y = \log \sin x$ aus der 10 stelligen Tafel bestimmen.

Indem wir voraussetzen, dass der Leser die fragliche 10 stellige Tafel zur Hand habe, setzen wir die Rechnung ausführlichst hiernach an:

		+	—
$x = 15° 30' 30''$	$\log \sin x = 9.4271265{\cdot}273$		
		758·727	
30 40″	4272024·000		145
		758·582	
30 50″	4272782·582		141
		758·441	
31 60″	4273541·023		

Für $15° 30' 34{,}67492''$ ist $\delta x = 4{,}67492''$ und $z = 0{,}467492$, also:

$$\begin{array}{lr} & 9.4271265{\cdot}273 \\ 0{,}467492 \,.\, 758{\cdot}727 = & 354{\cdot}6988 \\ 0{,}467 \,.\, \frac{0{,}533}{2} \,.\, 0{\cdot}143 \quad = & 0{\cdot}0178 \\ \hline & 9.4271619{\cdot}9896 \\ \log \sin 15° 30' 34{,}67492'' = & 9.4271619{\cdot}990 \end{array}$$

Zu dieser Berechnungsart giebt der Thesaurus logarithmorum auf S. 2 eine Hilfstafel für $z \frac{1-z}{2} \delta$ mit 100 teiligem z, aber δ nur $= 4, 6, 8 \ldots 44$, was im trigonometrischen Teile bei weitem nicht ausreicht. Eine solche Hilfstafel ist nicht nötig, wenn man die zweiten Differenzen mit dem Rechenschieber erledigen kann.

Es ist oft nützlich, die Interpolations-Formel auf eine *andere* Form als die ursprüngliche Form (1) zu bringen, nämlich auf diese Form:

$$y = y_1 + z\left(\Delta y_1 - \frac{1-z}{2} \Delta^2 y\right) \tag{4}$$

Hier wird eine Verbesserung $-\frac{1-z}{2} \Delta^2 y$ der ersten Differenz Δy_1 berechnet, und dann mit der verbesserten ersten Differenz weiter gerechnet, wie bei einfacher Proportional-Interpolation.

Hiernach ist folgendes zur Übersicht berechnet:

$$\left.\begin{array}{rccccccccccc} z = & 0{,}0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}9 & 1{,}0 \\ \frac{(1-z)}{2} = & 0{,}50 & 0{,}45 & 0{,}40 & 0{,}35 & 0{,}30 & 0{,}25 & 0{,}20 & 0{,}15 & 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}00 \end{array}\right\} \tag{5}$$

Die wirkliche Ausrechnung macht man auch bei dieser Form am besten mit dem Rechenschieber.

Wir wollen das vorige Beispiel nochmals vornehmen mit Ausrechnung des Proportionalteils mit 6 stelligen Logarithmen:

Gesucht $\log \sin 15° 30' 34{,}67492''$, $z = 0{,}467492$, $1 - z = 0{,}533$

$$\begin{array}{lll} & + 758{\cdot}868 & \\ \log \sin 15° 30' 30'' = 9.4271265{\cdot}273 & & - 0{\cdot}141 \\ \cdot & + 758{\cdot}727 & \\ \cdot & + \quad 0{\cdot}038 & (\text{Korrekt. } \frac{0{,}533}{2}\, 0{\cdot}141) \\ \cdot & \overline{758{\cdot}765} & \\ \cdot & 2.880107 = \log 758{\cdot}765 & \\ \cdot & 9.669774 = \log 0{,}467492 & \\ 354{\cdot}717 & \overline{2.549881} & \end{array}$$

$\log \sin 15° 30' 34{,}67492'' = 9.4271619{\cdot}990$ wie oben.

Dieses Verfahren ist auch anwendbar für die umgekehrte Aufgabe, den Winkel x zu gegebenem $\log \sin x$ zu finden; man rechnet dann zuerst einen Näherungswert von z, mit dem Rechenschieber in dem obigen Falle $z = 0.46$ (den man etwa mit Blei in seine Stelle schreibt d. h. $15° 30' 34{,}6 \ldots$) und damit sofort weiter, teils im Kopf teils mit dem Rechenschieber $\frac{0{,}54}{2} \cdot 0{\cdot}141 = 0{\cdot}038$ u. s. w.

Um die Korrektion $\frac{1-z}{2} \Delta^2 y$ immer mit dem richtigen Vorzeichen anzubringen, merke man sich die mechanische Regel: Es muss durch diese Korrektion eine Annäherung an die *vorhergehende* Differenz erzielt werden.

Man kann sich für solche Zwecke eines autographierten Schemas bedienen (dem vorstehenden Beispiele entsprechend), welches ein Hilfstäfelchen nach (5), und alles Konstante vorgedruckt enthält. Für grössere Rechnungen mit 10 stelligen Logarithmen können die einzelnen Logarithmen in dem Schema behandelt werden, welches dann eine Beilage zu der Haupt-Rechnung bildet.

Indessen, wie immer, kommt es auf die Übung an; wer längere Zeit mit solchen Rechnungen zu thun hat, gewöhnt sich bald, die zweiten Differenzen mit dem Rechenschieber nebenher zu berücksichtigen, und hat dann kaum noch mehr Arbeit als das Ausrechnen der eigentlichen Proportionalteile verursacht.

Interpolation mit Differentialquotienten.

In der Erläuterungsfigur auf S. 181 ist ausser den Δx, Δy und δx, δy auch noch der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ an die Tangente des Punktes $x_1 y_1$ beigeschrieben, und wir wollen überlegen, wie die Interpolation ausgeführt werden kann, wenn nicht die endlichen Differenzen Δy, $\Delta^2 y$, sondern die theoretischen Differentialquotienten für die einzelnen x und y selbst angegeben sind, also für Δx als Einheit etwa so:

$$\left.\begin{array}{llll} x_0 & y_0 & \Delta x \left.\frac{dy}{dx}\right)_0 = d_0 & \\ & & & d_1 - d_0 = \delta_0 \\ x_1 & y_1 & \Delta x \left.\frac{dy}{dx}\right)_1 = d_1 & \\ & & & d_2 - d_1 = \delta_1 \\ x_2 & y_2 & \Delta x \left.\frac{dy}{dx}\right)_2 = d_2 & \\ \ldots & \ldots & & \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Z. B. in einer gewöhnlichen Logarithmentafel hätte man:

$$y = \log x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\mu}{x}$$

Man kann diese Differentialquotienten schärfer ausrechnen, als die mit den Abrundungsfehlern je zweier benachbarter y behafteten Δy sind. Mit δ_0 und δ_1 bezeichnen wir in obigem Schema die Differenzen je zweier aufeinander folgender d, wir wollen jedoch annehmen, jene δ_0 und δ_1 seien gleich, d. h. es handle sich nur um Interpolation zweiter Ordnung. Dann hat man nach (4):

$$y = y_1 + z \left(\Delta y_1 - \frac{\Delta^2 y}{2} + \frac{z}{2} \Delta^2 y \right) \qquad (7)$$

dabei ist $$\Delta y_1 - \frac{\Delta^2 y}{2} = \Delta y_1 - \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{2} = \frac{\Delta y_1 + \Delta y_0}{2}$$

dieses ist aber nach geometrischer Anschauung $= \Delta x \left.\frac{d y}{d x}\right)_1$, weil nämlich die Sehne von $x_0 y_0$ nach $x_2 y_2$ der Tangente in $x_1 y_1$ parallel zu achten ist. In ähnlicher Weise hat man auch:

$$\Delta y_2 + \Delta y_1 = y_2 - y_0 = 2 \Delta x \left.\frac{d y}{d x}\right)_1 \text{ und } \Delta y_3 + \Delta y_2 = y_3 - y_1 = 2 \Delta x \left.\frac{d y}{d x}\right)_2$$

$$\Delta y_3 - \Delta y_1 = 2 \Delta^2 y = 2 \Delta x \delta$$

dabei ist δ nach dem Schema (6) angenommen mit $\delta_1 = \delta_0 = \delta$ und wenn man auch das dort eingeführte Zeichen d benützt, so hat man nun aus (7):

$$y = y_1 + z\left(d_1 + \frac{z}{2}\delta\right) = y_1 + z\, d \tag{8}$$

Hiernach würde man also zuerst $d = d^1 + \frac{z}{2}\delta$ in der Reihe der d proportional interpolieren, aber mit $\frac{z}{2}$ statt mit z, und dann $y = y_1 + z\,d$ proportional weiter rechnen.

Diese Interpolationsart hätte manche Vorteile vor der gewöhnlichen, wenn die Differentialquotienten $\frac{d y}{d x}$ bzw. d scharf angegeben werden können, die Tafeln sind aber im allgemeinen nicht darauf eingerichtet. (Einiges Weitere hiezu giebt „Zeitschr. f. Verm.“ 1896).

Vielstellige Logarithmen.

Bei dieser Gelegenheit möge an die Hilfsmittel erinnert werden, welche man hat, wenn die gewöhnlichen 7 stelligen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln nicht ausreichen. Obgleich nicht geleugnet werden kann, dass schon vieles mit dem schwerfälligen Thesaurus behandelt worden ist, was unbeschadet seines inneren Wertes auch mit dem 7 stelligen Bremiker oder Schrön hätte gerechnet werden können, giebt es doch in der höheren Geodäsie viele Fälle, in welchen aus praktischen oder auch nur unabweisbaren formellen Gründen 8—10 Stellen nötig sind. Z. B. die Berechner von fundamentalen Tabellenwerken oder von Kontrollbeispielen zu langen Reihenentwicklungen können sich der 10 stelligen und manchmal der noch mehrstelligen Zahlen und Logarithmen nicht entschlagen.

Das wichtigste hier zu nennende Werk ist der „Thesaurus logarithmorum completus“ von Georg Vega, Leipzig 1794, mit 10 stelligen Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Funktionen von 10″ zu 10″. Dieses Werk ist nur noch antiquarisch zu sehr hohem Preis zu erlangen, weshalb der italienische Generalstab unter Leitung von General Ferrero eine ganz genaue Neuausgabe desselben auf zinkographischem Wege hergestellt hat, von welcher Verfasser ein Exemplar von General Ferrero erhielt, für welches auch auf diesem Wege der Dank ausgedrückt wird, indem alle höheren Rechnungen dieses Buches damit ausgeführt sind.

Nach diesem ist die neue französische 8 stellige Tafel für neue Teilung hier zu berichten, deren Titel ist: „Service géographique de l'armée. Tables des logarith-

mes à huit décimales des nombres entiers de 1 à 120000 et des sinus et tangentes de dix secondes en dix secondes d'are dans le système de la division centésimale du quadrant, publiées par ordre du ministre de la guerre, Paris imprimerie nationale 1891." (40 Francs).

Will man eine Triangulierung in alter Teilung mit dieser 8 stelligen Tafel ausführen, so muss man zuvor die Winkel aus alter in neue Teilung umrechnen, was, wenn es nicht auch für andere Zwecke gebraucht wird, eine starke Nebenarbeit vorstellt. Es giebt Rechner, welche es vorziehen so zu verfahren, statt den 10 stelligen Thesaurus anzuwenden. —

Endlich ist noch ein Wort zu sagen über die ganz seltenen Fälle, in welchen auch 10 stellige Logarithmen noch nicht ausreichen. Dann hat man zunächst im Thesaurus auf S. 642—684 die natürlichen 48 stelligen Logarithmen aller 4 stelligen Zahlen ohne einfache Faktoren. Dann aber „Hilfstafeln zur präzisen Berechnung 20 stelliger Logarithmen von Anton Steinhauser, mit Subvention der K. K. Akademie der Wissenschaften, Wien, Gerold's Sohn 1880" (mit Berichtigungen von Nell, „Zeitschr. f. Verm." 1893, S. 603). Dieses Werk giebt die 20 stelligen Logarithmen aller 4 stelligen Zahlen von 1000 bis 9999 (Tafel A) und dazu die Logarithmen der Zahlen 1,0000001 bis 1,000999 (Tafel B) und noch einer folgenden ähnlichen Gruppe, so dass jede Zahl in Faktoren zerlegt werden kann, deren Logarithmen sich finden lassen.

Auf ungefähr 15 Stellen kommt man mit dem ersten Teil A von Steinhauser einfach mit Hilfe der logarithmischen Reihe:

$$\log(a+b) = \log a + \log\left(1+\frac{b}{a}\right) = \log a + \Delta \log a \quad , \quad \frac{b}{a} = x$$

$$\Delta \log a = \mu x - \frac{\mu x^2}{2} + \frac{\mu x^3}{3} - \frac{\mu x^4}{4}$$

$$\log \mu = 9.6377843 \cdot 118$$

$$\log \frac{\mu}{2} = 9.3367543 \quad , \quad \log \frac{\mu}{3} = 9.160603 \quad , \quad \log \frac{\mu}{4} = 9.03572$$

Wir wollen hiernach beispielshalber $\log \pi$ berechnen:

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 24$$

die erste sich darbietende 4 stellige Näherung wäre 3,141 oder 3,142, allein wir kommen sofort um zwei Stellen weiter mit der Näherung 3,14160, welche $= 4 \,.\, 0{,}7854$ darstellbar sich so giebt:

$$\begin{array}{r} \log 4 = 0.60205\ 99913\ 27962\ 39 \\ \log 0{,}7854 = 9.89509\ 08969\ 34399\ 43 \\ \hline \log 3{,}1416 = 0.49715\ 08882\ 62361\ 82 \end{array}$$

Mit dieser Näherung hat man:

$$\begin{array}{rrl} & \pi = & 3{,}14159\ \ 26535\ \ 89793\ \ 24 \\ \text{Näherung} & a = & 3{,}14160 \\ \hline & b = & -\,0{,}00000\ \ 73464\ \ 10206\ \ 76 \end{array}$$

		x^2	x^3
$\log b =$	4.866 0751·747		
$\log a =$	0.497 1508·883		
$\log x =$	4.368 9242·864	8.7378486	3.10677
$\log \mu =$	9.637 7848·113	9.3367543	9.16066
	4.006 7085·977	8.0746029	2.26743

10155,670 405 + 0,011874 + 0,000 000 = 10155,682279

Also Näherung	0.49715	08882	62361	82
	—	10155	68227	9
$\log \pi =$	0.49714	98726	94133	9
soll	0.49714	98726	94133	854 (s. o. S. 171.)

Wir haben also auf diesem Wege $\log \pi$ auf 16 Stellen erhalten.

Zur umgekehrten Aufgabe, nämlich zu einem vielstelligen Logarithmus die Zahl zu suchen, setzen wir wieder eine Näherung a voraus, und es sei $\log(a+b)$ der gegebene Logarithmus, folglich b die Unbekannte, und es ist also möglich auszurechnen

$$\frac{\log(a+b) - \log a}{\mu} = y$$

dabei ist
$$\log \frac{a+b}{a} = \log\left(1 + \frac{b}{a}\right) = \mu y$$

also nach der Exponentialreihe (S. 170):

$$1 + \frac{b}{a} = 10^{\mu y} = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24}$$

$$b = a y + \frac{a y^2}{2} + \frac{a y^3}{6} + \frac{a y^4}{24}$$

Wenn man das vorige Beispiel hiernach rückwärts behandelt, so hat man gegeben $\log \pi = \log(a+b) = 0.49714\ 98726\ 9413385$ mit der Näherung $a = 3{,}14160$ und $\log a$ wie oben, dann wird $\log y = 4.3689247{\cdot}942\, n$ und nach der Formel für b:

$$b = -73464{,}18797 + 0{,}08590 = -73464{,}10207$$

also
$$\pi = 3{,}14160 - 0{,}00000\,73464{,}10207 = 3{,}14159\ 26535\ 89793$$

oder es ist π auf 15 Stellen richtig aus $\log \pi$ erhalten.

Da man eine gute Näherung für b leicht zur Verfügung hat, kann man auch nach dem Prinzip des Mittelargumentes kurzer Hand so rechnen:

$$b = \left(a + \frac{b}{2}\right) y = a_0 y$$

Wir wollen dieses an einem zweiten Beispiele zeigen:

Man habe $\log e^2 = 7.824\ 4104{\cdot}237$
$\log \mu = 9.637\ 7843{\cdot}113\ 00537$

$\log(a+b) = \log \mu e^2 = 7.462\ 1947{\cdot}350\ 00537$

dazu nach dem Thesaurus $\mu e^2 = 0{,}00289\ 86430\ 802$.

Wir möchten aber die letzten Stellen noch verschärfen, und finden dazu aus der Faktorentafel von Vega-Hülsse S. 378, dass $28987 = 101 \times 287$ ist, und wir er-

halten daraus durch Zusammensetzung mit Hilfe von Steinhausers 20stelligen Logarithmen:

$$\log a = \quad 7.462\,2032\,705\,16635$$

also $\log(a+b) - \log a = d \quad = -0{,}000\,0085\,355\,16098$

Das Mittel aus dem obigen 11stelligen μe^2 und aus der Näherung a ist $a_0 = 0{,}00289\,86715\,151$, womit $y = a_0 \frac{d}{\mu} = -569{,}697\,7144$, also das gesuchte

$$\mu e^2 = a + b = 0{,}00289\ 86430\ 30229$$

Es kommt bei solchen Rechnungen vor allem auf gute, möglichst grosse Näherungswerte an, die man mit Überlegung und manchem Kunstgriff durch Produktenzerlegung gewinnen kann, wobei eine Faktoren- und Primzahlen-Tafel, z. B. in Vega-Hülsse, Leipzig 1840, S. 360—454, von Nutzen ist.

Wir sind mit dieser Sache fast zu weit von der Geodäsie abgeschweift, doch war es nötig, für die in der höheren Geodäsie ausnahmsweise vorkommenden vielstelligen Fundamentalzahlen die Hilfsmittel hier zu behandeln.

Kapitel III.

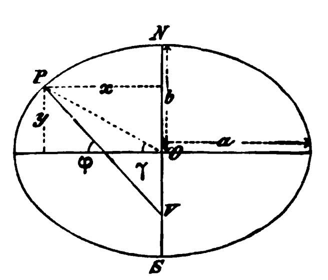
Das Erd-Ellipsoid (Sphäroid).

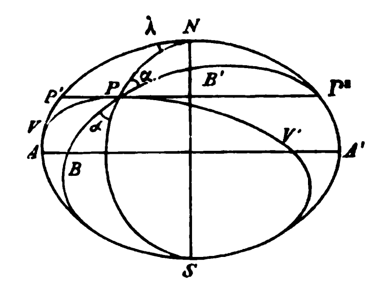
§ 31. Erklärungen und Grund-Masse.

Die ideale Erdoberfläche, welche unseren Berechnungen zu Grunde gelegt wird, ist ein Umdrehungs-Ellipsoid, d. h. diejenige Fläche, welche durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe erzeugt wird.

Fig. 1. Fig. 2.

Umdrehungs-Ellipsoid.





Zuerst kommen folgende Grössen und Gleichungen in Betracht, welche zu den vorstehenden Fig. 1. und Fig. 2. in Beziehung stehen.

Die grosse Halbaxe a, die kleine Halbaxe b (1)

die Abplattung $\alpha = \frac{a-b}{a}$ (2)

$$\text{die Excentricität } e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \tag{3}$$

$$\text{die zweite Excentricität } e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}} \tag{4}$$

Die Excentricität e in diesem Sinne ist eine absolute Zahl und erscheint als Verhältnis der halben linearen Excentricität $\sqrt{a^2 - b^2}$ zur grossen Halbaxe a.

Indem man die halbe lineare Excentricität $\sqrt{a^2 - b^2}$ auch zur kleinen Halbaxe b in Beziehung setzt, kommt man auf den Wert e' nach (4), welcher für unsere Berechnungen meist vorteilhafter ist, als e nach (3).

Zwischen e und e' bestehen die leicht nachweisbaren Beziehungen:

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \qquad e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} \tag{5}$$

$$\text{und } (1 - e^2)\,(1 + e'^2) = 1 \tag{6}$$

Zwischen der Abplattung α und dem verwandten e hat man:

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2} \text{ oder } e^2 = 2\,\alpha - \alpha^2 \tag{7}$$

In α und e ist die grosse Halbaxe a und in e' ist die kleine Halbaxe b bevorzugt; beide a und b treten gleichartig auf in den Werten

$$n = \frac{a - b}{a + b} \qquad m^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \tag{8}$$

Ausser den beiden Halbaxen a und b führen wir auch noch eine dritte Grösse c ein, entsprechend der Gleichung:

$$c = \frac{a^2}{b} \text{ oder } c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} \tag{9}$$

Diese Grösse c hat die Bedeutung des Krümmungs-Halbmessers im Nordpol oder Südpol der Meridian-Ellipse, und schmiegt sich daher dem Umdrehungs-Ellipsoid in der Nähe der Pole sehr an; diese Grösse c wird sich später bei manchen Entwicklungen nützlich erweisen, was auch von vorn herein wahrscheinlich ist, insofern bei einem Umdrehungs-Ellipsoid die Umdrehungsaxe b die wichtigste ist.

Unsere geodätischen Entwicklungen werden wir meist mit c und e'^2 als Konstanten führen.

In Fig. 1. haben wir noch zu betrachten die Normale PV, welche die Richtung der Schwerkraft auf dem Ellipsoid anzeigt, und dazu den Winkel φ, welchen die Normale mit der grossen Axe macht, d. h.:

die geographische Breite φ

Verschieden hievon ist der in Fig. 1. eingeschriebene Winkel γ, welcher *geocentrische* Breite heisst, und in der Erdmessung fast nie gebraucht wird (dagegen kommt γ bei astronomischen Parallaxen-Rechnungen vor).

Ferner sind nach Fig. 2. noch folgende Begriffe festzustellen:

Parallelkreis $P'P''$,
Meridiane NAS und NPS
Geographischer Längen-Unterricht λ,
Normalschnitte, z. B. BPB',
Azimut α eines Normalschnittes.



Die Bessel schen Erd-Dimensionen.

Wie wir schon in der Einleitung S. 9—10 angegeben haben, werden die von Bessel im Jahre 1841 durch Ausgleichung aus 10 Breitengradmessungen berechneten Erd-Dimensionen sehr allgemein angewendet, und wir werden in der Folge dieselben stets benützen.

Bessel hat im 19. Bande, 1842, der astronomischen Nachrichten, Nr. 438, Altona 1841, 2. Dezember, S. 116 folgende Schlusswerte seiner Ausgleichungen gegeben:

$$\left.\begin{array}{ll}
n = \dfrac{a-b}{a+b} = 0{,}00167\ 41848 & \\
\dfrac{a}{b} = \dfrac{299{,}1528}{298{,}1528} & \\
a = 3272077{,}14 \text{ Toisen} & \log a = 6.514\,8235{\cdot}337 \text{ in Toisen} \\
b = 3261139{,}33 \quad \text{„} & \log b = 6.513\,3693{\cdot}539 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
\log e = 8.912\,2052 & \log \sqrt{1-e^2} = 9.998\,5458{\cdot}202 \\
\text{Länge des Erdquadranten} & \\
= 5131179{,}81 \text{ Toisen} = 10\,000\,855{,}76 \text{ Meter} &
\end{array}\right\} \quad (11)$$

Dieses sind genau die Angaben von Bessel, und man könnte nun meinen, die seit 54 Jahren allgemein gebrauchten „Bessel schen Erddimensionen" seien dadurch unabänderlich festgestellt, das ist aber in den letzten Stellen nicht der Fall. Diese Bessel schen Zahlen stimmen begreiflicherweise unter sich selbst nicht völlig scharf in den letzten Stellen, und je nachdem man nun von der einen oder anderen ausgeht und schärfer weiter rechnet, erhält man Abweichungen.

Gauss citiert die Bessel schen Erddimensionen im I. Teil der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, erste Abhandlung" 1834 S. 9—10:

$$\log a = 6.514\,8235{\cdot}337 \text{ in Toisen}, \quad \log\cos\varphi = \log\sqrt{1-e^2} = 9.998\,5458{\cdot}202$$

dann heisst es: „Es folgt hieraus, mit Hilfe der 10 ziffrigen Logarithmen":

$$\varphi = 4^\circ\,41'\,9{,}98262'' \text{ und } \log\sin\varphi = \log e = 8.912\,2052{\cdot}079$$

und zur Reduktion von Toisen auf Metermass hat hier Gauss den Logarithmus 0.2898199·300

Diese Zahlen liegen der Gauss schen Tafel für konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel zu Grunde.

Encke ging bei Berechnung seiner „Tafeln für die Gestalt der Erde" im Berliner Astronomischen Jahrbuch für 1852, S. 318—381 von den Bessel schen $\log a$ und $\log b$ aus, er sagt daselbst S. 322—323: Bei den folgenden Tafeln ist zu Grunde gelegt nach Bessel:

$$\log a = 6.514\,8235{\cdot}337\ , \quad \log b = 6.513\,3693{\cdot}539$$

woraus abgeleitet ward:

$$\begin{array}{ll}
a = 3\,272\,077{,}1399 \text{ Toisen} & \log e = 8.912\,2052{\cdot}075 \\
b = 3\,261\,139{,}3284 \quad \text{„} & \log\sqrt{1-e^2} = 9.998\,5458{\cdot}202 \\
\dfrac{a-b}{a} = \dfrac{1}{299{,}152\,818} & \log n = 7.223\,8033{\cdot}861 \\
 & \log(1+n^2) = 0.000\,0012{\cdot}173 \\
 & n = 0.001\,6741{\cdot}84767
\end{array}$$

Vergleicht man die Zahlen von Bessel und Encke, so sieht man, dass durch den Umweg über die 10 stelligen Logarithmen a und b sich bzw. um 0,0001 und 0,0016 Toisen geändert haben. —

Alle die Zahlen, welche in namhaften geodätischen Schriftwerken für die Bessel schen Erddimensionen aufgestellt worden sind, differieren von einander mehr



oder weniger in den letzten Stellen, wie wir in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1885, S. 22—26 durch Zusammenstellung jener Zahlen näher gezeigt haben.

Auch die Umwandlung der Bessel schen a und b von Toisen in Meter hat zu Schwankungen der letzten Stelle Veranlassung gegeben. Das gesetzliche Verhältnis der Toise zum Meter, welches wir schon in der Einleitung S. 7 erwähnt haben, ist 864 : 443,296, und wenn man mit den gewöhnlichen 10 stelligen Logarithmen rechnet, so bekommt man:

$$1 \text{ Meter} = \frac{443,296}{864} \text{ Toisen} \qquad \begin{aligned} \log 443,296 &= 2.646\,6938{\cdot}125 \\ \log 864 &= 2.936\,5137{\cdot}425 \\ \hline \log (M, T) &= 9.710\,1800{\cdot}700 - 10 \\ \log (T, M) &= 0.289\,8199{\cdot}300 \end{aligned}$$

und die Zahlen zu diesen Logarithmen

1 Meter = 0,513 074 074 Toisen, 1 Toise = 1.949 036 310 Meter.

Wenn man aber schärfer rechnet, so wird durch gewöhnliches Dividieren:

$$(T, M) = \frac{443,296}{864} = 1,94903\,63098\,24587$$

und der 11 stellige Logarithmus hiezu ist:

$$\log (T, M) = \log \frac{443,296}{864} = 0.289\,8199\,2994$$

also 10 stellig abgerundet um 0·001 kleiner als das obige gewöhnlich gebrauchte 0·300.

Die Zahlenschärfe aller dieser Angaben geht weit über die sachliche Genauigkeit hinaus, denn nach dem was wir über die Bessel sche Ausgleichung selbst in der Einleitung S. 9—10 gesehen haben, hat der Meridianquadrant 10000856 m einen mittleren Fehler von rund 500 m und die Abplattungszahl 299 einen mittleren Fehler von 5, während man mit $\log a$ und $\log b$ 10 stellig rechnet. — Aber es bestehen doch gute Gründe für das Festhalten gewisser auf 10 Stellen unabänderlich angenommenen Zahlen für die Dimensionen des Erd-Ellipsoids, das als ideale Vergleichs- und Projektionsfläche allen Rechnungen zu Grunde gelegt wird.

Namentlich bei Berechnung von geodätischen Zahlentafeln, wo man wegen der Abrundungshäufung oft 3—4 Stellen mehr in Anrechnung stellt, als man schliesslich haben will, ist es störend, wenn die letzten Stellen bei dem einen und anderen Rechner nicht übereinstimmen. —

Wir halten uns ein für allemal an diejenigen Festsetzungen für die letzten Stellen der Bessel schen Erddimensionen, welche seit 1878 von der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landesaufnahme und im Anschluss hieran seit 1886 vom geodätischen Institut getroffen worden sind, nämlich:

$$\log a = \mathbf{6.804\,6434{\cdot}637} \textbf{ in Metern}$$
$$\log e^2 = \mathbf{7.824\,4104{\cdot}237 - 10}$$
$$\log \frac{1}{1+e'^2} = \log (1-e^2) = \mathbf{9.997\,0916{\cdot}404 - 10}$$

Dieses sind in Preussen die einzig richtigen Bessel schen Erddimensionen; die Quellenangaben dafür sind:

1) *Landesaufnahme:* Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme. Formeln und Tafeln zur Berechnung der geographischen Coordinaten

aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten. Erste Ordnung. Berlin 1878, im Selbstverlage, zu beziehen durch die königliche Hofbuchhandlung von E. S. Mittler und Sohn Kochstrasse 69, 70. (S. 4 *log a* und *log e²* wie oben).

2) *Geodätisches Institut:* Veröffentlichung des königlich preussischen geodätischen Instituts. Lotabweichungen. Heft 1: Formeln und Tafeln sowie einige Ergebnisse für Norddeutschland. Der allgemeinen Konferenz der internationalen Erdmessung im Oktober 1886 zu Berlin gewidmet. Mit drei Karten. Druck und Verlag von P. Stankiewicz Buchdruckerei 1886. (S. 4 *log a* und *log e²* wie oben).

Bei den Grundzahlen für $\log a$ und $\log e^2$ ist auch noch $\log(1-e^2)$ angegeben, wie in jenen Rechnungsvorschriften S. 4; und da die dritte Zahl $\log(1-e^2)$ von der zweiten $\log e^2$ abhängt, ist zu bemerken, dass $\log e^2$, welches 10 Wertstellen hat, allein massgebend ist und dazu gebraucht werden kann, um $\log\sqrt{1-e^2}$, welches im 10stelligen Logarithmus nur 8 eigentliche Wertstellen hat, noch auf weitere Stellen auszurechnen, welche zu manchen Zwecken erwünscht sein werden.

Aus der logarithmischen Reihe § 28. S. 169 hat man sofort:

$$l(1-e^2) = -\left(e^2 + \frac{e^4}{1} + \frac{e^6}{3} + \frac{e^8}{4} + \frac{e^{10}}{5} + \ldots\right)$$

$$\log\frac{1}{1-e^2} = \mu e^2 + \frac{\mu e^4}{2} + \frac{\mu e^6}{3} + \frac{\mu e^8}{4} + \frac{\mu e^{10}}{5} + \ldots$$

Die Ausrechnung mit $\log e^2 = 7.824\,4104{\cdot}237$ giebt:

$$\log\frac{1}{1-e^2} = +\,28986{\cdot}430302 + 96{\cdot}733112 + 0{\cdot}430422 + 0{\cdot}002155 + 0{\cdot}000012$$

$$\log\frac{1}{1-e^2} = 0.002\,9083{\cdot}596003 \;,\; \log(1-e^2) = 9.997\,0916{\cdot}403997$$

Zur Probe kann man auch rechnen:

$$\log e^2 - \log(1-e^2) = \log e'^2 = 7.827\,3187{\cdot}833$$

$$\log(1+e'^2) = \mu e'^2 - \frac{\mu e'^4}{2} + \frac{\mu e'^6}{3} - \frac{\mu e'^8}{4} + \frac{\mu e'^{10}}{5} - \ldots$$

$$= +\,29\,181{\cdot}196470 - 98{\cdot}037422 + 0{\cdot}439157 - 0{\cdot}002213 + 0{\cdot}000012$$

$$\log(1+e'^2) = 0.002\,9083{\cdot}596004 \;,\; \log\frac{1}{1+e'^2} = 9.997\,0916{\cdot}403996$$

So sind diese Werte auf der Hauptzusammenstellung S. 193 eingesetzt.

Die seltener gebrauchten, und deswegen auf S. 193 weggelassenen Werte für $(a-b):a$ und $(a-b):(a+b)$ fügen wir hier auch noch bei:

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{399{,}1528128} \qquad \log\frac{1}{\alpha} = 2.475\,8930{\cdot}907$$

$$\alpha = 0{,}00334\,27731\,81579 \qquad \log\alpha = 7.524\,1069{\cdot}093 - 10$$

$$\frac{a-b}{a+b} = n = 0{,}00167\,41848\,00816 \qquad \log n = 7.223\,8033{\cdot}949 - 10$$

Bemerkt sei auch noch zu der Zusammenstellung auf S. 193, dass die verschiedenen -10 u. s. w. an den Logarithmen, weil bei praktischen Rechnungen stets selbstverständlich, *nicht* geschrieben sind.



Besselsche Erddimensionen und Mathematische Konstante.

$a = 6\,377\,397{,}15500^{m}$ $\quad log\ a = 6.804\,6434{\cdot}637$

$b = 6\,356\,078{,}96325_{\text{"}}$ $\quad log\ b = 6.803\,1892{\cdot}839$

$\frac{a^2}{b} = c = 6\,398\,786{,}84939_{\text{"}}$ $\quad log\ c = 6.806\,0976{\cdot}435$

$log\ \frac{\varrho''}{c} = 8.508\,3274{\cdot}897$

$log\ \frac{c}{\varrho''} = 1.491\,6725{\cdot}103$

$c = a\sqrt{1 + e'^2} = b\,(1 + e'^2)$ $\quad log\,c^2 = 13.612\,1952{\cdot}870$

$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2 = 0{,}00667\,43722\,31315$ $\quad log\ e^2 = 7.824\,4104{\cdot}237$

$\frac{a^2 - b^2}{b^2} = e'^2 = 0{,}00671\,92187\,98677$ $\quad log\ e'^2 = 7.827\,3187{\cdot}833$

$1 - e^2 = \frac{1}{1 + e'^2} = 0{,}99332\,56277\,68685$ $\quad log\,(1 - e^2) = 9.997\,0916{\cdot}403996$

$\frac{1}{1 - e^2} = 1 + e'^2 = 1{,}00671\,92187\,98677$ $\quad log\,(1 + e'^2) = 0.002\,9083{\cdot}596004$

$\sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}} = 0{,}99665\,72269$ $\quad log\,\sqrt{1 - e^2} = 9.998\,5458{\cdot}201998$

$\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} = \sqrt{1 + e'^2} = 1{,}00335\,39848$ $\quad log\,\sqrt{1 + e'^2} = 0.001\,4541{\cdot}798002$

n	$log\ e^n$	$log\ \mu\ e^n$	$log\ e'^n$	$log\ \mu\ e'^n$	n
0		9.637 7843·113		9.687 7843·113	0
2	7.824 4104·237	7.462 1947·850	7.827 3187·833	7.465 1030·946	2
4	5.648 8208·474	5.286 6051·587	5.654 6375·666	5.292 4218·779	4
6	3.478 2312·711	3.111 0155·824	3.481 9563·499	3.119 7406·612	6
8	1.297 6416·948	0.935 4260·061	1.309 2751·332	0.947 0594·445	8
10	9.122 0521·185	8.759 8364·298	9.136 5939·165	8.874 3782·278	10
12	6.946 4625·422	6.584 2468·535	6.963 9126·998	6.601 6970.111	12

für 7. Log.-Stelle: $\mu\ e^2 = 28986{,}43080229$ $\quad \mu\ e'^2 = 29181{,}19646966$

1 Meter = 0,513 074 074 Toisen $\quad log\,(M, T) = 9.710\,1800{\cdot}700$ (vgl. hiezu

1 Toise = 1,949 036 310 Meter $\quad log\,(T, M) = 0.289\,8199{\cdot}300$ S. 191)

Die Zahlen π, ϱ und μ (vgl. auch S. 170 und S. 171).

$\pi = 3{,}14159\,26536$ $\quad log\ \pi = 0.497\,1498{\cdot}727$ $\quad log\ \frac{1}{\pi} = 9.502\,8501{\cdot}273$

$\varrho^\circ = 57{,}29577\,95131$ $\quad log\ \varrho^\circ = 1.758\,1226{\cdot}324$ $\quad log\ \frac{1}{\varrho^\circ} = 8.241\,8773{\cdot}676$

$\varrho' = 3\,437{,}74677\,07849$ $\quad log\ \varrho' = 3.536\,2738{\cdot}828$ $\quad log\ \frac{1}{\varrho'} = 6.463\,7261{\cdot}172$

$\varrho'' = 206\,264{,}80624\,71$ $\quad log\ \varrho'' = 5.314\,4251{\cdot}332$ $\quad log\ \frac{1}{\varrho''} = 4.685\,5748{\cdot}668$

Für neue Teilung:

$\varrho_g = 63{,}66197\,72368$ $\quad log\ \varrho_g = 1.803\,8801{\cdot}230$ $\quad log\ \frac{1}{\varrho_g} = 8.196\,1198{\cdot}770$

$\mu = 0{,}43429\,44819$ $\quad log\ \mu = 9.637\,7843{\cdot}113$ $\quad log\ \frac{1}{\mu} = 0.362\,2156{\cdot}887$

Für Einheiten der 7ten Stelle $\quad log\ \mu = 6.637\,7843{\cdot}113$ $\quad log\ \frac{1}{\mu} = 3.362\,2156{\cdot}887$

$log\ 2 = 0.301\,0299{\cdot}957$ $\quad log\ 5 = 0.698\,9700{\cdot}043$ $\quad log\ 8 = 0.903\,0899{\cdot}870$

$log\ 3 = 0.477\,1212{\cdot}547$ $\quad log\ 6 = 0.778\,1512{\cdot}504$ $\quad log\ 9 = 0.954\,2425{\cdot}094$

$log\ 4 = 0.602\,0599{\cdot}913$ $\quad log\ 7 = 0.845\,0980{\cdot}400$ $\quad log\ 12 = 1.079\,1812{\cdot}460$

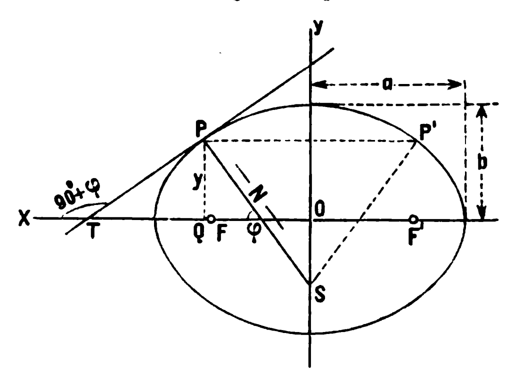
Für die Festhaltung der oben S. 191 fett gedruckten Konstanten besteht der Grund, dass die von der trigonometrischen Abteilung der Landes-Aufnahme veröffentlichten geographischen Coordinaten, auf welchen die ganze preussische praktische Geodäsie beruht, mit diesen Konstanten und den darauf gegründeten Hilfstafeln berechnet sind, dass also z. B. eine Dreiecksseite rückwärts aus jenen Coordinaten berechnet unmöglich wieder ebenso herauskommen kann, wie sie als Dreiecksseite eingeführt worden ist, wenn nicht wieder dieselben Konstanten a und e^2 angewendet werden.

In diesem Buche haben wir die auf S. 191 fett gedruckten Zahlen und die darauf gegründeten auf S. 193 zusammengestellten weiteren geodätischen Konstanten allen geodätischen Rechnungen zu Grunde gelegt.

§ 32. Die Haupt-Krümmungs-Halbmesser.

Eine Ellipse mit den beiden Halb-Axen a und b in rechtwinkligen Coordinaten x und y ist in Fig. 1 gezeichnet.

Fig. 1.
Umdrehungs-Erd-Ellipsoid.



Die Gleichung dieser Ellipse ist bekanntlich:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ oder } b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \tag{1}$$

Die Differentiierung dieser Gleichung giebt:

$$\frac{2\,x\,d\,x}{a^2} + \frac{2\,y\,d\,y}{b^2} = 0 \text{ oder } \frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{b^2\,x}{a^2\,y} \tag{2}$$

Andererseits hat der Differential-Quotient $\frac{d\,y}{d\,x}$ eine Beziehung zum Normalen-Winkel φ, nämlich (nach Fig. 1.):

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\,cotg\,\varphi \text{ oder } \frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \tag{3}$$

Die Gleichungen (2) und (3) zusammen geben:

$$\frac{b^2\,x}{a^2\,y} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{b^2\,x^2}{a^2\,y^2} = \frac{a^2\cos^2\varphi}{b^2\sin^2\varphi} \tag{4}$$

Nun hat man in (1) und (4) zwei Gleichungen, welche nach x^2 und y^2 aufgelöst werden können, was wir in aller Ausführlichkeit so schreiben:

$$(1) \text{ giebt:} \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$
$$(4) \quad " \quad b^4 x^2 \sin^2 \varphi - a^4 y^2 \cos^2 \varphi = 0$$

Wenn man die erste dieser beiden Gleichungen mit $a^2 \cos^2 \varphi$ multipliziert und dann beide Gleichungen addiert, so bekommt man:

$$x^2 = \frac{a^4 \cos^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \tag{5}$$

Wenn man andererseits die erste der beiden vorstehenden Gleichungen mit $b^2 \sin^2 \varphi$ multipliziert und dann beide Gleichungen subtrahiert, so bekommt man

$$y^2 = \frac{b^4 \sin^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \tag{6}$$

Meridian-Krümmungs-Halbmesser M.

Nach diesem gehen wir über zur Bestimmung des Krümmungs-Halbmessers der Meridian-Ellipse, den wir mit M bezeichnen wollen. Die analytische Geometrie bietet hiezu bekanntlich die Formel:

$$M = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{d x^2}} \tag{7}$$

Den hiezu nötigen ersten Differential-Quotienten haben wir bereits in (3) gebraucht, nämlich:

$$\frac{dy}{dx} = -\cot g\, \varphi \quad , \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \tag{8}$$

Die zweite Ableitung hievon giebt zunächst:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dx} \tag{9}$$

und um $\frac{d\varphi}{dx}$ zu erlangen, müssen wir die Reciproke $\frac{dx}{d\varphi}$ aus (5) ableiten:

$$x = \frac{a^2 \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

Ableitung eines Bruches:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{a^2}{(\sqrt{\ldots})^2} \left(-\sin \varphi \sqrt{\ldots} - \cos \varphi \frac{-a^2 \cos \varphi \sin \varphi + b^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{\ldots}}\right)$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{-a^2}{(\sqrt{\ldots})^3} \left(\sin \varphi \,(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) + \cos \varphi \,(-a^2 + b^2) \sin \varphi \cos \varphi\right)$$

$$= \frac{-a^2}{(\sqrt{\ldots})^3} b^2 \sin \varphi \,(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{-a^2 b^2 \sin \varphi}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \tag{10}$$

Nun kann man aus (8), (9), (10) die Formel (7) zusammensetzen, und man bekommt dadurch mit Weglassung des für uns bedeutungslosen Vorzeichens:

$$M = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \tag{11}$$

Einführung der Excentricität.

Die Formeln, welche wir hier entwickelt haben, sind die sich zuerst darbietenden, allein für die späteren Anwendungen sind diese Formeln nicht geeignet, weil man darin nicht gut den wichtigen Umstand zum Ausdruck bringen kann, dass beim Erdellipsoid die beiden Halbaxen a und b nahezu *gleich* sind, oder mit anderen Worten: die später unerlässlichen rasch konvergierenden Reihen-Entwicklungen lassen sich an die vorstehenden Formeln mit a und b nicht gut ansetzen. Man führt deswegen eine Excentricität und eine lineare Axengrösse ein. Wir haben hiezu zwei Formen, welche zunächst beide behandelt werden sollen:

$$\text{I. Ältere Form mit } \frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2 \text{ und Axe } a \tag{12}$$

$$\text{II. Neuere Form mit } \frac{a^2 - b^2}{b^2} = e'^2 \text{ und Axengrösse } \frac{a^2}{b} \tag{13}$$

Bleiben wir zuerst bei der älteren Form I, so haben wir, um alles in a und e^2 auszudrücken, zunächst

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = e^2 \qquad b^2 = a^2 (1 - e^2) \tag{14}$$

$$a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi = a^2 \cos^2 \varphi + a^2 (1 - e^2) \sin^2 \varphi = a^2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi)$$

Wir setzen ein für allemal:

$$1 - e^2 \sin^2 \varphi = W^2 \qquad W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \tag{15}$$

damit werden x und y, sowie M aus ihren ersten Formen in (5), (6) und (11) übergeführt in:

$$x = \frac{a \cos \varphi}{W} \qquad y = \frac{a (1 - e^2) \sin \varphi}{W} \tag{16}$$

$$M = \frac{a (1 - e^2)}{W^3} \tag{17}$$

Diese Formeln (16) und (17) findet man sehr allgemein in geodätischen Werken, sie sind aber nicht die besten. Wenn man nach der neueren Form II bei (13) rechnet, so bekommt man:

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} - 1 = e'^2 \qquad \frac{a}{b} = \sqrt{1 + e'^2}\ , \ \frac{a^2}{b} = c$$

$$a = \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2}} \qquad b = \frac{c}{1 + e'^2} \tag{18}$$

$$a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi = \frac{c^2 (1 + e'^2 \cos^2 \varphi)}{(1 + e'^2)^2}$$

Wir setzen ein für allemal:

$$1 + e'^2 \cos^2 \varphi = V^2 \qquad V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \tag{19}$$

damit werden x, y und M aus (5), (6), (11) übergeführt in:

$$x = \frac{c \cos \varphi}{V} \qquad y = \frac{c \sin \varphi}{V(1+e'^2)} \tag{20}$$

$$M = \frac{c}{V^3} \tag{21}$$

Der Querkrümmungshalbmesser N.

Durch das Vorstehende haben wir den ersten Haupt-Krümmungs-Halbmesser des Umdrehungs-Ellipsoids, für den Meridian, bestimmt; der zweite Haupt-Krümmungs-Halbmesser, welcher sich auf die Krümmung quer zum Meridian, also von West nach Ost bezieht, kann ohne weitere Rechnung durch eine sehr einfache geometrische Betrachtung gefunden werden.

Wir betrachten in Fig. 1. (S. 194) zuerst den Parallelkreis $P\,P'$ für die Breite φ, und sehen, dass alle in diesem Parallelkreis gezogenen Flächen-Normalen sich in *einem* Punkte S der Axe schneiden.

Der Querkrümmungs-Bogen, welcher in P rechtwinklig zum Meridian ist, muss offenbar jenen Parallelkreis $P\,P'$ in P berühren, und deswegen sind zwei einander unendlich nahe liegende Gerade $P\,S$ auch Normalen des Querkrümmungs-Bogens in P. Da aber der Schnittpunkt zweier einander unendlich naher Normalen einer Kurve als Krümmungs-Mittelpunkt der Kurve gilt, so ist $P\,S$ der Krümmungs-Halbmesser des Querkrümmungs-Bogens, oder kurz, es ist $PS = N$ der Querkrümmungs-Halbmesser des Umdrehungs-Ellipsoids in dem Punkte P.

Indem wir die Länge dieses Querkrümmungs-Halbmessers ein für allemal mit N bezeichnen, haben wir

$$N = \frac{x}{\cos \varphi}$$

und je nach der alten oder neuen Form (16) oder (20) giebt dieses:

$$N = \frac{a}{W} \quad \text{oder} \quad N = \frac{c}{V} \tag{22}$$

Mittlerer Krümmungshalbmesser r.

Unter dem mittleren Krümmungshalbmesser versteht man in der Geodäsie das geometrische Mittel aus den beiden Haupt-Krümmungs-Halbmessern M und N, d. h.:

$$r = \sqrt{M\,N} \tag{23}$$

oder mit Einsetzung der Bedeutungen von M und N

$$r = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{W^2} \quad \text{oder} \quad r = \frac{c}{V^2} \tag{24}$$

Krümmungs-Verhältnis N : M.

Nachdem die beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser M und N bestimmt sind, wollen wir auch ihren Quotienten betrachten, d. h. in zwei Formen, aus (17) und (21) mit (22):

$$\frac{N}{M} = \frac{W^2}{1-e^2} \quad \text{oder} \quad \frac{N}{M} = V^2 \tag{25}$$

Dieser Quotient ist in der Geodäsie sehr wichtig, denn je näher dieser Quotient gleich 1 ist, desto mehr ist es gestattet, die Erde unter der betreffenden Breite als eine Kugel zu betrachten. Zur Gewinnung einer Übersicht wollen wir einige Werte hiefür ausrechnen:

$$\varphi = 0^\circ \qquad \frac{N}{M} = 1{,}0067 = V^2$$

.. 30°	 1,0050
.. 45°	 1,0034
.. 60°	 1,0017
.. 90°	 1,0000

Die Werte V^2 sind von 1 ziemlich verschieden, unter 45° um etwa $^1/_3$ %; und nur in den Erdpolen ($\varphi = 90^\circ$) wird $V^2 = 1$.

Trotzdem giebt es viele Fälle, wo es sich nur um kleine Korrektionen *zweiter* Ordnung handelt, in welchen der Quotient $N : M$ doch hinreichend $= 1$ gesetzt, d. h. die Erde als Kugel behandelt werden darf. In solchen Fällen nimmt man dann den mittleren Krümmungs-Halbmesser r nach (23) oder (24) als Halbmesser einer solchen Kugel.

Da das Verhältnis $N : M$ stets grösser als 1 ist, ist auch immer N grösser als M, d. h. der Querkrümmungs-Halbmesser ist immer grösser als der Meridiankrümmungs-Halbmesser, oder umgekehrt, die Krümmung $1 : M$ ist im Meridian stets grösser als die Krümmung $1 : N$ im Querbogen. Nur im Pol werden beide gleich, nämlich $N = M = \frac{a^2}{b} = c^2$ (wie schon in (9) § 31. S. 189 bemerkt wurde) und im Pol der Erde wäre daher das beste Arbeitsfeld für einen Geodäten, weil dort alle sphäroidischen Korrektionen verschwinden.

Geocentrischer Halbmesser und geocentrische Breite.

Selten in der Geodäsie, aber in der Astronomie zu Parallelaxenrechnungen gebraucht, sind noch zwei Werte, welche wir im Anschluss an das Vorhergehende bestimmen wollen, nämlich der Abstand eines Erdpunktes von dem Erdmittelpunkt, geocentrischer Halbmesser $= C$ genannt und der Winkel dieses Halbmessers mit dem Äquator, geocentrische Breite $= \gamma$.

Nach Fig. 1. § 31. S. 188 haben wir für diese beiden Grössen sofort die Formeln:

$$C = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad tang\, \gamma = \frac{y}{x} \tag{a}$$

Wir wollen weiter mit a und e^2 rechnen, d. h. nach (16) S. 196

$$x = \frac{a \cos \varphi}{W} \quad \text{und} \quad y = \frac{a\,(1 - e^2) \sin \varphi}{W} \tag{b}$$

also

$$C^2 = \frac{a^2}{W^2}\,(\cos^2 \varphi + (1 - e^2)^2 \sin^2 \varphi) \quad , \quad tang\, \gamma = (1 - e^2)\, tang\, \varphi \tag{c}$$

$$C^2 = \frac{a^2}{W^2}\,(\cos^2 \varphi + \frac{tang^2\, \gamma}{tang^2\, \varphi} \sin^2 \varphi) = \frac{a^2}{W^2} \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \gamma} \tag{d}$$

Aus (c) hat man weiter:

$$1 - e^2 = \frac{tang^2 \gamma}{tang^2 \varphi} \quad , \quad e^2 = \frac{sin(\varphi - \gamma)}{sin\, \varphi\, cos\, \gamma}$$

$$W^2 = 1 - e^2 sin^2 \varphi = 1 - sin(\varphi - \gamma) \frac{sin\, \varphi}{cos\, \gamma} = \frac{cos\, \varphi}{cos\, \gamma} cos(\varphi - \gamma)$$

also nach (d):

$$C^2 = \frac{a^2 cos\, \varphi}{cos\, \gamma\, cos(\varphi - \gamma)} \tag{e}$$

Mit diesen Formeln (c)—(e) hat man genügende Mittel zur scharfen Ausrechnung von C und γ, indessen häufiger braucht man Näherungsformeln, welche mit Beschränkung auf e^2, d. h. Vernachlässigung von e^4 u. s. w. sich rasch geben. Aus (c) hat man:

$$tang\, \varphi - tang\, \gamma = e^2 tang\, \varphi$$

$$\frac{\varphi - \psi}{cos^2 \varphi} = e^2 tang\, \varphi \quad , \quad \varphi - \psi = e^2 sin\, \varphi\, cos\, \varphi$$

oder mit Zusetzung von ϱ:

$$\varphi - \psi = \frac{1}{2} e^2 \varrho\, sin\, 2\varphi = [2.8378056]\, sin\, 2\varphi \tag{f}$$

Mit gleicher Näherung hat man aus (c):

$$C^2 = \frac{a^2}{W^2}(cos^2 \varphi + (1 - 2e^2) sin^2 \varphi) = \frac{a^2}{W^2}(1 - 2e^2 sin^2 \varphi)$$

Da $W^2 = 1 - e^2 sin^2 \varphi$ oder $1 : W^2 = 1 + e^2 sin^2 \varphi$, hat man:

$$C^2 = a^2 (1 - e^2 sin^2 \varphi) = a^2 W^2$$

$$C = a \left(1 - \frac{e^2}{2} sin^2 \varphi\right) \tag{g}$$

Die Formeln (f) und (g) braucht man z. B. zur Reduktion von Monddistanzen.

Genaue Tafeln für $log \frac{C}{a}$ und für $\varphi - \psi$ sind von Encke in dem „Berliner astronomischen Jahrbuche für 1882“, S. 344—373 gegeben worden. In der Geodäsie werden diese Werte fast nie gebraucht.

Reduzierte Breite. In der Geodäsie spielt noch ein anderer Winkel eine wichtige Rolle, der „reduzierte Breite“ genannt wird und bestimmt wird durch die Gleichung:

$$tang\, \psi = \sqrt{1 - e^2}\, tang\, \varphi$$

Damit werden wir uns aber erst später zu beschäftigen haben.

§ 33. Krümmungs-Halbmesser für beliebiges Azimut.

Nachdem der Meridian-Krümmungs-Halbmesser M und der Querkrümmungs-Halbmesser N bestimmt sind, kann man auch den Krümmungs-Halbmesser R für irgend welches Azimut α leicht angeben, wenn man den Eulerschen Satz als bekannt voraussetzt, nämlich:

$$\frac{1}{R} = \frac{cos^2 \alpha}{M} + \frac{sin^2 \alpha}{N} \tag{1}$$

Dieser Satz wird in der analytischen Geometrie bewiesen, und wir wollen hier eine geometrisch anschauliche Begründung des Satzes geben, welche durch einige Nebenbetrachtungen auch zum strengen Beweise entwickelt werden kann.

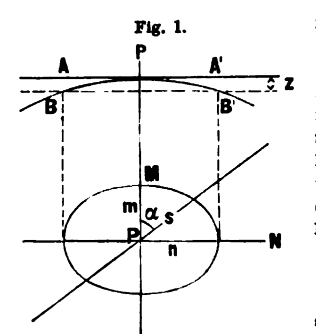


Fig. 1.

In Fig. 1. sei P ein Punkt des Ellipsoids mit einer Berührungs-Ebene $A\,A'$ und einer Schnitt-Ebene $B\,B'$ parallel $A\,A'$.

Die Ebene $B\,B'$ giebt eine Schnitt-Ellipse, welche im unteren Teile von Fig. 1. dargestellt ist mit ihren Hauptaxen $P\,M$, $P\,N$ und einer dritten Richtung s im Azimute α. Wenn nun der Abstand der beiden Ebenen $A\,A'$ und $B\,B'$ sehr klein ist, $= z$, so lässt sich die Ordinate z durch die Krümmungs-Halbmesser M, R, N, welche für die drei betrachteten Richtungen gelten, dreifach ausdrücken, in bekannter Näherung (welche z. B. auch für die Erdkrümmung bei trigonometrischer Höhenmessung angewendet wird), nämlich:

$$z = \frac{m^2}{2\,M} = \frac{s^2}{2\,R} = \frac{n^2}{2\,N} \tag{2}$$

Dabei besteht für die Schnitt-Ellipse mit den Halbaxen m und n die Gleichung:

$$\frac{(s\cos\alpha)^2}{m^2} + \frac{(s\sin\alpha)^2}{n^2} = 1 \tag{3}$$

Durch Verbindung von (2) und (3) erhält man den bereits oben (1) geschriebenen Eulerschen Satz.

Um diesen für jede beliebige Fläche giltigen Euler schen Satz der Gleichung (1) auf unser Ellipsoid anzuwenden, müssen wir die Ausdrücke für M und N nach (21) und (22) § 32. S. 197 einsetzen, nämlich:

$$M = \frac{c}{V^3} \quad \text{und} \quad N = \frac{c}{V}, \text{ wobei } V^2 = 1 + e'^2 \cos^2\varphi$$

Damit giebt (1):

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{c}\,V^3 + \frac{\sin^2\alpha}{c}\,V = \frac{V}{c}\left(\cos^2\alpha\,(1 + e'^2\cos^2\varphi) + \sin^2\alpha\right)$$

$$R = \frac{c}{V}\,\frac{1}{1 + e'^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha} \quad \text{oder} \quad = \frac{N}{1 + e'^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha} \tag{4}$$

Wir wollen den besonderen Fall mit $\alpha = 45°$ betrachten, also $\sin^2\alpha = \cos^2\alpha = \frac{1}{2}$ setzen, wodurch die Gleichung (1) giebt:

$$\frac{1}{R_{45}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right) = \frac{M + N}{2\,M\,N} \tag{5}$$

Hier hat $M\,N$ die Bedeutung $= r^2$ nach (24) § 32. S. 197 mit r als geometrischem Mittel aus M und N, und $\frac{M+N}{2} = d$ ist das arithmetische Mittel aus M und N also

$$R_{45} = \frac{r^2}{d} \tag{6}$$

woraus zu ersehen ist, dass in erster Näherung der Krümmungs-Halbmesser für 45° Azimut, dem mittleren Krümmungs-Halbmesser r, oder dem Durchschnittswert d gleich ist.

Die zweite bei (4) angewendete Form für R führt zu einer bequemen logarithmischen Näherungs-Formel; in erster Näherung hat man:

$$\log\,(1 + e'^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha) = \mu\,e'^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha + \ldots$$

also:

$$\log R - \log N = -\mu\,e'^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha + \ldots \tag{7}$$



Setzt man hier $\alpha = 0$, so geht R in den Meridian-Krümmungs-Halbmesser M über, also:

$$\log M - \log N = -\mu e'^2 \cos^2 \varphi + \ldots \tag{8}$$

oder genau $\log M - \log N = -\log V^2$ (nach (25) § 32 S. 197)

Damit geben (7) und (8):

$$\log R - \log N = -(\log V^2) \cos^2 \alpha \tag{9}$$

und in gleicher Weise findet man auch:

$$\log R - \log M = +(\log V^2) \sin^2 \alpha \tag{10}$$

Die Näherungsformel (9) oder (10) giebt den Wert $\log R$ nahezu auf 7 Stellen richtig. Um dieses besser beurteilen zu können, entwickeln wir die Formel (4) bis e'^4 und finden:

$$\left.\begin{aligned} \log R &= \log N - \mu e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + \mu \frac{e'^4}{2} \cos^4 \varphi \cos^4 \alpha \\ &= \log N - [4{\cdot}465\,1031] \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + [1{\cdot}99139] \cos^4 \varphi \cos^4 \alpha \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

wo die Zahlen in eckigen Klammern Coëfficienten-Logarithmen bedeuten.

Man kann dieses auch auf folgende Form bringen:

$$\log R = \log N - \cos^2 \alpha (\log V^2) - \frac{\mu e'^4}{2} \cos^4 \varphi \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \tag{12}$$

oder

$$\log R = \log M + \sin^2 \alpha (\log V^2) - \frac{\mu e'^4}{2} \cos^4 \varphi \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \tag{13}$$

Nach diesen Formeln (11)—(13) ist die folgende Tafel berechnet worden, welche $\log R$ für verschiedene Breiten φ und verschiedene Azimute α giebt.

Breite	Azimut α						
φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
	$\log R$	$\log R$	$\log R$	$\log R$	$\log R$	$\log R$	$\log R$
0°	6.80 1735	6 80 1929	6.80 2460	6.80 3187	6.80 3915	6 80 4448	6.80 4643
10°	1866	2055	2570	3274	3980	4498	4687
20°	2244	2416	2885	3527	4169	4641	4813
30°	2823	2969	3368	3913	4459	4860	5006
35°	6.80 3167	6.80 3298	6.80 3655	6.80 4143	6.80 4632	6.80 4990	6.80 5121
40°	3534	3648	3961	4388	4815	5128	5243
45°	3913	4010	4276	4641	5006	5272	5369
50°	4292	4372	4592	4893	5194	5415	5496
55°	4659	4723	4899	5138	5378	5554	5618
60°	5004	5053	5186	5369	5551	5684	5733
65°	5316	5353	5446	5577	5707	5803	5837
70°	6.80 5586	6.80 5609	6.80 5671	6.80 5756	6.80 5842	6.80 5904	6.80 5927
80°	5966	5972	5988	6010	6032	6048	6054
90°	6098	6098	6098	6098	6098	6098	6098

Eine ausführlichere Tafel dieser Art ist nicht nötig, denn die azimutalen Krümmungs-Halbmesser R spielen in der Geodäsie der Triangulierungen u. dergl. in dieser Form keine Rolle.

Für scharfe Rechnung trigonometrischer Höhen braucht man diese Krümmungs-

Halbmesser. Wir wollen annehmen, zu einer trigonometrischen Höhenmessung zwischen dem Polytechnikum in Karlsruhe und dem trigonometrischen Punkte Hornisgrinde im Schwarzwald solle der Erdkrümmungs-Halbmesser in der fraglichen Sicht berechnet werden. Die Mittelbreite beider Punkte ist $\varphi = 48° 48' 26,6''$ und das mittlere Azimut $\alpha = 18° 55' 3,0''$. Mit diesen Werten findet man nach der strengen Formel (4):

$$log\ R = 6{\cdot}804\,3345$$

und nach der Näherungsformel (9) oder (10):

$$log\ R = 6{\cdot}804\,3347$$

Dieser Wert wäre einer weiteren Berechnung nach § 149. unseres II. Bandes, 4. Aufl. 1893, zu Grunde zu legen, entsprechend $log\ R$ in (6) S. 510 jenes Bandes.

Änderung der Erdkrümmung nach Breite und Azimut.

Wenn man das vorstehende Übersichtstäfelchen in Bezug auf die Änderungen betrachtet, welche der Krümmungs-Halbmesser R in der Breite und im Azimut erfährt, so bemerkt man, dass für gleiche Änderungen $\Delta\, \varphi$ oder $\Delta\, \alpha$ die Änderungen $\Delta\, log\, R$ von nahe gleicher Grössenordnung sind, und das zeigt auch die Differentiierung von $log\, R$ oder von R nach φ und nach α, die beiden Differentiierungen von R nach φ und nach α geben Grössen von der Ordnung e'^2.

Allein wenn man überlegt, welche Änderungen von R überhaupt vorkommen auf einem räumlich begrenzten Vermessungsgebiete der Erde, so wird die Vergleichung der Einflüsse von φ und α ganz anders, denn auf beschränktem Gebiete der Erde ist die Breite φ nahezu konstant, dagegen trotzdem das Azimut α innerhalb seiner äussersten Grenzen 0° und 90° veränderlich.

Auf beschränktem Vermessungsgebiete sind daher die Änderungen im Azimut viel einflussreicher als die Änderungen der Breite, und man kann in solchem Falle sagen, dass die Erdkrümmungsänderungen, welche von Breitenänderung $\Delta\, \varphi$ herrühren, nur Grössen zweiter Ordnung sind im Vergleich mit den vom Azimut α abhängigen Krümmungs-Änderungen.

Zwischen-Bemerkung.

Mit den Entwicklungen von § 31.—33. sind wir so weit gekommen, dass alsbald zu § 40. u. ff. sphärische Triangulierung übergegangen werden kann, und von allem bisherigen wird dort zunächst nur der mittlere Krümmungs-Halbmesser gebraucht werden. Es ist für erstes Studium zu raten, von § 33. auf § 40. überzugehen.

Wenn hier anders verfahren und noch § 34.—39. eingeschaltet werden, so hat das den Sinn, dass vieles für weitergehende Zwecke Nötige hier ein für allemal erledigt werden soll; auf Einzelnes, z. B. Meridianbögen § 35., welche später zu Coordinaten gebraucht werden, kann nach Bedarf zurückgegriffen werden, ähnlich ist es mit den Parallelbögen und Oberflächen.

Bei den geodätischen Messungen und Berechnungen im engeren Sinne hat man kein Bedürfnis, die Oberflächen einzelner Zonen oder Gradabteilungen des Ellipsoids zu kennen; jedoch besteht für Kartographie und Geographie im allgemeinen ein solches Bedürfnis, weshalb auch die Flächenberechnung der Gradabteilungs-Trapeze in § 37. angeschlossen wurde. Auch auf die sehr wichtigen Hilfstafeln des Anhangs, deren Berechnung in den nachfolgenden Paragraphen gelehrt wird, wird später nach Bedarf zurückverwiesen.

§ 34. Die Funktionen W und V.

Bei der Entwicklung der Krümmungs-Halbmesser in § 32. sind die zwei Funktionen aufgetreten:

$$W = \sqrt{1 - e^2\, sin^2\, \varphi} \qquad V = \sqrt{1 + e'^2\, cos^2\, \varphi} \tag{1}$$

welche unter sich in der Beziehung stehen:

$$\frac{W^2}{1-e^2} = V^2 \qquad \text{oder} \qquad W^2 = \frac{V^2}{1+e'^2} \tag{2}$$

wobei

$$-\log(1-e^2) = \log(1+e'^2) = 0.002\,9088 \cdot 596004$$

$$-\log\sqrt{1-e^2} = \log\sqrt{1+e'^2} = 0.001\,4541 \cdot 798002$$

Diese Funktionen werden so oft in der Geodäsie gebraucht, dass wir sie näher betrachten und namentlich in Reihen entwickeln müssen.

Zur Reihenentwicklung haben wir von (1):

$$W^2 = 1 - e^2 \sin^2\varphi$$

also nach der logarithmischen Reihe (S. 169):

$$\log\frac{1}{W^2} = \mu\, e^2 \sin^2\varphi + \frac{\mu e^4}{2}\sin^4\varphi + \frac{\mu e^6}{3}\sin^6\varphi + \frac{\mu e^8}{4}\sin^8\varphi + \frac{\mu e^{10}}{5}\sin^{10}\varphi + \ldots \tag{3}$$

Die Ausrechnung der Coëfficienten mit dem Besselschen $\log e^2 = 7.824\,4104 \cdot 237$ giebt für Einheiten der 7ten Logarithmenstelle:

$$\log\frac{1}{W^2} = \left.\begin{aligned} &28986 \cdot 430302 \sin^2\varphi + 96 \cdot 733122 \sin^4\varphi + 0 \cdot 430422 \sin^6\varphi \\ &\qquad + 0 \cdot 002155 \sin^8\varphi + 0 \cdot 000012 \sin^{10}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

oder mit halben Coëfficienten:

$$\log\frac{1}{W} = \left.\begin{aligned} &14493 \cdot 215151 \sin^2\varphi + 48 \cdot 366556 \sin^4\varphi + 0 \cdot 215211 \sin^6\varphi \\ &\qquad + 0 \cdot 001077 \sin^8\varphi + 0 \cdot 000006 \sin^{10}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Dieselben Reihen mit den Logarithmen der Coëfficienten sind:

$$\log\frac{1}{W^2} = \left.\begin{aligned} &[4.462\,1947 \cdot 350] \sin^2\varphi + [1.985\,5751 \cdot 590] \sin^4\varphi + [9.633\,8943 \cdot 3] \sin^6\varphi \\ &\qquad + [7.333\,3660] \sin^8\varphi + [5.06087] \sin^{10}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Durch Halbierung der Coëfficienten hat man auch:

$$\log\frac{1}{W} = \left.\begin{aligned} &[4.161\,1647 \cdot 393] \sin^2\varphi + [1.684\,5451 \cdot 633] \sin^4\varphi + [9.332\,8643 \cdot 3] \sin^6\varphi \\ &\qquad + [7.032\,3360] \sin^8\varphi + [4.75984] \sin^{10}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

In gleicher Weise hat man auch die andere Funktion:

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2\varphi$$

$$\log V^2 = \mu\, e'^2 \cos^2\varphi - \frac{\mu\, e'^4}{2}\cos^4\varphi + \frac{\mu\, e'^6}{3}\cos^6\varphi + \frac{\mu\, e'^8}{4}\cos^8\varphi + \frac{\mu\, e'^{10}}{5}\cos^{10}\varphi - \ldots \tag{8}$$

Wenn man hier $\log e'^2 = 7.827\,3187 \cdot 833$ einsetzt, so erhält man:

$$\log V^2 = \left.\begin{aligned} &29\,181 \cdot 196469 \cos^2\varphi - 98 \cdot 0374220 \cos^4\varphi + 0 \cdot 4391567 \cos^6\varphi \\ &\qquad - 0 \cdot 0022131 \cos^8\varphi + 0 \cdot 0000119 \cos^{10}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\log V = \left.\begin{aligned} &14\,590 \cdot 098235 \cos^2\varphi - 49 \cdot 0187110 \cos^4\varphi + 0 \cdot 2195783 \cos^6\varphi \\ &\qquad - 0 \cdot 001\,1065 \cos^8\varphi + 0 \cdot 0000059 \cos^8\varphi \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Ferner wieder mit den Logarithmen der Coëfficienten:

$$\log V^2 = \left.\begin{aligned} &[4.465\,1030 \cdot 946] \cos^2\varphi - [1.991\,3918 \cdot 822] \cos^4\varphi + [9.642\,6194 \cdot 1] \cos^6\varphi \\ &\qquad - [7.344\,9995] \cos^6\varphi - [5.07541] \cos^{10}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\log V = \left.\begin{aligned} &[4.164\,0730 \cdot 989] \cos^2\varphi - [1.690\,3618 \cdot 865] \cos^4\varphi + [9.341\,5894 \cdot 2] \cos^6\varphi \\ &\qquad - [7.043\,9695] \cos^8\varphi + [4.77438] \cos^{10}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Wenn man bei $log\, W^2$ den Grenzwert $\varphi = 90°$ und bei $log\, V^2$ den Grenzwert $\varphi = 0$ setzt, so bekommt man $log\,(1 - e^2)$ und $log\,(1 + e'^2)$ welche, schon bei anderer Gelegenheit in § 31. S. 192 angegeben sind.

Für $\varphi = 45°$ geben die Reihen (5) und (10):

$$\left.\begin{aligned} -log\, W &= 7246{\cdot}607576 + 12{\cdot}091639 + 0{\cdot}026901 + 0.000067 = 7258{\cdot}726183 \\ log\, V &= 7295{\cdot}299117 - 12{\cdot}254678 + 0{\cdot}027447 - 0.000069 = 7283{\cdot}071817 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad log\, V : W = 14541{\cdot}798000 \\ & \qquad\qquad\qquad \text{Nach § 31. S. 193 soll dieses sein} = 14541{\cdot}798002 \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Die Probe stimmt auf 0·000002, d. h. auf 2 Einheiten der 13ten Logarithmenstelle, was hier befriedigend ist.

Da die V und W unter sich in der einfachen Beziehung stehen $V^2 = W^2(1 + e'^2)$, hat man die Wahl V oder W zu rechnen und das andere daraus abzuleiten. Diese Wahl stellt sich bei den vorstehenden Reihen so, dass für kleine Werte φ man bequemer $log\, W$ rechnet, zu welchem man am Anfang des Quadranten nur sehr wenige Glieder braucht, während in der Gegend von $\varphi = 90°$ die Rechnung mit $log\, V$ die bequemere ist; bei $\varphi = 45°$ sind beide Rechnungen gleich gut.

Man kann die Reihen für $log\, W$ und $log\, V$ auch noch auf eine andere Form bringen, indem man die $sin^2\varphi$, $cos^2\varphi$ u. s. w. in $cos\, 2\varphi$, $cos\, 4\varphi$ u. s. w. ausdrückt, wozu die Formeln von § 29. S. 176—177 dienen, nämlich:

$$log\, W^2 = -\mu e^2 sin^2\varphi - \frac{\mu e^4}{2} sin^4\varphi - \frac{\mu e^6}{3} sin^6\varphi - \frac{\mu e^8}{4} sin^8\varphi - \frac{\mu e^{10}}{5} sin^{10}\varphi$$

$$sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} cos\, 2\varphi$$

$$sin^4\varphi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} cos\, 2\varphi + \frac{1}{8} cos\, 4\varphi$$

$$sin^6\varphi = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} cos\, 2\varphi + \frac{3}{16} cos\, 4\varphi - \frac{1}{32} cos\, 6\varphi$$

$$sin^8\varphi = \frac{35}{128} - \frac{7}{16} cos\, 2\varphi + \frac{7}{32} cos\, 4\varphi - \frac{1}{16} cos\, 6\varphi + \frac{1}{128} cos\, 8\varphi$$

$$sin^{10}\varphi = \frac{63}{256} - \frac{105}{256} cos\, 2\varphi + \frac{15}{64} cos\, 4\varphi - \frac{45}{512} cos\, 6\varphi + \frac{5}{256} cos\, 8\varphi - \frac{1}{512} cos\, 10\varphi$$

Diese $sin^2\varphi$, $sin^4\varphi$ u. s. w. in die Reihe $log\, W^2$ eingesetzt geben:

$$\begin{aligned} log\, W^2 = &-\left(\frac{1}{2}\mu e^2 + \frac{3}{16}\mu e^4 + \frac{5}{48}\mu e^6 + \frac{35}{512}\mu e^8 + \frac{63}{1280}\mu e^{10}\right) \\ &+\left(\frac{1}{2}\mu e^2 + \frac{1}{4}\mu e^4 + \frac{5}{32}\mu e^6 + \frac{7}{64}\mu e^8 + \frac{21}{256}\mu e^{10}\right) cos\, 2\varphi \\ &-\left(\frac{1}{16}\mu e^4 + \frac{1}{16}\mu e^6 + \frac{7}{128}\mu e^8 + \frac{3}{64}\mu e^{10}\right) cos^4\varphi \\ &+\left(\frac{1}{96}\mu e^6 + \frac{1}{64}\mu e^8 + \frac{9}{512}\mu e^{10}\right) cos\, 6\varphi \\ &-\left(\frac{1}{512}\mu e^8 + \frac{1}{256}\mu e^{10} + \right) cos\, 8\varphi \\ &+\left(\frac{1}{2560}\mu e^{10}\right) cos\, 10\varphi \end{aligned} \quad (14)$$

Wenn man dieses mit dem Besselschen $\log e^2 = 7.8244104{\cdot}237$ ausrechnet (Benützung der $\log \mu e^n$ auf S. 193), so bekommt man in Einheiten der 7ten Logarithmenstelle:

$$\left.\begin{aligned} \log W^2 = &- 14529{\cdot}6251671 + 14541{\cdot}7844150 \cos 2\varphi - 12{\cdot}1728172 \cos 4\varphi \\ &+ 0{\cdot}0135864 \cos 6\varphi - 0{\cdot}0000170 \cos 8\varphi + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Dieselbe Entwicklung für $\log V^2$ gemacht giebt aus (8) und § 29. S. 177 das folgende:

$$\log V^2 = e'^2 \cos^2\varphi - \frac{e'^4}{2}\cos^4\varphi + \frac{e'^6}{3}\cos^6\varphi - \frac{e'^8}{4}\cos^8\varphi + \frac{e'^{10}}{5}\cos^{10}\varphi$$

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi$$

$$\cos^4\varphi = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi$$

$$\cos^6\varphi = \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos 2\varphi + \frac{3}{16}\cos 4\varphi + \frac{1}{32}\cos 6\varphi$$

$$\cos^8\varphi = \frac{35}{128} + \frac{7}{16}\cos 2\varphi + \frac{7}{32}\cos 4\varphi + \frac{1}{16}\cos 6\varphi + \frac{1}{128}\cos 8\varphi$$

$$\cos^{10}\varphi = \frac{63}{256} + \frac{105}{256}\cos 2\varphi + \frac{15}{64}\cos 4\varphi + \frac{45}{512}\cos 6\varphi + \frac{5}{256}\cos 8\varphi + \frac{1}{512}\cos 10\varphi$$

$$\begin{aligned} \log V^2 = &\left(\frac{1}{2}\mu e'^2 - \frac{3}{16}\mu e'^4 + \frac{5}{48}\mu e'^6 - \frac{35}{512}\mu e'^8 + \frac{63}{1280}\mu e'^{10}\right) \quad (16) \\ &+ \left(\frac{1}{2}\mu e'^2 - \frac{1}{4}\mu e'^4 + \frac{5}{32}\mu e'^6 - \frac{7}{64}\mu e'^8 + \frac{21}{256}\mu e'^{10}\right)\cos 2\varphi \\ &- \left(\frac{1}{16}\mu e'^4 - \frac{1}{16}\mu e'^6 + \frac{7}{128}\mu e'^8 - \frac{3}{64}\mu e'^{10}\right)\cos 4\varphi \\ &+ \left(\frac{1}{96}\mu e'^6 - \frac{1}{64}\mu e'^8 + \frac{9}{512}\mu e'^{10}\right)\cos 6\varphi \\ &- \left(\frac{1}{512}\mu e'^8 - \frac{1}{256}\mu e'^{10}\right)\cos 8\varphi \\ &+ \left(\frac{1}{2560}\mu e'^{10}\right)\cos 10\varphi \end{aligned}$$

Wenn man dieses mit dem Besselschen $\log e'^2 = 7.8278187{\cdot}833$ ausrechnet (Benützung der $\log \mu e'^n$ auf S. 193), so bekommt man:

$$\left.\begin{aligned} \log V^2 = &\ 14553{\cdot}9708333 + 14541{\cdot}7844155 \cos 2\varphi - 12{\cdot}1728170 \cos 4\varphi \\ &+ 0{\cdot}0135863 \cos 6\varphi - 0{\cdot}0000171 \cos 8\varphi + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Die Reihen (17) und (15) stimmen in den Coëfficienten hinreichend überein und die Absolutglieder geben $\log V^2 - \log W^2 = 29083{\cdot}5960004$ was mit $\log (1 + e'^2)$ nach S. 193 stimmt wie es sein muss.

Durch Halbierung der Coëfficienten hat man auch $\log W$ und $\log V$, nämlich zugleich ein wenig vermittelnd zwischen den Endziffern in (15) und (17):

$$\left.\begin{aligned} \log V = &\ 7276{\cdot}9854166 + 7270{\cdot}8922076 \cos 2\varphi - 6{\cdot}0864086 \cos 4\varphi \\ &+ 0{\cdot}0067932 \cos 6\varphi - 0{\cdot}0000085 \cos 8\varphi \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

und da man gewöhnlich logarithmisch rechnet, wollen wir auch noch die Coëfficienten-Logarithmen angeben:

$$\left.\begin{aligned} \log V^2 = &\ 14553{\cdot}9708333 + [4{\cdot}1626177{\cdot}018] \cos 2\varphi - [1{\cdot}0853911{\cdot}0] \cos 4\varphi \\ &+ [8{\cdot}1331028] \cos 6\varphi - [5.23172] \cos 8\varphi \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

$$\left.\begin{array}{l} log\, V = 7276{\cdot}9854166 + [3{\cdot}8615877{\cdot}062]\cos 2\varphi - [0.7843611{\cdot}0]\cos 4\varphi \\ \qquad + [7.8320728]\cos 6\varphi - [4.93069]\cos 8\varphi \end{array}\right\} \quad (20)$$

Um von der Mitte zu zählen, wollen wir noch setzen $\varphi = 45° + (\varphi - 45°)$ also:

$$\left.\begin{array}{l} log\, V = 7276{\cdot}9854166 - [3.8615877{\cdot}062]\sin 2(\varphi - 45°) + [0.7843611{\cdot}0] \\ \cos 4(\varphi - 45°) + [7.8320728]\sin 6(\varphi - 45°) - [4.93069]\cos 8(\varphi - 45°) \end{array}\right\} \quad (21)$$

Diese Form bietet den Vorteil, dass man damit in *einer* Rechnung stets die Bestandteile für zwei Werte φ erhält, welche gegen 45° symmetrisch liegen; z. B. $\varphi - 45° = +15°$ und $-15°$ geben $log\, V$ für $\varphi = 30°$ und für $\varphi = 60°$ das folgende:

$$\text{für } \varphi = 30° \quad log\, V = 7276{\cdot}9854166 + 3635{\cdot}4461038 + 3{\cdot}0432043 - 0{\cdot}0067932 + 0{\cdot}0000042$$

$$\text{für } \varphi = 60° \quad log\, V = 7276{\cdot}9854166 - 3635{\cdot}4461038 + 3{\cdot}0432043 + 0{\cdot}0067932 + 0{\cdot}0000042$$

zusammengefasst:

$$\text{für } \varphi = 30° \quad log\, V = 0.0010915{\cdot}4679357$$

$$\text{für } \varphi = 60° \quad log\, V = 0.0003644{\cdot}5893145$$

Diese Werte stimmen innerhalb 0·000001 mit den aus (7) oder (12) berechneten.

Interpolation für log V.

Wenn man eine Tafel der $log\, V$ aufstellen will, so wird man gewisse Hauptwerte, etwa für φ von 1° zu 1° unmittelbar nach den vorstehenden Formeln (7), (12) oder (20) berechnen, und im Übrigen weitere Werte einschalten. Wenn man nun bereits Näherungswerte der einzuschaltenden $log\, V$ kennt, was oft der Fall ist, so kann man zur schärferen Einschaltung eine gute Formel nach dem Prinzip des Mittelargumentes aufstellen in folgender Weise:

Ein Wert V gehöre zur Breite φ, ferner V'' zur Breite $\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}$ und V' zur Breite $\varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}$; dann werden nach der Maclaurin schen Reihe folgende zwei Gleichungen bestehen:

$$log\, V'' = log\, V + \frac{\Delta\varphi}{2}\frac{d\, log\, V}{d\varphi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2\frac{d^2 log\, V}{d\varphi^2} + \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^3\frac{d^3 log\, V}{d\varphi^3}$$

$$log\, V' = log\, V - \frac{\Delta\varphi}{2}\frac{d\, log\, V}{d\varphi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2\frac{d^2 log\, V}{d\varphi^2} + \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^3\frac{d^3 log\, V}{d\varphi^3}$$

Die Differenz giebt: $log\, V'' - log\, V' = \Delta\, log\, V$:

$$\Delta\, log\, V = \Delta\varphi\frac{d\, log\, V}{d\varphi} + \frac{\Delta\varphi^3}{24}\frac{d^3 log\, V}{d\varphi^3} \quad (22)$$

Zur Anwendung haben wir $log\, V$ dreimal abzuleiten, wobei nun künftig immer zur Abkürzung geschrieben werden soll $tang\,\varphi = t$ und

$$V^2 = 1 + e'^2\cos^2\varphi = 1 + \eta^2 \quad , \quad \text{also } \eta^2 = e'^2\cos^2\varphi \quad , \quad \frac{d\eta^2}{d\varphi} = -2\eta^2 t \quad (23)$$

$$V = \sqrt{1+\eta^2} \; , \; \frac{dV}{d\varphi} = \frac{1}{2}\frac{1}{V}(-2\eta^2 t) = -\frac{\eta^2 t}{V}$$

$$\frac{d\, log\, V}{d\varphi} = \frac{1}{V}\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{\eta^2 t}{V^2} \quad (24)$$

In dieser Behandlung werden die beiden nächsten Ableitungen:

$$\frac{d^2 \log V}{d\varphi^2} = \frac{\eta^2}{V^4}(-1 + t^2 - \eta^2 - \eta^2 t^2)$$

$$\frac{d^3 \log V}{d\varphi^3} = \frac{2\eta^2 t}{V^6}(2 + \eta^2 + 3\eta^2 t^2 - \eta^4 - \eta^4 t^2) \tag{25}$$

Die Ableitungen (24) und (25) hat man in (22) einzusetzen und zugleich wollen wir $\Delta\varphi = 10'$ nehmen, wofür mit $\varrho = 3437,7\ldots$ zu dividieren ist, und da auch noch mit $\mu = 0.43429\ldots$ zu multiplizieren ist, haben wir:

$$\Delta \log V = -\frac{\mu}{\varrho} 10 \frac{\eta^2 t}{V} + \frac{\mu\, 1000}{12\varrho^3}\frac{\eta^2 t}{V^6}(2 + \eta^2 + 3\eta^2 t - \eta^4 - \eta^4 t^2)$$

Da $\eta^2 = e'^2 \cos^2\varphi$, also $\eta^2 t = e'^2 \sin\varphi \cos\varphi$, so hat man, um alles Konstante zusammenzufassen, zugleich η^4 vernachlässigend:

$$\Delta \log V = -5\frac{\mu}{\varrho} e'^2 \frac{\sin 2\varphi}{V^2} + \frac{1000\,\mu\, e'^2}{24\varrho^3}\frac{\sin 2\varphi}{V^6}(2 + \eta^2 + 3\eta^2 t^2) \tag{26}$$

Die Ausrechnung giebt für Einheiten der 7ten Logarithmenstelle:

$$\Delta \log V = -[1.6277992{\cdot}161]\frac{\sin 2\varphi}{V^2} + [5.4760703]\frac{\sin 2\varphi}{V^6}(2 + \eta^2 + 3\eta^2 t^2) \tag{27}$$

Das zweite Glied macht sehr wenig aus, nämlich:

φ	2. Glied	φ	2. Glied
$\varphi = 10°$	= 0·0000 2015	$\varphi = 50°$	= 0·0000 5888
20°	3795	60°	5201
30°	5133	70°	3874
40°	5862	80°	2063

Dieses Glied geht also erst in die 12te Logarithmenstelle ein und ergiebt sich von selbst als eine kleine innerhalb weiter Grenzen nahezu konstante Differenz zwischen den Summen von je 6 Zwischenwerten $\Delta \log V$ und dem Intervall zwischen zwei festen $\log V$, das sie ausfüllen sollen. Die V^2, welche man im ersten Gliede von (27) braucht, müssen dem Mittelargument φ entsprechen; in unserem Falle verfuhren wir dabei so, dass diejenigen $\log V^2$, welche schon in der vorhergehenden Auflage des Bandes 8stellig für alle Werte φ von 10′ zu 10′ ausgerechnet vorlagen, von 5′ zu 5′ eingeschaltet, die nötigen Näherungswerte zur Gleichung (27) lieferten, um Interpolation auf 12—13 Stellen genau zu geben; folgendes ist ein Beispiel hiefür:

	Differenzen		$\log V$	φ
$\varphi = 48°$			6522·92572	48° 0′
	42·07059 — 6 =	42·07053		
			6480·85519	48° 10′
	42·04425 — 6 =	42·04419		
			6438·81100	48° 20′
	42·01646 — 6 =	42·01640		
			6396·79460	48° 30′
	41·98728 — 6 =	41·98722		
			6354·80738	48° 40′
	41·95667 — 6 =	41·95661		
			6312·85077	48° 50′
	41·92464 — 6 =	41·92458		
$\varphi = 49°$			6270·92619	49° 0′
	251·99989 — 36 =	251·99953	251·99953	

Die Differenzen 42·07059 — 6 u. s. w. sind nach der Formel (27) berechnet, 6 ist das zweite Glied, im vorstehenden Beispiel abgerundet, (in Wirklichkeit wurde mit einer Stelle mehr gerechnet).

In dieser Weise wurde unsere Tafel der Werte *log* V, welche im Anhang auf Seite [2]—[7] gegeben ist, berechnet mit 12—13 Stellen und nachher auf 10 Stellen abgerundet.

Die Ableitungen von V nach φ.

Auch die Ableitungen der Funktion V werden später noch oft gebraucht werden, weshalb wir sie zum Vorrat hier hersetzen, auch mit Einführung fester Zeichen:

$$tang\,\varphi = t \qquad \frac{d\,t}{d\,\varphi} = 1 + t^2 \tag{a}$$

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2\varphi = 1 + \eta^2 \quad \text{also} \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2\varphi \tag{b}$$

$$\frac{d\,\eta^2}{d\,\varphi} = -2\,e'^2 \cos\varphi \sin\varphi = -2\,\eta^2\,t \tag{c}$$

und allgemeiner
$$\frac{d\,\eta^n}{d\,\varphi} = -n\,\eta^n\,t \tag{d}$$

$$\frac{d\,V}{d\,\varphi} = \frac{1}{2\,V}\frac{d\,\eta^2}{d\,\varphi} = -\frac{\eta^2\,t}{V} \tag{e}$$

$$\frac{d^2\,V}{d\,\varphi^2} = -\left(\frac{d\,\eta^2}{d\,\varphi}\frac{t}{V} + \frac{\eta^2}{V}\frac{d\,t}{d\,\varphi} - \frac{\eta^2\,t}{2\,V}\frac{d\,V}{d\,\varphi}\right)$$

$$\frac{d^2\,V}{d\,\varphi^2} = +\frac{2\,\eta^2\,t^2}{V} - \frac{\eta^2}{V}(1 + t^2) - \frac{\eta^4\,t^2}{V^3}$$

Wenn man hier alles auf den Nenner V^3 bringt, und berücksichtigt, dass $V^2 = 1 + \eta^2$ ist, so bekommt man:

$$\frac{d^2\,V}{d\,\varphi^2} = -\frac{\eta^2}{V^3}(1 - t^2 + \eta^2) \tag{f}$$

Wenn man in diesen Formen weiter differentiiert, so bekommt man:

$$\frac{d^3\,V}{d\,\varphi^3} = \frac{\eta^2\,t}{V^5}(4 + 5\,\eta^2 + 3\,\eta^2\,t^2 + \eta^4) \tag{g}$$

$$\frac{d^4\,V}{d\,\varphi^3} = \frac{\eta^2}{V^7}(4 - 4\,t^2 + 9\,\eta^2 + 10\,\eta^2\,t^2 - 3\,\eta^2\,t^4 + 6\,\eta^4 + 14\,\eta^4\,t^2 + 12\,\eta^4\,t^4 + \eta^6) \tag{h}$$

Mit Hilfe dieser Ableitungen kann man auch V von einer Breite φ auf eine benachbarte Breite reduzieren, denn man hat nach dem Taylor schen Satze für eine Breite φ' einen Werth V' entsprechend folgender Reihe:

$$V' = V - \frac{(\varphi' - \varphi)\,\eta^2\,t}{V} - \frac{(\varphi' - \varphi)^2}{2}\frac{\eta^2}{V^3}(1 - t^2 + \eta^2) + \ldots \tag{i}$$

oder
$$V' = V\left(1 - \frac{(\varphi' - \varphi)\,\eta^2\,t}{V^2} + (\varphi' - \varphi)^2 \ldots\right) \tag{k}$$

Damit hat man auch die Reduktion der Krümmungs-Halbmesser von einer auf die andere Breite, z. B.:

$$N = \frac{c}{V} \qquad N' = \frac{c}{V'}$$

$$\frac{N}{N'} = \frac{V'}{V} = 1 - \frac{(\varphi' - \varphi)}{V^2}\,\eta^2\,t + (\varphi' - \varphi)^2 \ldots \tag{l}$$

Später wird davon mehrfach Gebrauch gemacht werden.

§ 35. Meridianbogenlängen.

Der Meridian-Krümmungs-Halbmesser in der Breite φ ist nach (17) und (21) § 32.:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3} \quad \text{oder} \quad M = \frac{c}{V^3} \tag{1}$$

Ein unendlich kleiner Meridianbogen für die Breitendifferenz $d\varphi$ ist daher $= M\,d\varphi$ und der ganze Meridianbogen vom Äquator mit $\varphi = 0$ bis zur Breite φ ist

$$B = \int_0^\varphi M\,d\varphi = a(1-e^2)\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} \quad \text{oder} = c\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1+e'^2\cos^2\varphi)^3}} \tag{2}$$

Dieses ist ein elliptisches Integral zweiter Gattung; davon ist jedoch bei der Rektifikation für geodätische Zwecke nicht die Rede, indem hier Reihenentwicklungen angewendet werden, die nach Umständen bei weniger oder mehr Gliedern abgebrochen werden.

I. Integration nur bis e^2 einschliesslich, mit a und e^2.

Wenn man nur bis e^2 einschliesslich entwickeln will, so schreibt man die zu integrierende Funktion (2) kurz so:

$$\frac{1}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = (1-e^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}e^2\sin^2\varphi + e^4\ldots \tag{3}$$

Hier ist nach bekannter goniometrischer Formel:

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi \tag{4}$$

und das Integral:

$$\int \cos 2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi \tag{5}$$

Damit wird das allgemeine Integral in (2):

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} = \left(1+\frac{3}{4}e^2\right)\varphi - \frac{3}{8}e^2\sin 2\varphi + \ldots \tag{6}$$

Das bestimmte Integral zwischen den Grenzen φ_1 und φ_2 ist daher:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \ldots d\varphi = \left(1+\frac{3}{4}e^2\right)(\varphi_2-\varphi_1) - \frac{3}{8}e^2(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)$$

oder im zweiten Gliede goniometrisch umgewandelt:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \ldots d\varphi = \left(1+\frac{3}{4}e^2\right)(\varphi_2-\varphi_1) - \frac{3}{4}e^2\sin(\varphi_2-\varphi_1)\cos(\varphi_2+\varphi_1) \tag{7}$$

folglich der Meridianbogen m selbst zwischen den Grenzen φ_1 und φ_2 nach (2) und (7):

$$m = a(1-e^2)\left(\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)(\varphi_2-\varphi_1) - \frac{3}{4}e^2\sin(\varphi_2-\varphi_1)\cos(\varphi_2+\varphi_1)\right) \tag{8}$$

Wenn man hier die Sinus-Reihe anwendet, nämlich nur deren zwei erste Glieder:

$$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)^3}{6} + \dots$$

so erhält man durch Einsetzen dieser Glieder in die vorhergehende (8):

$$m = a(\varphi_2 - \varphi_1)(1 - e^2)\left(1 + \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{4}e^2 \cos(\varphi_2 + \varphi_1) + \frac{1}{8}e^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2 \cos(\varphi_2 + \varphi_1)\right) \quad (9)$$

Obgleich in diesem Ausdrucke alle Glieder von der Ordnung e^4 und darüber vernachlässigt sind, kann man doch zu vielen Zwecken davon Gebrauch machen; ja man kann noch mit einem kleinen weiteren Opfer an Genauigkeit einen sehr praktischen Satz ableiten, der sich auf den Meridian-Krümmungs-Halbmesser der *Mittel*breite $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ bezieht. Dieser Meridian-Krümmungs-Halbmesser ist nach (1):

$$M' = \frac{a(1 - e^2)}{\left(1 - e^2 \sin^2 \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

dieses ebenfalls bis auf e^2 einschliesslich entwickelt, giebt:

$$M' = a(1 - e^2)\left(1 + \frac{3}{2}e^2 \sin^2 \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

und mit Anwendung der goniometrischen Formel (4) für $\sin^2 \varphi$:

$$M' = a(1 - e^2)\left(1 + \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{4}e^2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

Nimmt man nun diesen Krümmungs-Halbmesser M' als *Kreisbogen*-Halbmesser zu einem Centriwinkel $\varphi_2 - \varphi_1$, so erhält man einen entsprechenden Meridianbogen:

$$m' = M'(\varphi_2 - \varphi_1) = a(\varphi_2 - \varphi_1)(1 - e^2)\left(\left(1 + \frac{3}{4}e^2\right) - \frac{3}{4}e^2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)\right) \quad (10)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem früheren (9), so findet man in den ersten Gliedern völlige Übereinstimmung, man hat also auch sofort im zweiten Teil die Differenz:

$$m' - m = -a(\varphi_2 - \varphi_1)(1 - e^2)\frac{e^2}{8}(\varphi_2 - \varphi_1)^2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

oder genähert, zugleich mit Zufügung des nötigen ϱ:

$$m' - m = -a\frac{e^2}{8}\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varrho}\right)^3 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (11)$$

Dieses ist der Fehler, der begangen wird, wenn man, nach (10), einen Ellipsen-Meridian-Bogen als Kreisbogen behandelt, dessen Halbmesser der Meridian-Krümmungs-Halbmesser für die Mittelbreite $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ ist.

Zunächst sieht man aus (11), dass der Fehler $m' - m$ verschwindet, wenn $\varphi_1 + \varphi_2 = 90°$, d. h. wenn die Mittelbreite $= 45°$ ist (vorbehältlich der vernachlässigten Glieder von der Ordnung e^4) u. s. w.

Im übrigen berechnet man nach (11) zur Übersicht, dass für $\varphi_2 - \varphi_1 = 1°$ und für $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = 30°$ oder $60°$ der Fehler $= -0{,}014^m$ oder $= +0{,}014^m$ wird und

äussersten Falls mit $\varphi = 0°$ oder $\varphi = 90°$ bringt der Fehler für $\varphi_2 - \varphi_1 = 1°$ nur $-0{,}028^m$ oder $+0{,}028^m$. Man kann daher kurz sagen, dass in den Breiten von Mitteleuropa ein Meridianbogen von 1° Ausdehnung nach dem Näherungsverfahren von M für die Mittelbreite, innerhalb 1^{cm} genügend ist. Wir werden am Schlusse dieses Paragraphen nochmals darauf zurückkommen.

Integration bis e^{10}.

Man kann das im vorstehenden angewendete Verfahren beliebig weit fortsetzen; es besteht im allgemeinen darin, dass man die zu integrierende Funktion $(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}$ nach Potenzen von $e^2 \sin^2\varphi$ entwickelt und dann die Potenzen $\sin^2\varphi$, $\sin^4\varphi$, $\sin^6\varphi$ u. s. w. in $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$, $\cos 6\varphi$ u. s. w. ausdrückt und dadurch integrierbar macht.

Hiernach haben wir:

$$\frac{1}{W^3} = (1 - e^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2\varphi + \frac{3}{2}\,\frac{5}{4} e^4 \sin^4\varphi + \frac{3}{2}\,\frac{5}{4}\,\frac{7}{6} e^6 \sin^6\varphi$$
$$+ \frac{3}{2}\,\frac{5}{4}\,\frac{7}{6}\,\frac{9}{8} e^8 \sin^8\varphi + \frac{3}{2}\,\frac{5}{4}\,\frac{7}{6}\,\frac{9}{8}\,\frac{11}{10} e^{10} \sin^{10}\varphi + \ldots$$

$$\frac{1}{W^3} = 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2\varphi + \frac{15}{8} e^4 \sin^4\varphi + \frac{35}{16} e^6 \sin^6\varphi + \frac{315}{128} e^8 \sin^8\varphi + \frac{693}{256} e^{10} \sin^{10}\varphi \quad (12)$$

Nach § 29. S. 176—177 ist hier zu setzen:

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi$$
$$\sin^4\varphi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi$$
$$\sin^6\varphi = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2\varphi + \frac{3}{16} \cos 4\varphi - \frac{1}{32} \cos 6\varphi$$
$$\sin^8\varphi = \frac{35}{128} - \frac{7}{16} \cos 2\varphi + \frac{7}{32} \cos 4\varphi - \frac{1}{16} \cos 6\varphi + \frac{1}{128} \cos 8\varphi$$
$$\sin^{10}\varphi = \frac{63}{256} - \frac{105}{256} \cos 2\varphi + \frac{15}{64} \cos 4\varphi - \frac{45}{512} \cos 6\varphi + \frac{5}{256} \cos 8\varphi - \frac{1}{512} \cos 10\varphi$$

Setzt man diese Ausdrücke in (12) ein und ordnet nach $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$ u. s. w., so bekommt man:

$$\frac{1}{W^3} = A - B \cos 2\varphi + C \cos 4\varphi - D \cos 6\varphi + E \cos 8\varphi - F \cos 10\varphi \quad (13)$$

wobei die Coëfficienten A, B u. s. w. folgende Bedeutungen haben:

$$A = 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \frac{175}{256} e^6 + \frac{11025}{16384} e^8 + \frac{43659}{65536} e^{10} + \ldots$$
$$B = \frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4 + \frac{525}{512} e^6 + \frac{2205}{2048} e^8 + \frac{72765}{65536} e^{10} + \ldots$$
$$C = \frac{15}{64} e^4 + \frac{105}{256} e^6 + \frac{2205}{4096} e^8 + \frac{10395}{16384} e^{10} + \ldots$$
$$D = \frac{35}{512} e^6 + \frac{315}{2048} e^8 + \frac{31185}{131072} e^{10} + \ldots$$
$$E = \frac{315}{16384} e^8 + \frac{3465}{65536} e^{10} + \ldots$$
$$F = \frac{693}{131072} e^{10} + \ldots$$

Wenn man mit der Besselschen Excentricität nach § 31. S. 193 ($log\ e^2 =$ 7.824 4104·237) diese Werte ausrechnet, so findet man:

$$\left.\begin{array}{ll}
A = 1{,}00503\ 73060{,}48555 & log\ A = 0.002\ 1821{\cdot}827 \\
B = 0{,}00504\ 78492{,}40300 & log\ B = 4.504\ 8414{\cdot}798 \\
C = 0{,}00001\ 05637{,}86831 & log\ C = 5.023\ 8196{\cdot}289 \\
D = \qquad 206{,}33322 & log\ D = 2.314\ 5691{\cdot}6 \\
E = \qquad 0{,}38853 & log\ E = 9.589\ 4246 \\
F = \qquad 0{,}00070 & log\ F = 6.845\ 10
\end{array}\right\} \quad (14)$$

Der letzte Coëfficient F, welcher nur von e^{10} abhängt, wird verschwindend klein, aber in den übrigen Coëfficienten bringen die Glieder mit e^{10} doch noch kleine Beträge, welche die schliessliche Abrundung noch teilweise beeinflussen.

Indem man nun die Funktion (13) integriert, hat man:

$$\int cos\ 2\ \varphi = \frac{1}{2}\ sin\ 2\ \varphi \qquad \int cos\ 4\ \varphi = \frac{1}{4}\ cos\ 4\ \varphi \quad \text{u. s. w.}$$

also mit Zusetzung des Faktors $a\ (1-e^2)$ von (1) und (2) wird der Meridianbogen B vom Äquator bis zur Breite φ ausgedrückt durch die Reihe:

$$B = a(1-e^2)\left(\frac{A\ \varphi}{\varrho} - \frac{B}{2}\ sin\ 2\ \varphi + \frac{C}{4}\ sin\ 4\ \varphi - \frac{D}{6}\ sin\ 6\ \varphi + \frac{E}{8}\ sin\ 8\ \varphi - \frac{F}{10}\ sin\ 10\ \varphi\right) \quad (15)$$

Man hat mit den Coëfficienten (14) auszurechnen:

$$\left.\begin{array}{lll}
\dfrac{A\ a\ (1-e^2)}{\varrho^\circ} = & 111120{,}61962 & log = 5.045\ 7946{\cdot}544 \\
\dfrac{B}{2}\ a\ (1-e^2) = & 15988{,}63853 & log = 4.203\ 8114{\cdot}841 \\
\dfrac{C}{4}\ a\ (1-e^2) = & 16{,}72995\ 380 & log = 1.223\ 4947{\cdot}417 \\
\dfrac{D}{6}\ a\ (1-e^2) = & 0{,}02178\ 4772 & log = 8.338\ 1530{\cdot}1 \\
\dfrac{E}{8}\ a\ (1-e^2) = & 0{,}00003\ 07659 & log = 5.488\ 0696 \\
\dfrac{F}{10}\ a\ (1-e^2) = & 0{,}00000\ 00443{,}44 & log = 2.646\ 84
\end{array}\right\} \quad (16)$$

Anmerkung. Dieselbe Reihenentwicklung, in etwas anderer Form und ausgedehnt bis e^{12} findet sich in „Theorie der Projektionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung von Oscar Schreiber, Hannover 1866", S. 18. Es ist dort zur Vermeidung von Brüchen $e = 4\ \varepsilon$, oder $e^2 = 16\ \varepsilon^2$ gesetzt und der Faktor $(1-e^2)$ in den einzelnen Coëfficienten ausmultipliziert, wodurch die folgende unserer (15) entsprechende Formel entsteht:

$$\text{Meridianbogen } B = a\ (A\ \varphi - A_1\ sin\ 2\ \varphi + A_2\ sin\ 4\ \varphi - \ldots) \quad (15\text{a})$$

$$\begin{array}{rl}
A = & 1 - 4\ \varepsilon^2 - 12\ \varepsilon^4 - 80\ \varepsilon^6 - 700\ \varepsilon^8 - 7056\ \varepsilon^{10} - 77616\ \varepsilon^{12} \\
A_1 = & \quad 6\ \varepsilon^2 + 24\ \varepsilon^4 + 180\ \varepsilon^6 + 1680\ \varepsilon^8 + 17640\ \varepsilon^{10} + 199584\ \varepsilon^{12} \\
A_2 = & \qquad 15 \ldots + 180 \ldots + 2100\ \varepsilon + 25200 \ldots + 311850 \ldots \\
3\ A_3 = & \qquad\qquad + 160 \ldots + 2800 \ldots + 44100 \ldots + 646800 \ldots \\
2\ A_4 = & \qquad\qquad\qquad + 315 \ldots + 8820 \ldots + 174636 \ldots \\
10\ A_5 = & \qquad\qquad\qquad\qquad + 5540 \ldots + 199584 \ldots \\
A_6 = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 2002 \ldots
\end{array}$$

Integration bis e'^{10}.

Wir wollen die Coëfficienten (16) zunächst stehen lassen und die Integration nochmals von neuem beginnen in der zweiten Form mit c und e'^2; es wird dabei nochmals dasselbe herauskommen, wie auf dem ersten Wege, was als Probe erwünscht ist.

Nach der zweiten Form von (1) oder (2) haben wir zu behandeln:

$$\frac{1}{V^3} = (1+e'^2 \cos^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2} e'^2 \cos^2 \varphi + \frac{3}{2}\frac{5}{4} e'^4 \cos^4 \varphi - \frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{7}{6} e'^6 \cos^6 \varphi$$
$$+ \frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{7}{6}\frac{9}{8} e'^8 \cos^8 \varphi - \frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{7}{6}\frac{9}{8}\frac{11}{10} e'^{10} \cos^{10} \varphi$$

$$\frac{1}{V^3} = 1 - \frac{3}{2} e'^2 \cos^2 \varphi + \frac{15}{8} e'^4 \cos^4 \varphi - \frac{35}{16} e'^6 \cos^6 \varphi + \frac{315}{128} e'^8 \cos^8 \varphi - \frac{693}{256} e'^{10} \cos^{10} \varphi \quad (17)$$

Nach § 29. S. 177 hat man:

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi$$
$$\cos^4 \varphi = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi$$
$$\cos^6 \varphi = \frac{5}{16} + \frac{15}{32} \cos 2\varphi + \frac{3}{16} \cos 4\varphi + \frac{1}{32} \cos 6\varphi$$
$$\cos^8 \varphi = \frac{35}{128} + \frac{7}{16} \cos 2\varphi + \frac{7}{32} \cos 4\varphi + \frac{1}{16} \cos 6\varphi + \frac{1}{128} \cos 8\varphi$$
$$\cos^{10} \varphi = \frac{63}{256} + \frac{105}{256} \cos 2\varphi + \frac{15}{64} \cos 4\varphi + \frac{45}{512} \cos 6\varphi + \frac{5}{256} \cos 8\varphi + \frac{1}{512} \cos 10\varphi$$

Wenn man diese Ausdrücke in (17) einsetzt, und nach $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$ u. s. w. ordnet, so bekommt man:

$$\frac{1}{V^3} = A' - B' \cos 2\varphi + C' \cos 4\varphi - D' \cos 6\varphi - E' \cos 8\varphi - F' \cos 10\varphi \quad (18)$$

wobei die Coëfficienten A', B' u. s. w. folgende Bedeutungen haben:

$$A' = 1 - \frac{3}{4} e'^2 + \frac{45}{64} e'^4 - \frac{175}{256} e'^6 + \frac{11025}{16384} e'^8 - \frac{43659}{65536} e'^{10} + \dots$$
$$B' = + \frac{3}{4} e'^2 - \frac{15}{16} e'^4 + \frac{525}{512} e'^6 - \frac{2205}{2048} e'^8 + \frac{72765}{65536} e'^{10} + \dots$$
$$C' = + \frac{15}{64} e'^4 - \frac{105}{256} e'^6 + \frac{2205}{4096} e'^8 - \frac{10395}{16384} e'^{10} + \dots$$
$$D' = + \frac{35}{512} e'^6 - \frac{315}{2048} e'^8 + \frac{31185}{131072} e'^{10} + \dots$$
$$E' = + \frac{315}{16384} e'^8 - \frac{3465}{65536} e'^{10} + \dots$$
$$F' = + \frac{693}{131072} e'^{10} + \dots$$

In allen diesen Entwicklungen von (17) bis F' treten dieselben Zahlencoëfficienten auf wie früher in (12) bis F, nur mit anderen Vorzeichen. Man bemerkt auch, dass in der Gruppe der Coëfficienten A' B' C' ... jede Vertikalreihe die Summe = Null giebt, so dass im Ganzen entsteht:

$$A' + B' + C' + D' + E' + F' = 1$$

Dieses hat auch einen inneren Sinn, nämlich mit $\varphi = 90°$ wird

$$\cos 2\varphi = -1 \quad , \quad \cos 4\varphi = +1 \quad , \quad \cos 6\varphi = -1 \text{ u. s. w.}$$

und damit wird nach (18):

$$\frac{1}{V^3} = A' + B' + C' + D' + E' + F' = 1$$

und allerdings muss mit $\varphi = 0$ der Ausdruck $V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi = 1$ werden. Etwas ähnliches findet bei der früheren Entwicklung mit W bei (13) statt, indem mit $\varphi = 0°$ ebenfalls $W = 1$ werden muss. Jedenfalls ist die Beziehung $A' + B' + C' \ldots = 1$ eine angenehme Probe für die Coëfficienten A', $B'\ldots$, womit zugleich auch die früheren Coëfficienten A, $B\ldots$ kontrolliert sind.

Die Ausrechnung der Zahlenwerte von A' B' u. s. w. mit dem Bessel schen $\log e'^2 = 7.827\,3187{\cdot}833$ hat gegeben:

$$\left.\begin{array}{llll} A' = & 0{,}99499\,21245{,}07507 & \log A' = & 9.997\,8196{\cdot}433 \\ B' = & 0{,}00499\,73968{,}22747 & \log B' = & 7.698\,7438{\cdot}364 \\ C' = & 0{,}00001\,04582{,}03528 & \log C' = & 5.019\,4570{\cdot}894 \\ D' = & 204{,}27152 & \log D' = & 2.310\,2078{\cdot}2 \\ E' = & 0{,}38465 & \log E' = & 9.585\,0657 \\ F' = & 0{,}00072 & \log F' = & 6.857\,33 \end{array}\right\} \quad (19)$$

Die Weiterrechnung nach der Integration giebt dann, ganz wie früher bei der Rechnung mit W:

$$\left.\begin{array}{llll} \frac{A'}{\varrho°}c = & 111120{,}61962 & \log \frac{A'}{\varrho°}c = & 5.045\,7946{\cdot}544 \\ \frac{B'}{2}c = & 15988{,}63853 & \log \frac{B'}{2}c = & 4.203\,8114{\cdot}842 \\ \frac{C'}{4}c = & 16{,}72995\,380 & \log \frac{C'}{4}c = & 1.223\,4947{\cdot}417 \\ \frac{D'}{6}c = & 0{,}02178\,4832 & \log \frac{D'}{6}c = & 8.338\,1542{\cdot}1 \\ \frac{E'}{8}c = & 0{,}00008\,07662 & \log \frac{E'}{8}c = & 5.488\,0733 \\ \frac{F'}{10}c = & 0{,}00000\,00460{,}71 & \log \frac{F'}{10}c = & 2.663\,43 \end{array}\right\} \quad (20)$$

Die beiden Ausrechnungen (16) und (20) stimmen so nahe überein, als es bei den unvermeidlichen Abrundungen erwartet werden kann. Die ganze Rechnung ist damit genügend kontrolliert, und wir bilden daraus im Mittel: die Formel für den Meridianbogen B vom Äquator bis zur Breite φ:

$$\left.\begin{array}{l} B = \alpha\varphi + \beta \sin 2\varphi + \gamma \sin 4\varphi + \delta \sin 6\varphi + \varepsilon \sin 8\varphi + \zeta \sin 10\varphi \\ B = 11\,1120{,}61962\,\varphi - 15988{,}63853 \sin 2\varphi + 16{,}72995\,38 \sin 4\varphi \\ \qquad - 0{,}02178\,480 \sin 6\varphi + 0{,}00008\,0766 \sin 8\varphi \\ \qquad - 0{,}00000\,00452 \sin 10\varphi \end{array}\right\} \quad (21)$$

Das letzte Glied mit $\sin 10\varphi$ ist für alle im folgenden beabsichtigten Berechnungen nicht mehr von Bedeutung, wir wollen es deshalb ganz weglassen in der nachstehenden Formel, welche statt der Coëfficienten selbst deren Logarithmen giebt:

$$\left.\begin{array}{l} B = [5.045\,7946{\cdot}544]\,\varphi - [4.203\,8114{\cdot}842] \sin 2\varphi + [1.223\,4947{\cdot}4] \sin 4\varphi \\ \qquad - [8.338\,1536] \sin 6\varphi + [5.48807] \sin 8\varphi \end{array}\right\} \quad (22)$$

Im ersten Glied von (21) oder (22) ist φ in Graden zu nehmen; wenn man in Minuten oder in Sekunden rechnen will, so wird das erste Glied:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } 1' & 1852{,}01032\,72^{m} & \log = 3.267\,6434{\cdot}040 \\ \text{„ } 1'' & 30{,}86683\,879 & \log = 1.489\,4921{\cdot}536 \end{array}\right\} \tag{23}$$

Die Formel (21) giebt sofort eine wichtige Anwendung; mit $\varphi = 90°$ werden $\sin 2\varphi$, $\sin 4\varphi$ u. s. w. alle = Null, und man bekommt den Meridianquadranten:

$$Q = 10\,000\,855{,}7658 \text{ Meter} \tag{24}$$

Man drückt das häufig auch so aus, dass man sagt, es sei $\frac{Q}{90} = 11\,1120{,}61962$ Meter der mittlere Meridiangrad.

Wenn man die Bedeutung des ersten Coëfficienten α in (21) nochmals aus (16) und (13) einsetzt, so erhält man:

$$Q = \frac{A\,a\,(1-e^2)}{\varrho°}\,90° = a\,(1-e^2)\,\frac{\pi}{2}\,A$$

$$Q = a\,(1-e^2)\,\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \dots\right)$$

$$Q = a\,\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \dots\right) \tag{24a}$$

Wir wollen bei dieser Näherung stehen bleiben und nach (7) § 31. S. 189 die Abplattung α einführen, nämlich mit:

$$e^2 = 2\,\alpha - \alpha^2$$

Setzt man dieses in (24a) und ordnet nach Potenzen von α, so erhält man:

$$Q = a\,\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right) \tag{24b}$$

Von dem Klammerfaktor kann man auch den Logarithmus entwickeln, wodurch man findet:

$$\log\left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right) = \mu\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right) - \frac{\mu}{2}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2 = -\mu\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right)$$

Die Formel (24b) haben wir schon in unserer Einleitung S. 8 bei Gelegenheit der älteren Gradmessungen erwähnt, und um für solche Fälle leicht den Quadranten aus der grossen Axe und der Abplattung α oder umgekehrt berechnen zu können, haben wir dazu folgendes Hilfstäfelchen gebildet:

$\frac{a-b}{a} = \alpha$	$\log \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right)$	+	$\frac{a-b}{a} = \alpha$	$\log \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right)$	+
1 : 280	0.195 3440		1 : 300	0.195 3957	
		137			119
1 : 285	0.195 3577		1 : 305	0.195 4076	
		131			115
1 : 290	0.195 3708		1 : 310	0.195 4191	
		127			112
1 : 295	0.195 3835		1 : 315	0.195 4303	
		122			107
1 : 300	0.195 3957		1 : 320	0.195 4410	

Eine zweite naheliegende Anwendung von (21) oder (22) bekommt man mit $\varphi = 45°$, damit wird $2\varphi = 90°$, $4\varphi = 180°$, $6\varphi = 270°$, also:

$$B_0^{45} = 5\,000\,427{,}882900 - 15988{,}638530 + 0{,}021785 = 4\,984\,439{,}266155^{m} \tag{25}$$

Dieses ist der Meridianbogen vom Äquator bis zur Mittelbreite = 45°, der andere Teil von 45° bis zum Pol ist erheblich grösser, nämlich:

$$B_{45}^{90} = 50\,15416{,}4996^{m} \tag{26}$$

Nach der Formel (21) oder (22) haben wir die 30 Werte von $\varphi = 30°$ bis $\varphi = 60°$ berechnet:

Meridianbogen B vom Äquator bis zur Breite φ. (27)

φ	B	φ	B	φ	B
30°	3 319 786,510^m	40°	4 429 084,790^m	50°	5 540 279,543^m
31	3 430 636,950	41	4 540 116,998	51	5 651 505,565
32	3 541 502,523	42	4 651 168,472	52	5 762 750,675
33	3 652 386,539	43	4 762 239,302	53	5 874 014,723
34	3 763 288,290	44	4 873 329,553	54	5 985 297,540
35°	3 874 208,046	45	4 984 439,266	55	6 096 598,931
36	3 985 146,054	46	5 095 568,459	56	6 207 918,679
37	4 096 102,540	47	5 206 717,124	57	6 319 256,544
38	4 207 077,708	48	5 317 885,233	58	6 430 612,266
39	4 318 071,739	49	5 429 073,732	59	6 541 985,560
40°	4 429 084,790	50	5 540 279,543	60	6 654 376,122

Zur Vergleichung wollen wir auch einige Zahlen aus fremden Tabellen zuziehen, nämlich: 1) Encke, Berliner astronomisches Jahrbuch 1852, Tafeln für die Gestalt der Erde S. 374—381, giebt diese Meridianbögen B in Toisen, welche in der nachfolgenden Vergleichung in Meter verwandelt sind. 2) F. G. Gauss, Die trigonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst, zweite Auflage 1893, II. Teil, S. 4—27. 3) Hartl, Tafeln, enthaltend die Ausmasse der Meridian- und Parallelbögen 1895 („Zeitschr. f. Verm." 1896, S. 28—30).

Vergleichung verschiedener Berechnungen von B. (28)

φ	Jordan	Encke	F. G. Gauss	Hartl
30°	3 319 786,510^m	,511^m		,510^m
35	3 874 208,046	,047		,046
40	4 429 084,790	,791		,790
45	4 984 439,266	,270	,265^m	,266
50	5 540 279,543	,544	,542	,543
55	6 096 598,931	,932	,929	,931
60	6 654 376,122	,121		,121

Die kleinen Differenzen von Millimetern, welche sich hier zeigen, scheinen ihren Grund in den verschiedenen Annahmen der letzten Stellen der Bessel schen Erddimensionen zu haben, von welchen wir in § 31. S. 190—192 gehandelt haben.

Die Hilfstafel auf S. [38] unseres Anhangs, welche die in den vorstehenden Formeln mit B bezeichneten Meridianbögen vom Äquator bis zur Breite φ giebt, ist nur in ihrem ersten Teil, von 40° bis 44° von uns berechnet und zwar mit etwas anderen Konstanten als in vorstehender Formel (21) oder (22). Der übrige Teil von 44° bis 56° ist ein Auszug aus F. G. Gauss, Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen der Feldmesskunst, 2. Aufl. 1893, II. Teil, S. 4—27.

Meridianbogen zwischen den Breiten φ_1 und φ_2.

Wenn man die Länge eines begrenzten Bogens m, zwischen φ_1 und φ_2, haben will, so kann man diesen sofort aus (21) haben, nämlich:

$$m = \alpha(\varphi_2 - \varphi_1) + \beta \sin 2(\varphi_2 - \varphi_1) + \gamma \sin 4(\varphi_2 - \varphi_1) + \delta \sin 6(\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots \quad (29)$$

Dieses wollen wir goniometrisch umformen, und dabei setzen:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varDelta\varphi \qquad \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi_0$$

Damit wird (28):

$$m = \alpha\varDelta\varphi + 2\beta \sin\varDelta\varphi\cos\varphi_0 + 2\gamma\sin 2\varDelta\varphi\cos 2\varphi_0 + 2\delta\sin 3\varDelta\varphi\cos 3\varphi_0 + \ldots \quad (30)$$

Da die ausgerechneten Coëfficienten α, β, γ u. s. w. in (21) und (22) gegeben sind, kann man hiernach sofort für jede Mittelbreite φ_0 den Bogen m ausrechnen. Wir wollen $\varDelta\varphi = 1^0$ setzen, und bekommen damit den Meridianbogen m_1 von 1° Weite mit der Mittelbreite φ mit ausgerechneten Coëfficienten:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = 111120{,}61962 - 558{,}080436 \cos 2\varphi + 1{,}167734 \cos 4\varphi \\ \qquad - 0{,}002280 \cos 6\varphi + 0{,}0000043 \cos 8\varphi \end{array}\right\} \quad (31)$$

oder mit Logarithmen:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = 111\,120{,}61962 - [2.746\,6967{\cdot}983] \cos 2\varphi + [0.0673439{\cdot}0] \cos 4\varphi \\ \qquad - [7.357\,984] \cos 6\varphi - [4.63268] \cos 8\varphi \end{array}\right\} \quad (32)$$

Nach diesen Formeln (30)—(32) kann man jedes Meridianbogenstück ausrechnen, wenn es sich aber um Bögen von nur 1° oder von wenigen Grad handelt, und wenn man eine Tafel der Meridian-Krümmungs-Halbmesser bereits hat, so kann man eine viel bessere Reihe auf folgende Weise finden:

Wir betrachten einen Meridianbogen m, welcher zwischen den Breiten φ und $\varphi + \varDelta\varphi$ liegt, dann wird man nach dem Maclaurinschen Satze entwickeln können:

$$m = \frac{dm}{d\varphi}\varDelta\varphi + \frac{\varDelta\varphi^2}{2}\frac{d^2m}{d\varphi^2} + \frac{\varDelta\varphi^3}{6}\frac{d^3m}{d\varphi^3} \quad (33)$$

Nun wissen wir von (1) und (2) S. 209:

$$\frac{dm}{d\varphi} = M = \frac{c}{V^3} \quad (34)$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2\varphi^2\cos^2\varphi} = \sqrt{1+\eta^2}\ , \quad \frac{dV}{d\varphi} = -\frac{\eta^2 t}{V}$$

$$\frac{d^2m}{d\varphi^2} = -\frac{3c}{V^4}\frac{dV}{d\varphi} = +\frac{3c\eta^2 t}{V^5} = +\frac{3M}{V^2}\eta^2 t \quad (35)$$

Wenn man in diesen Formen weiter differentiiert, so erhält man:

$$\frac{d^3m}{d\varphi^3} = \frac{3c}{V^7}\eta^2(1 - t^2 + \eta^2 + 4\eta^2t^2) = \frac{3M}{V^4}\eta^2(1 - t^2 + \eta^2 + 4\eta^2t^2) \quad (36)$$

Nach diesen (34)—(36) kann man die Formel (33) zusammensetzen:

$$m = M \varDelta \varphi + \frac{3}{2} \frac{M}{V^2} \eta^2 t \varDelta \varphi^2 + \frac{M}{2 V^4} \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 + 4 \eta^2 t^2) \varDelta \varphi^3 \qquad (37)$$

Zur Sicherung der Vorzeichen wollen wir dieses auch noch schreiben mit $\varDelta \varphi = \varphi' - \varphi$ und $m = B' - B$, wo B und B' die Meridianbögen vom Äquator bis φ und φ' sind, also (37) in zweiter Form:

$$m = B' - B = M(\varphi' - \varphi) + \frac{3}{2} \frac{M}{V^2} \eta^2 t (\varphi' - \varphi)^2 + (\varphi' - \varphi)^3 + \ldots \qquad (38)$$

dabei gehört M , η^2 , t zu φ.

Im Anschluss hieran kann man nun noch eine viel bessere Formel nach dem Prinzip der Mittelbreite (vgl. § 29. S. 178—179) herstellen:

Wir betrachten einen Meridianbogen m, welcher zwischen den Breiten $\varphi - \frac{\varDelta \varphi}{2}$ und $\varphi + \frac{\varDelta \varphi}{2}$ liegt, wo also φ die Mittelbreite und $\varDelta \varphi$ die Weite ist. Der Bogen m wird dadurch ebenfalls in zwei Teile m_1 und m_2 zerlegt, für deren nördlichen m_1 nach dem Maclaurin schen Satze eine Reihe gelten wird:

$$m_1 = \left(\frac{d\,m}{d\,\varphi}\right) \frac{\varDelta \varphi}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 m}{d\,\varphi^2}\right) \left(\frac{\varDelta \varphi}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 m}{d\,\varphi^3}\right) \left(\frac{\varDelta \varphi}{2}\right)^3 + \ldots$$

eine entsprechende Reihe gilt für den südlichen Teil m_2, nämlich:

$$- m_2 = - \left(\frac{d\,m}{d\,\varphi}\right) \frac{\varDelta \varphi}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 m}{d\,\varphi^2}\right) \left(\frac{\varDelta \varphi}{2}\right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 m}{d\,\varphi^3}\right) \left(\frac{\varDelta \varphi}{2}\right)^3 + \ldots$$

durch Subtraktion findet man hieraus:

$$m_1 + m_2 = m = \left(\frac{d\,m}{d\,\varphi}\right) \varDelta \varphi + \left(\frac{d^3 m}{d\,\varphi^3}\right) \frac{\varDelta \varphi^3}{24} \qquad (39)$$

Die hiezu nötigen Ableitungen sind im Vorstehenden (34) und (36) entwickelt, man kann daher alsbald die Formel (39) zusammensetzen, zugleich mit Zufügung der nötigen ϱ:

$$m = M \frac{\varDelta \varphi}{\varrho} + \frac{M}{8 V^4} \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 + 4 \eta^2 t^2) \frac{\varDelta \varphi^3}{\varrho^3} \qquad (40)$$

und mit Einführung einer Abkürzung g und γ haben wir:

$$m = M \frac{\varDelta \varphi}{\varrho} + g \varDelta \varphi^3 \qquad (41)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{wobei} \quad g &= \frac{M \eta^2}{8 V^2 \varrho^3} (1 - t^2 + \eta^2 + 4 \eta^2 t^2) \\ \gamma = \frac{g}{M} \varrho &= \frac{\eta^2}{8 V^2 \varrho^2} (1 - t^2 + \eta^2 + 4 \eta^2 t^2) \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

$$\varDelta \varphi = \frac{m}{M} \varrho - \gamma \left(\frac{m}{M} \varrho\right)^3 \qquad (43)$$

Die hiernach berechneten Werte g und γ sind in nachfolgender Tabelle mitgeteilt. Dieselbe enthält für $\varDelta \varphi = 1°$ die Korrektions-Glieder g und γ für Meridian-Bogen-Rektifizierung mit dem Krümmungs-Halbmesser der Mittelbreite φ.

φ	g	γ
	+	—
0°	0,0281^m	0,00091″
5°	0,0277	0,00090
10°	0,0264	0,00086
15°	0,0244	0,00079
20°	0,0217	0,00070
25°	0,0183	0,00059
30°	0,0143	0,00046
35°	0,0099	0,00032
40°	0,0051	0,00017
45°	0,0002	0,00001

φ	g	γ
45°	+ 0,00024^m	— 0,000008″
46°	— 0,00075	+ 0,000024
47°	— 0,00174	+ 0,000056
48°	— 0,00273	+ 0,000088
49°	— 0,00372	+ 0,000120
50°	— 0,00470	+ 0,000152
51°	— 0,00567	+ 0,000184
52°	— 0,00664	+ 0,000215
53°	— 0,00761	+ 0,000246
54°	— 0,00856	+ 0,000277
55°	— 0,00951	+ 0,000308

φ	g	γ
	—	+
55°	0,0095^m	0,00031″
60°	0,0140	0,00045
65°	0,0182	0,00059
70°	0,0217	0,00070
75°	0,0247	0,00080
80°	0,0268	0,00086
85°	0,0281	0,00091
90°	0,0286	0,00092

Diese Werte g sind im wesentlichen dasselbe, was die früher bei (11) S. 210 bis 211 angegebenen Beträge $m - m'$, d. h. die negativen Fehler.

Zu einem Zahlenbeispiel wollen wir den Meridianbogen zwischen den Breiten 47° und 53°, also 6° Weite mit der Mittelbreite $\varphi = 50°$ berechnen, man hat zuerst nach der Tafel des Anhangs, S. [20] und [21] $\log M = 6.804\,2916{\cdot}0$ oder sofort $\log \frac{\varrho}{M} = \log [1] = 8.510\,1335{\cdot}3$. Oder wenn wir noch schärfer rechnen wollen, so nehmen wir von S. [5] des Anhangs für $\varphi = 50°$, $\log V = 0.000\,6020{\cdot}131$ also $\log V^3 = 0.001\,8060{\cdot}393$, dazu von § 31. S. 193 $\log \varrho - \log c = 8.508\,3274{\cdot}897$, so dass man zusammen hat $\log [1] = 8.510\,1335{\cdot}290$, was mit $6° = 21\,600''$ das Hauptglied der Formel (41) giebt:

$$m' = \frac{21600}{[1]} = 667\,298{,}613^m$$

und dazu kommt noch nach dem vorstehenden Korrektionstäfelchen für $\varphi = 50°$ und $\Delta\varphi = 6°$ der Betrag:

$$-0{,}00470 \times 6^3 = -1{,}015^m.$$

Dieses zum vorigen hinzugefügt giebt:

$$m = 667\,298{,}613^m - 1{,}015^m = 667\,297{,}598^m.$$

Zur Vergleichung hat man von der Tabelle (27) S. 216:

für	$\varphi = 47°$	$B = 5\,206717{,}124^m$
„	$\varphi = 53°$	$B = 5\,874014{,}723$
Differenz		$m = 667297{,}599^m$

Dieses stimmt mit dem vorhergehenden auf 1^{mm}, was genügend ist.

Die Genauigkeit der Berechnung nach der Formel (41) ist sehr gross, denn das nächste vernachlässigte Glied ist nur von der Ordnung $\frac{M}{160} \Delta\varphi^5 e'^2 \cos 2\varphi$, was für einen Breitenunterschied von 10° zwischen 45° und 55° nur 7^{mm} ausmacht, jedoch wegen des Faktors $\cos 2\varphi$ erheblicher wird, wenn die Mittelbreite φ weit von 45° abliegt.



Wenn man etwa die von 1° zu 1° berechneten Meridianbogen B der Tabelle (27) S. 216 weiter interpolieren will, so rechnet man am besten die Differenzen nach der Formel (41), wobei das Glied mit g fast gar nichts ausmacht, z. B. für $\varphi = 50°$ und $\Delta\varphi = 10'$ wird $\gamma\,\Delta\varphi^3$ nur $= \frac{0{,}00470^m}{216} = 0{,}00002^m$.

Um daher den Meridianbogen von 50° 0′ bis 50° 10′ zu berechnen, nimmt man einfach von Seite [32] des Anhangs für $\varphi = 50°\,5'$ den Wert $log\,[1] = 8.510\,1272{\cdot}8$ und rechnet damit

$$\Delta B = 600 : [1] = 18536{,}339^m$$

Ein zweites Beispiel soll die Benützung der Tafel Seite [38] und der Coëfficienten [1] zeigen:

Es sei gegeben die Breite des Punktes Celle (welcher einer der 40 Preussischen Kataster-Coordinaten-Nullpunkte ist) nämlich:

$$\varphi_0 = 52°\,37'\quad 32{,}6709''$$

und es soll dazu der Meridianbogen B vom Äquator bis zu dem Punkte Celle aus der Tafel Seite [38] des Anhangs gefunden werden. Man hat zunächst

$$\text{für } \varphi = 52°\,30': \; B_1 = 5818\,380{,}341^m \text{ und } \Delta\varphi = 7'\,32{,}6709'' = 452{,}6709''$$

Die Mittelbreite für den Überschuss ist 52° 33′ 46,3″ und damit entnimmt man von Seite [33] den Wert $log\,[1] = 8.509\,9429{\cdot}9$, womit man logarithmisch weiterrechnet $\Delta B = \Delta\varphi : [1] = 13990{,}705$, was zu dem obigen B_1 zugefügt giebt $B_0 = 5\,83271{,}046^m$, und dieses ist der gesuchte zu φ_0 gehörige Meridianbogenwert, den man durch Benützung der zweiten Differenzen auf Seite [38] ebenso finden muss (in der 3. Aufl. dieses Bandes, 1890, S. 208, mit zweiten Differenzen berechnet = 583271,045^m).

§ 36. Parallelkreisbögen.

Nachdem wir die Meridianbögen gründlich behandelt haben, sind auch noch die damit verwandten Parallelkreisbögen zu erledigen, wozu keine weiteren Entwicklungen nötig sind, denn nach Fig. 1. S. 188 und Fig. 1 S. 194 ist der Parallelkreishalbmesser für die Breite φ:

$$x = N\cos\varphi \tag{1}$$

wobei wir $N = \frac{c}{V}$ als bereits berechnet voraussetzen. Damit hat man auch den Parallelbogen für die Länge λ:

$$L = x\frac{\lambda}{\varrho} = N\cos\varphi\,\frac{\lambda}{\varrho} = \frac{\lambda}{[1]}\cos\varphi \tag{2}$$

Die zweite oder die dritte dieser Formen wird man nehmen, wenn man N oder $[2] = \frac{\varrho}{N}$ aus unseren Anhangstafeln Seite [8]—[35] benützen will. Um noch genauer, etwa 10stellig zu rechnen, hat man $log\,V$ aus der besonderen Tafel dafür S. [2]—[7] des Anhangs zu entnehmen, und dann ist:

$$L = \frac{c}{\varrho}\,\frac{\cos\varphi\,\lambda}{V} \tag{3}$$

wobei für λ in Graden, Minuten oder Sekunden gilt:

	für Grade	für Minuten	für Sekunden
$log\,\frac{c}{\varrho}$	= 5.047 9750·111	3.269 8237·607	1.491 6725·103

Hiernach sind folgende Werte berechnet, zu etwaigen Weiterbenützungen mit mehr Stellen als für gewöhnlich nötig.

Parallelkreisbögen.

φ	$\lambda = 1°$	$\lambda = 1'$	$\lambda = 1''$
45°	78837,29341^m	1313,954890^m	21,88924817^m
46	77453,91115	1290,898519	21,51497532
47	76046,76765	1267,446128	21,12410212
48	74616,28344	1243,604724	20,72674540
49	73162,88715	1219,381452	20,32302421
50°	71687,01462	1194,783577	19,91305962
51	70189,10917	1169,818486	19,49697477
52	68669,62128	1144,493688	19,07489480
53	67129,00870	1118,816812	18,64694685
54	65567,73593	1092,795599	18,21325998
55	63986,27472	1066,437912	17,77396520

Verschiedene Tafelwerte von berechneten Parallelkreisbögen giebt unser Anhang auf Seite [36]—[37] , [40] und [41].

Die Parallelbögen werden ausser auf Grade, Minuten und Sekunden, auch auf Zeitmass, Stunden, Minuten und Sekunden reduziert, was astronomischen Zwecken entspricht. Es ist deswegen auf Seite [43] auch eine Tafel für Verwandlung von Bogen in Zeit und umgekehrt gegeben, und auf Seite [40] sind die Parallelbögen für 1′ und 1″ in Bogen, dazu aber auch für 1 Minute und 1 Sekunde in Zeit gegeben, als Näherungswerte, die z. B. zu astronomischen Ortsbestimmungen auf Reisen nützlich sind.

§ 37. Oberfläche des Erd-Ellipsoids.

Zur Oberflächenbestimmung denkt man sich das Ellipsoid durch Meridiane und Parallelkreise in Trapeze zerlegt, deren Differentialformel sich leicht angeben lässt.

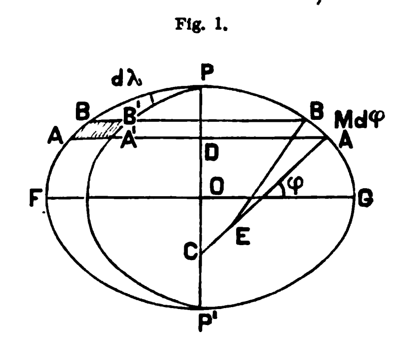
$A\,C = N \quad , \quad A\,E = M$

$D\,A = N \cos \varphi \qquad A\,B = M\,d\,\varphi$

$A\,A' = D\,A\,d\,\lambda$

$A\,A' = N \cos \varphi\, d\,\lambda$

Fig. 1.



Als Differential betrachtet hat das Trapez $A\,B\,B'\,A'$ die Fläche $d\,T = A\,B \times A\,A'$,

also: $$d\,T = M\,N \cos \varphi\, d\,\lambda\, d\,\varphi \qquad (1)$$

und die ganze Zone $A\,A\,B\,B$ mit $\lambda = 2\,\pi$ zwischen den Breiten φ und $d\,\varphi$ wird:

$$d\,Z = 2\,M\,N\,\pi \cos \varphi\, d\,\varphi \qquad (2)$$

Es mag auch daran erinnert werden, dass man ein solches Zonenelement dZ zwischen zwei unendlich nahen Parallelkreisen auch als Kegelfläche auffassen kann, welche nach einem elementar-stereometrischen Satze erhalten wird als krumme Oberfläche eines Cylinders, dessen Höhe gleich der Höhe der genannten Zone ist, und dessen Halbmesser gleich der Länge der Flächennormalen N ist.

Fig. 2.

Mit Bezug auf Fig. 2. hat man daher:

$$\text{Zonen-Flächen-Element } dZ = 2\,N\pi \times dh.$$

Es ist aber:

$$dh = ds \cos\varphi \quad \text{und} \quad ds = M\,d\varphi$$

also $dZ = 2\,MN\pi \cos\varphi\, d\varphi$, ebenso wie oben (2).

Da $MN = r^2$ ist, kann man die Formel (1) auch so schreiben:

$$dZ = 2\,r^2\pi \cos\varphi\, d\varphi \tag{3}$$

Setzt man für r^2 nach (24) § 32. S. 197 seinen Wert und zugleich $a^2(1-e^2) = b^2$, so wird:

$$dZ = 2\,b^2\pi \frac{\cos\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}\,d\varphi \tag{4}$$

Dieses ist das Flächen-Differential einer Zone des Ellipsoids zwischen den Breiten φ und $\varphi + d\varphi$, also die Zonenfläche selbst, allgemein:

$$Z = 2\,b^2\pi \int \frac{\cos\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}\,d\varphi \tag{5}$$

Hier kann man entwickeln:

$$\frac{1}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2} = (1-e^2\sin^2\varphi)^{-2} = 1 + \left(\frac{-2}{1}\right)e^2\sin^2\varphi + \left(\frac{-2}{1}\,\frac{-3}{2}\right)e^4\sin^4\varphi + .$$

$$= 1 + 2\,e^2\sin^2\varphi + 3\,e^4\sin^4\varphi + 4\,e^6\sin^6 + 5\,e^8\sin^8\varphi + \ldots$$

Die zu integrierende Funktion ist also nach (5):

$$\frac{\cos\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2} = \cos\varphi + 2\,e^2\cos\varphi\sin^2\varphi + 3\,e^4\cos\varphi\sin^4\varphi + 4\,e^6\cos\varphi\sin^6\varphi + \ldots$$

Diese Glieder lassen sich einzeln unmittelbar integrieren, denn es ist allgemein:

$$\int \cos\varphi \sin^n\varphi\, d\varphi = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1}\varphi$$

also, mit mehrfacher Anwendung dieses Integrals:

$$\int \frac{\cos\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}\,d\varphi = \sin\varphi + \frac{2}{3}e^2\sin^3\varphi + \frac{3}{5}e^4\sin^5\varphi + \frac{4}{7}e^6\sin^7\varphi + \ldots$$

Wenn man also auf (4) zurückgreift, und die Grenzen 0 und φ einführt, so erhält man die Zonenfläche vom Äquator bis zur Breite φ:

$$Z\Big]_0^{\varphi} = 2\,b^2\pi\left(\sin\varphi + \frac{2}{3}e^2\sin^3\varphi + \frac{3}{5}e^4\sin^5\varphi + \frac{4}{7}e^6\sin^7\varphi + \frac{5}{9}e^8\sin^9\varphi + \ldots\right) \tag{6}$$

Wenn man diesen Wert selbst haben will für verschiedene φ, so kann man geradezu hiernach rechnen, indessen für Zonenflächen zwischen je zwei Breiten φ_1 und φ_2 ist es besser, die $\sin^3\varphi$ in $\sin 3\varphi$ u. s. w. umzuformen, nämlich nach § 29. S. 116:

$$\sin^3 \varphi = \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 3\varphi$$

$$\sin^5 \varphi = \frac{5}{8} \sin \varphi - \frac{5}{16} \sin 3\varphi + \frac{1}{16} \sin 5\varphi$$

$$\sin^7 \varphi = \frac{35}{64} \sin \varphi - \frac{21}{64} \sin 3\varphi + \frac{7}{64} \sin 5\varphi - \frac{1}{64} \sin 7\varphi$$

$$\sin^9 \varphi = \frac{63}{128} \sin \varphi - \frac{21}{64} \sin 3\varphi + \frac{9}{64} \sin 5\varphi - \frac{9}{256} \sin 7\varphi + \frac{1}{256} \sin 9\varphi$$

$$\sin^{11} \varphi = \frac{231}{512} \sin \varphi - \frac{165}{512} \sin 3\varphi + \frac{165}{1024} \sin 5\varphi - \frac{55}{1024} \sin 7\varphi + \frac{11}{1024} \sin 9\varphi - \frac{\sin 11\varphi}{1024}$$

Damit wird (5) werden:

$$Z\Big]_0^\varphi = 2\,b^2\,\pi \Big(A \sin \varphi - B \sin 3\varphi + C \sin 5\varphi - D \sin 7\varphi + E \sin 9\varphi - F \sin 11\varphi\Big) \quad (7)$$

wobei die Coëfficienten A, B u. s. w. diese sind:

$$\left.\begin{aligned}
A &= 1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 + \frac{5}{16} e^6 + \frac{35}{128} e^8 + \frac{63}{256} e^{10} = 1{,}00335\,39847{,}9231 \\
B &= \frac{1}{6} e^2 + \frac{3}{16} e^4 + \frac{3}{16} e^6 + \frac{35}{192} e^8 + \frac{45}{256} e^{10} = 0{,}00112\,08040{,}9276 \\
C &= \frac{3}{80} e^4 + \frac{1}{16} e^6 + \frac{5}{64} e^8 + \frac{45}{612} e^{10} = 16892{,}6070 \\
D &= \frac{1}{112} e^6 + \frac{5}{256} e^8 + \frac{15}{512} e^{10} = 26{,}9384 \\
E &= \frac{5}{2304} e^8 + \frac{3}{512} e^{10} = {,}0438 \\
F &= \frac{3}{5632} e^{10} = {,}0001
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Die Ausrechnung geschah mit dem Besselschen Werte $\log e^2 = 7.824\,4104{\cdot}237$.

Wenn man nun die Zone zwischen zwei Breiten φ_1 und φ_2 haben will, so hat man in (7) die Differenzen:

$$A\,(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) = 2\,A \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \text{ u. s. w.}$$

Dabei soll zur Abkürzung geschrieben werden:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi \quad , \quad \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi$$

Damit wird nach (7) die Zonenfläche von der Weite $\Delta\varphi$ und mit der Mittelbreite φ:

$$\left.\begin{aligned}
Z = 4b^2\,\pi \Big\{ & A \cos \varphi \sin \frac{\Delta\varphi}{2} - B \cos 3\varphi \sin 3\frac{\Delta\varphi}{2} \\
& + C \cos 5\varphi \sin 5\frac{\Delta\varphi}{2} - D \cos 7\varphi \sin 7\frac{\Delta\varphi}{2} \\
& + E \cos 9\varphi \sin 9\frac{\Delta\varphi}{2} - \ldots\ldots \quad \ldots \Big\}
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Fläche einer Grad-Abteilung.

Die Formel (8) mit dem Coëfficienten (7) giebt mit $\Delta\varphi = 1°$ die Fläche eines Ringes von 1° Breite, der um die ganze Erde herumgeht, d. h. 360° Länge hat. Häufiger als die Fläche dieses ganzen Ringes braucht man den 360sten Teil derselben, d. h. eine „Grad-Abteilung", oder ein Trapez, welches durch zwei Meridiane und durch zwei Parallelkreise, beide im Abstande von je 1°, begrenzt ist.

Die krumme Oberfläche einer solchen Grad-Abteilung mit der Mittelbreite φ ist also:

$$G = \frac{b^2\pi}{90}\Big\{A \sin 30' \cos\varphi - B \sin 1°30' \cos 3\varphi + C \sin 2°30' \cos 5\varphi - D \sin 3°30' \cos 7\varphi + E \sin 4°30' \cos 9\varphi - \ldots\Big\} \tag{10}$$

Wenn man hier alles Konstante ausrechnet, so findet man für Quadratkilometer

$$\left.\begin{array}{rrll} G = & 12347{,}58347 & \cos\varphi & (\log \text{Coëff.} = 4.091\,5819{\cdot}705) \\ - & 41{,}37468 & \cos 3\varphi & (\;\;\text{„}\;\;\;\text{„}\;\; = 1.616\,7346{\cdot}5\;\;) \\ + & 0{,}103911 & \cos 5\varphi & (\;\;\text{„}\;\;\;\text{„}\;\; = 9.016\,662 - 10) \\ - & 0{,}000232 & \cos 7\varphi & (\;\;\text{„}\;\;\;\text{„}\;\; = 6.365\,28\;\; - 10) \\ + & 0{,}\ldots & \cos 9\varphi & (\;\;\text{„}\;\;\;\text{„}\;\; = 3.678\;\;\;\;\; - 10) \end{array}\right\} \tag{11}$$

Die Messtischblätter der Preussischen Topographie im Massstab 1 : 25 000 haben in der Breite $\Delta\varphi = 6'$ und in der Länge 10', und hiefür wird:

$$G' = \frac{b^2\pi}{540}\Big\{A \sin 3' \cos\varphi - B \sin 9' \cos 3\varphi + C \sin 15' \cos 5\varphi - D \sin 21' \cos 7\varphi\Big\} \tag{12}$$

oder mit ausgerechneten Coëfficienten, für Quadratkilometer:

$$G' = 205{,}79564 \cos\varphi - 0{,}689656 \cos 3\varphi + 0{,}001732 \cos 5\varphi - 0{,}0000039 \cos 7\varphi \tag{13}$$

Die Logarithmen dieser Coëfficienten sind:

2.313 4361·8 9.838 6325 7.238 647 4.5874

Die hiernach berechneten Werte giebt unsere Tafel des Anhangs Seite [41].

Eine andere Reihenentwicklung, bei welcher die Coëfficienten A, B u. s. w. in endlicher geschlossener Form auftreten, wurde gegeben von *E. Roedel*, Oberpostassistent, in „Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Physik", 38. Jahrgang 1893, S. 56—60.

Integration in geschlossener Form.

Wir haben in der vorstehenden Entwicklung die Integration (4) sofort in einer Reihe behandelt, weil wir dadurch am kürzesten zu den Formeln (6) und (8) geführt worden sind, welche zum praktischen Rechnen die bequemsten sind.

Indessen kann man die Integration von (4) auch in geschlossener Form, streng ausführen, wodurch man zwar eine mathematisch elegantere Formel erhält, welche aber für die numerische Anwendung unbequemer ist als die entwickelten Reihen. Die Integration (deren Einzelheiten in der früheren 3. Auflage 1890, S. 227—228 ausgeführt waren) giebt:

$$Z\Big]_0^{\varphi} = 2\,b^2\pi\left\{\frac{\sin\varphi}{W^2} + \frac{1}{e}\,l\left(\frac{1+e\sin\varphi}{W}\right)\right\} \tag{14}$$

Setzt man hier $\varphi = 90°$, so wird $W^2 = 1 - e^2$ also:

$$Z\Big]_0^{90} = 2\,b^2\,\pi \left\{\frac{1}{1-e^2} + \frac{1}{e}\,l\,\frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}}\right\} \quad , \quad \frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$2Z\Big]_0^{90} = E = 4\,a^2\,\pi \left\{1 + \frac{1-e^2}{2\,e}\,\frac{1}{\mu}\,log\,\frac{1+e}{1-e}\right\}$$

Dieses muss übereinstimmen mit der Formel (6), wenn man daselbst $\varphi = 90°$ setzt, wodurch man erhält:

$$E = 4\,b^2\,\pi \left(1 + \frac{2}{3}\,e^2 + \frac{3}{5}\,e^4 + \frac{4}{7}\,e^6 + \frac{5}{9}\,e^8 + \ldots\right) \tag{15}$$

Die Ausrechnung giebt nach beiden Formeln übereinstimmend:

$$E = 509\,950\,714{,}2 \text{ Quadrat-Kilometer} \tag{16}$$

Denkt man sich nun eine Kugel vom Halbmesser f, welche gleiche Oberfläche E haben soll, so bestimmt sich f dadurch:

$$f = \sqrt{\frac{E}{4\,\pi}} = 6\,370\,289{,}511^m \tag{17}$$

§. 38. Mittlerer Halbmesser der Erde als Kugel.

Die letzte Betrachtung leitet uns noch über zu der Frage, welchen Halbmesser man einer Kugel zuteilen soll, welche zu manchen Näherungsberechnungen u. s. w. dem Erd-Ellipsoid substituiert werden kann?

Der nächste Gedanke ist, das arithmetische Mittel der drei Halbaxen des Ellipsoids zu diesem Zwecke zu benützen, d. h. zu setzen:

$$\frac{a+a+b}{3} = r \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= 6\,377\,397{,}155^m \\ a &= 6\,377\,397{,}155 \\ b &= 6\,356\,078{,}963 \end{aligned}\right\}\ \frac{a+a+b}{3} = 6\,370\,291{,}091^m \tag{2}$$

Man kann diesen Wert r nach (1) auch in eine Reihe entwickeln, nämlich:

$$r = \frac{2\,a + a\sqrt{1-e^2}}{3} = \frac{a}{3}\left(2 + 1 - \frac{1}{2}\,e^2 - \frac{1}{8}\,e^4 - \frac{1}{16}\,e^6 - \ldots\right)$$

$$r = a\left(1 - \frac{1}{6}\,e^2 - \frac{1}{24}\,e^4 - \frac{1}{48}\,e^6 - \ldots\right) \tag{3}$$

Nach diesem kann man die am Schlusse des vorigen § 37. (s. oben) eingeführte Kugel betrachten, welche mit dem Erd-Ellipsoid gleiche Oberfläche E hat. Aus der Reihe für E in (15) § 37. (s. oben) folgt, dass der Halbmesser f der fraglichen Kugel sein muss:

$$f = a\sqrt{1-e^2}\sqrt{1 + \frac{2}{3}\,e^2 + \frac{3}{5}\,e^4 + \frac{4}{7}\,e^6 + \ldots}$$

$$f = a\left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8} - \frac{e^6}{16}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\,e^2 + \frac{11}{45}\,e^4 + \frac{193}{945}\,e^6\right)$$

$$f = a\left(1 - \frac{1}{6}\,e^2 - \frac{17}{360}\,e^4 - \frac{67}{3024}\,e^6\right) \tag{4}$$

Die Vergleichung mit (3) giebt:

$$f = r\left(1 - \frac{1}{180}e^4 - \frac{17}{7560}r^6\right) \qquad (5)$$

Die Ausrechnung hiernach giebt:

$$f = 6\,370\,291{,}091^m - 1{,}577^m - 0{,}004^m = 6\,370\,289{,}510^m \qquad (6)$$

Dieses stimmt genügend mit dem früher auf zwei anderen Wegen berechneten Werte (16) § 37. S. 225.

Als dritter Mittelwert bietet sich der Halbmesser k derjenigen Kugel, welche mit dem Erd-Ellipsoid gleichen körperlichen Inhalt hat.

Der Inhalt des Umdrehungs-Ellipsoids wird bekanntlich dadurch gefunden, dass man eine Kugel mit dem Äquator-Halbmesser a, also mit dem Inhalt $\frac{4}{3}\pi a^3$, in der Richtung der Umdrehungsaxe im Verhältnis $b:a$ zusammengedrückt denkt, d. h. es ist:

$$\text{Körperinhalt des Erd-Ellipsoids} = \frac{b}{a}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

Wenn eine Kugel vom Halbmesser k denselben Inhalt haben soll, so muss sein:

$$k^3 = a^2 b \qquad \text{oder} \qquad k = \sqrt[3]{a^2 b} = a\sqrt[6]{1 - e^2} \qquad (7)$$

Dieses kann man entwickeln:

$$k = a\left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{5}{72}e^4 - \frac{55}{1296}e^6\right) \qquad (8)$$

Nimmt man wieder das arithmetische Mittel r der 3 Halbaxen nach (3) zur Vergleichung, und entwickelt, so erhält man:

$$k = r\left(1 - \frac{1}{36}e^4 - \frac{17}{648}e^6\right) \qquad (9)$$

Die Ausrechnung giebt:

$$k = 6\,370\,291{,}091^m - 7{,}8828^m - 0{,}0497^m = 6\,370\,283{,}158^m \qquad (10)$$

Dieses ist auch in Übereinstimmung mit einer unmittelbaren Ausrechnung nach (7).

Zur Übersicht stellen wir nochmals die drei gefundenen Werte zusammen:

1) Arithmetisches Mittel $\frac{a + a + b}{3} = r = 6\,370\,291{,}091^m$

2) Halbmesser für gleiche Oberfläche $f = 6\,370\,289{,}510^m$

3) Halbmesser für gleichen Inhalt $\sqrt[3]{a^2 b} = k = 6\,370\,283{,}158^m$

Wie man sieht, sind diese Werte nahezu gleich, und für viele Zwecke auch gleich geeignet.

Für alle Krümmungs-Halbmesser der ganzen Erde hat Dienger in der Schrift „Abbildung krummer Oberflächen, Braunschweig 1858", S. 41 den Satz gefunden, dass das arithmetische Mittel aller Krümmungs-Halbmesser gleich der grossen Halbaxe a ist.

Hiebei ist die ganze Erde in Betracht genommen; wenn man dagegen nur einem begrenzten Teile eine Kugel substituieren will, etwa nur der Nachbarschaft eines Punktes in der Breite φ, so handelt es sich um einen Mittelwert der Krümmungs-Halbmesser in allen Azimuten von einem Punkte aus, und dafür haben wir schon in (23) § 32. S. 197 den „mittleren" Krümmungs-Halbmesser $r = \sqrt{MN}$ eingeführt ohne besondere Theorie.



Obgleich ohne Theorie der geodätischen Linie es nicht möglich ist, diese Wahl von r besser zu begründen, soll doch hier auch ein Satz von Grunert angeführt werden (vgl. die Litteraturangaben am Schlusse), dass der mittlere Krümmungs-Halbmesser $r = \sqrt{M N}$ zugleich das arithmetische Mittel aller Normalschnitts-Krümmungs-Halbmesser R in einem Punkte ist. Dieses wird so bewiesen:

Man hat die Summe aller Werte R nach (1) § 33. S. 199:

$$[R] = \int_0^{2\pi} \frac{M N}{M \sin^2 \alpha + N \cos^2 \alpha} d\alpha$$

und die Anzahl derselben ist entsprechend $n = 2\pi$, also der Mittelwert:

$$\frac{[R]}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M N}{M \sin^2 \alpha + N \cos^2 \alpha} d\alpha$$

Zur Integration führt man eine neue Veränderliche ein:

$$\sqrt{\frac{M}{N}} \operatorname{tang} \alpha = v, \qquad \text{also} \qquad \sqrt{\frac{M}{N}} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = d v$$

wodurch die Integration sich reduziert auf:

$$\int \frac{d v}{1 + v^2} \operatorname{arc\,tang} v$$

Und setzt man noch die Grenzen ein, so findet man:

$$\frac{[R]}{n} = \sqrt{M N} = r \tag{11}$$

Ein zweiter Satz von Grunert heisst:

Das arithmetische Mittel der reciproken Krümmungs-Halbmesser aller Normalschnitte in einem beliebigen Punkte eines jeden Ellipsoids ist das arithmetische Mittel zwischen dem reciproken kleinsten und grössten Krümmungs-Halbmesser in diesem Punkte.

Wenn man den Krümmungs-Halbmesser für das Mittelazimut $\alpha = 45°$ von § 33. S. 200 zuzieht, so hat man hiernach, mit $n = 2\pi$ für Integralsummierung:

$$\frac{1}{n}\left[\frac{1}{R}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{R_{45}}$$

Diese Grunert schen Sätze sind entwickelt in „Grunerts Archiv der Mathematik u. Physik", 40. Teil 1863, S. 259—354, insbesondere S. 312 und 41. Teil 1864, S. 241—296, insbesondere S. 292.

Hiezu gehört ferner: Helmert, „Die mathem. u. physikal. Theorieen der höheren Geodäsie I." Leipzig 1880, S. 63—68. Czuber, „Mittelwerte, die Krümmung ebener Kurven und Krümmungsflächen" betreffend. Grunert-Hoppes, „Archiv der Math. u. Ph." Zweite Reihe. 6. Teil 1888, S. 294—304.

§ 39. Hilfstafeln zu geodätischen Berechnungen mit den Bessel schen Erddimensionen.

Auf die Bessel schen Angaben für die Erddimensionen sind schon zahlreiche Tabellen-Berechnungen gegründet worden, wie die folgende Zusammenstellung zeigt:

Encke. Über die Dimensionen des Erdkörpers nebst Tafeln nach Bessels Bestimmung. Berl. astr. Jahrb. für 1852 S. 318—381 und Separatabdruck: Enckes



astr. Abhandlungen 2. Band, Berlin 1866. Diese Encke schen Tafeln geben zuerst die geocentrische Breite und den geocentrischen Halbmesser, dann *log* $(N:a)$, Meridiangrade und Parallelgrade und Grade senkrecht auf dem Meridian, in Toisen. Ausserdem Tafel II, Meridianbogen vom Äquator bis zur Breite φ in Toisen auf 0,001 Toise.

Steinhauser. Neue Berechnung der Dimensionen des Erdsphäroids. Petermann s geogr. Mitteilungen 1858 S. 465—468.

Bremiker. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit 6 Dezimalstellen 1881, S. 520 bis 524. Gradabteilungen.

Bremiker. Studien über höhere Geodäsie. Berlin 1869. S. 70—81. Krümmungs-Halbmesser für verschiedene Breiten und Azimute.

Projektion tables for the use of the United States navy, Bureau of navigation. Washington, Government printing office, 1869. Polyconische Projection.

Wagner. Die Dimensionen des Erdsphäroids nach Bessel s Elementen. Geographisches Jahrbuch, herausgegeben von Behm. III. Band. Gotha 1870. S. I—LXI. Gradabteilungen u. s. w.

F. G. Gauss. Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst. Berlin 1876 und 2. Aufl. 1893, II. Teil S. 4—25, von $\varphi = 44°$ bis $\varphi = 54°$ Meridianbogen, *log M*, *log N* etc.

Schreiber. Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abteilung der Landesaufaufnahme. Formeln und Tafeln zur Berechnung der geographischen Coordinaten aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten. Erste Ordnung. Berlin 1878. Im Selbstverlage; zu beziehen durch die Königliche Hofbuchhandlung von E. S. Mittler & Sohn, Kochstrasse 69. 70.

Von $\varphi = 47°$ bis $\varphi = 57°$ mit Intervall von 1′ geben diese Tafeln 8 stellig *log* (1) ... *log* (8), wobei die (1), (2) ... mit Umsetzung in unsere Bezeichnungen

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi = \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 \varphi \quad \text{u. s. w.}$$

folgende Bedeutungen haben:

$$(1) = \frac{\varrho}{M} \quad , \quad (2) = \frac{\varrho}{N} \quad , \quad (3) = \frac{V^2}{2\,\varrho} \quad , \quad (4) = \frac{3}{2}\,\frac{\mu}{N}\,\eta^2 t \quad , \quad (5) = \frac{\mu}{3\,r^2}$$

$$(6) = \frac{\mu\,\eta^2}{2\,c^2}(t^2 - 1) \quad , \quad (7) = \frac{\mu}{6}\,\frac{\eta^2}{\varrho^2}(3 + 2\,t^2) \quad , \quad (8) = \frac{\mu\,\eta^2}{12\,\varrho^2}(13 + 3\,t^2)$$

Dieselben Werte *log* (1) bis *log* (4) 7 stellig sind herausgegeben als Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Aufnahme der Reichs-Schutzgebiete, Berlin 1891, für die Breiten $\varphi = 0°$ bis $\varphi = 13°$.

Entsprechende Tafeln für $\varphi = 47°$ bis 57° für zweite Ordnung 7 stellig und für dritte Ordnung 6 stellig.

Albrecht. Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, nebst kurzer Anleitung zur Ausführung derselben, von Prof. Dr. Th. Albrecht, Sektionschef im Königl. Preuss. Geodätischen Institut. 3. Auflage. Berlin 1894. Tafeln über die Gestalt der Erde S. 261—289. (Vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1895“, S. 544—547.)

Helmert. Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie. I. Teil. Leipzig 1880. Anhang S. 621—631 giebt *log W* von $\varphi = 47°\ 0'$

bis 57° 0′ mit Intervall 5′ auf 0·0001, ferner *log* W' 8 stellig auf 0·1 genau, durch den ganzen Quadranten mit $\Delta\,\varphi = 10'$.

Biek-Tillo. Russische Übersetzung von Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, 2. Auflage, übersetzt von A. Biek, Oberlehrer der Geodäsie am Messinstitut des Grossfürsten Constantin. Moskau 1881. Buchhändler N. J. Mamontowa. Diese Übersetzung giebt, an Stelle der Tafel S. 424—427 des Originals, ihrerseits auf S. 652—665 eine von dem Obersten des Russischen Generalstabs A. A. Tillo berechnete Tafel der Coëfficienten für die Gauss schen Mittelbreiten-Formeln; insbesondere *log* [1] und *log* [2] für $\varphi = 34°\ 0'$ bis $\varphi = 70°\ 0'$ mit Intervall 10′ auf 0·1 genau. Es ist jedoch hiebei eine andere Längeneinheit als die Bessel sche zu Grunde gelegt, denn die russischen *log* [1] und *log* [2] haben gegen unsere mit Bessel schen Erddimensionen berechneten *log* [1] und *log* [2] eine konstante Differenz von 371·6.

Rehm. Mitteilungen des K. K. militär-geographischen Instituts, herausgegeben auf Befehl des K. K. Reichs-Kriegs-Ministeriums. III. Band, 1883. Wien 1883. Im Selbstverlage des K. K. milit.-geogr. Instituts. S. 137—177. Tafeln der Krümmungs-Halbmesser des Bessel schen Erdsphäroids für die Breiten von $\varphi = 40'\ 0'$ bis 51° 30′ mit Intervall 1′ auf 0·0001 (vgl. nachfolgend Hartl).

Schols. Geodetische Formules en Tafels, ten gebruike bij de Triangulatie van het eiland Sumatra. Utrecht, J. van Boekhoven, 1884. Diese Tafeln geben von $\varphi = 0°\ 0'$ bis 6° 0′ die Krümmungs-Halbmesser auf 0·1, nebst weiteren Zahlenwerten.

Hermann Wagners Tafeln der Dimensionen des Erdsphäroids, auf Minuten-Dekaden erweitert von A. Steinhauser, K. K. Regierungsrat. Wien 1885. Eduard Hölzel.

Helmert. Veröffentlichung des Kgl. Preuss. Geodätischen Instituts. Lotabweichungen. Heft 1. Formeln und Tafeln u. s. w. Berlin, Druck und Verlag von P. Stankiewicz' Buchdruckerei. 1886. Tafeln im Anhang S. 6—26; hievon giebt S. 18—24 für $\varphi = 30°$ bis 71° 8 stellige Werte *log* [1] und *log* [2], welche bzw. die dekadischen Ergänzungen unserer *log* [2] und *log* [1] sind.

Hartl. Tafeln enthaltend die Ausmasse der Meridian- und Parallelkreis-Bögen, dann die Logarithmen der Krümmungs-Radien des Bessel schen Erdellipsoids, berechnet unter der Leitung von Oberstlieutenant H. Hartl in der geodätischen Abteilung des K. und K. militär.-geographischen Instituts. Separatabdruck aus den Mitteilungen des K. K. militär-geographischen Instituts. XIV. Band. Wien 1895 (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1896", S. 28—30).

Im Anhange unseres Buches, Seite [2] und folgende, sind zahlreiche Hilfstafeln mitgeteilt, welche für diesen Zweck von uns neu und unabhängig berechnet, oder wenigstens vor der teilweisen Entlehnung gründlich revidiert worden sind.

Die geodätische Grundfunktion V bzw. *log* V auf Seite [2]—[7] ist mit den Konstanten der Landesaufnahme (§ 31. S. 191) neu und unabhängig berechnet worden nach den am Schlusse Seite [7] angegebenen Formeln, wie in § 34. ausführlich gezeigt ist; die Rechnung ist 12—13 stellig geführt und dann auf 10 Stellen abgerundet.

Die Tafel Seite [8]—[29] ist von 1° zu 1° ebenfalls neu und unabhängig berechnet, bei der Interpolation sind aber an den Stellen 0°—6° und 47°—57° die Tafeln von Schols und Helmert mitbenützt.

Die besondere Tafel für *log* [1] und *log* [2] auf Seite [30]—[35] ist nur von

45°—46° neu berechnet, und von 47°—56° ein revidierter Abdruck aus Schreibers „Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme".

Die Tafel Seite [36]—[37] für die Längen- und Breitengrade und für die Grad-Abteilungsflächen ist zunächst nach Bremiker und Wagner angesetzt, dann aber eingehend nachgerechnet; die hiebei von uns gefundenen wenigen Fehler sind in dem geographischen Jahrbuch von Behm, VI. Band, 1876, S. 703 mitgeteilt.

Die Meridianbogen-Tafel Seite [38] ist von 44°—56° ein Auszug aus der grösseren Tafel von F. G. Gauss. Der Teil 40°—44° ist dazu berechnet.

Die Trapez-Tafel Seite [42] ist nach den betreffenden Formeln von § 35.—37. berechnet und soweit möglich mit vorhandenen verglichen.

Über die nach diesem folgenden Tafeln Seite [43] und folgende wird an den zugehörigen Stellen des Textes Auskunft gegeben.

Übersicht der Haupt-Bezeichnungen in den Hilfstafeln des Anhangs.

φ = Geographische Breite

$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$

$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 + \eta^2}$, $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi = \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 \varphi$

$M = \frac{a(1 - e^2)}{W^3}$ oder $= \frac{c}{V^3}$ Meridian-Krümmungs-Halbmesser

$N = \frac{a}{W}$ oder $= \frac{c}{V}$ Querkrümmungs-Halbmesser , $\frac{N}{M} = V^2$

$r = \sqrt{MN} = \frac{c}{V^2}$ mittlerer Krümmungs-Halbmesser

$[1] = \frac{\varrho''}{M}$ Meridian-Krümmungs-Coëfficient

$[2] = \frac{\varrho''}{N}$ Querkrümmungs-Coëfficient

Kapitel IV.

Sphärische Dreiecksberechnung.

§ 40. Der sphärische Excess.

Bei der sphärischen Dreiecksberechnung nimmt man den Kugelhalbmesser nach der schon in (23) § 32. S. 197 und nochmals am Schlusse des § 38. S. 226 angegebenen Erklärung an, nämlich:

$$r = \sqrt{MN} = \frac{c}{V^2} \tag{1}$$

Damit werden zuerst die sphärischen Excesse der Dreiecke berechnet.

Die Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks ist stets grösser als 180°; der Überschuss der Winkelsumme über 180° heisst der sphärische Excess.

Bezeichnen wir die Winkel mit α, β, γ und den sphärischen Excess mit ε, so haben wir also die Gleichung:

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ \tag{2}$$

Wenn die drei Winkel α, β, γ gemessen sind, so findet man hiernach auch den Excess ε, jedoch mit den Messungsfehlern der α, β, γ behaftet; es ist deswegen erwünscht, eine unabhängige scharfe Bestimmung von ε zu haben, welche von den kleinen Messungsfehlern der Winkel α, β, γ unabhängig ist, und im Gegenteil dazu dienen soll, diese Winkel α, β, γ in ihrer Summe zu kontrollieren.

Eine solche unabhängige Bestimmung des Excesses ε erhält man durch den Satz, dass der Excess der sphärischen Dreiecksfläche F proportional ist, nämlich:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2}\,\varrho \tag{2a}$$

Man kann diesen Satz mit Hilfe der sphärischen Zweiecke beweisen, und wegen der Wichtigkeit desselben setzen wir den bekannten elementaren Beweis des Satzes hier her:

Fig. 1.

Unter Zwei-Eck versteht man die Fläche zwischen zwei grössten Kreisen, z. B. in Fig. 1. die Fläche:

$$\text{Zwei-Eck } A\,C\,A'\,B\,A = (\alpha, \alpha)$$

da nun die Gesamt-Oberfläche der Kugel $= 4\pi r^2$ ist, so ist die Fläche:

$$\text{Zwei-Eck } (\alpha, \alpha) = \frac{\alpha}{360}\,(4\pi r^2)$$

Wenden wir dieses auch auf die beiden anderen in dem Dreieck $A\,B\,C$ zusammenstossenden Zwei-Ecke an, so haben wir:

$$\text{Zwei-Eck } (\beta, \beta) = \frac{\beta}{360}\,(4\pi r^2)$$

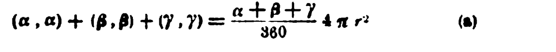
$$\text{Zwei-Eck } (\gamma, \gamma) = \frac{\gamma}{360}\,(4\pi r^2)$$

folglich die Summe:

$$(\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{360}\,4\pi r^2 \tag{a}$$

Indem man nun die Fläche F des sphärischen Dreiecks $A\,B\,C$ einführt, hat man nach dem Anblick von Fig. 1. (noch anschaulicher durch Aufzeichnung auf einem Kugel-Modell):

$$(\alpha, \alpha) = F + A'\,B\,C$$
$$(\beta, \beta) = F + B'\,A\,C$$
$$(\gamma, \gamma) = F + C'\,A\,B$$



$$(\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) = 3\,F + A'\,B\,C + B'\,A\,C + C'\,A\,B$$

Nun ist aber das auf der jenseitigen Kugelfläche von Fig. 1. liegende Dreieck $C'\,A\,B$ flächengleich mit seinem diesseits liegenden Scheiteldreieck $C\,A'\,B'$; man hat also, indem man zugleich $3\,F = 2\,F + F$ schreibt:

$$(\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) = 2\,F + F + A'\,B\,C + B'\,A\,C + C\,A'\,B'$$

Die 4 letzten Glieder dieser Gleichung geben zusammen die halbe Kugelfläche $= 2\pi r^2$, also:

$$(\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) = 2\,F + 2\pi r^2 \tag{b}$$

Nun geben die Gleichungen (a) und (b) zusammen:

$$F = (\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ)\,\frac{\pi}{180^\circ}\,r^2 \tag{c}$$

Wenn man also die Bezeichnung ε nach (1) anwendet, und wenn man zugleich $\frac{180^\circ}{\pi} = \varrho$ schreibt, so findet man aus (c) dieselbe Gleichung wie (2), nämlich, was zu beweisen war:

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = \varepsilon = \frac{F}{r^2}\,\varrho \tag{d}$$



Unter F ist streng genommen die krumme (kugelförmige) Oberfläche des Dreiecks zu verstehen, indessen kann man statt dessen mit genügender Annäherung auch die Fläche $\triangle$ eines ebenen Dreiecks benützen, das aus den Seiten des sphärischen Dreiecks berechnet wird, d. h. man hat:

$$\text{Näherung } \varepsilon = \frac{\triangle}{r^2}\,\varrho \tag{3}$$

(Dasselbe findet man auch durch genäherte Anwendung der sphärisch-trigonometrischen Formel für $tang\ \frac{\varepsilon}{2}$, welche in § 27. S. 166 citiert wurde.)

Fig. 2.
(Massstab 1 : 2 000 000.)

Zu einem Zahlenbeispiele wollen wir das hannoversche Dreieck benützen, welches in den klassischen Abhandlungen von Gauss mehrfach als Beispiel dient, nämlich das in Fig. 2. dargestellte Dreieck:

Inselsberg—Hohehagen—Brocken.

Es sei gegeben:

die Seite Inselsberg—Brocken $b = 105\,972{,}85^m$ (4)

ferner die Dreieckswinkel, genähert, und die geographischen Breiten φ der Eckpunkte, ebenfalls genähert:

Punkt	Dreiecks-Winkel		Geogr. Breite
Inselsberg .	$\alpha = 40°\ 39'\ 30''$	$(25'')$	$50°\ 51'\ 9''$
Hohehagen	$\beta = 86\ \ 13\ \ 59$	$(54'')$	$51\ \ 28\ \ 31$
Brocken . .	$\gamma = 53\ \ \ 6\ \ 46$	$(41'')$	$51\ \ 48\ \ 2$
	Summe $180°\ 0'\ 15''$	$(0'')$	$\varphi = 51°\ 22'\ 34''$ Mittel (5)

Die auf 1″ angegebenen Dreieckswinkel geben die Summe 180° 0′ 15″, d. h. einen Überschuss von 15″ über 180°. Ohne zu wissen, ob das der sphärische Excess ist, oder von Messungs-Fehlern herrührt, verteilen wir, um wenigstens vorläufig eine in sich übereinstimmende ebene Dreiecks-Berechnung zu haben, diese 15″ auf die drei Winkel und erhalten dadurch die oben bei (5) in Klammern beigesetzten Sekundenwerte (25″), (54″), (41″) für die drei Winkel.

Mit diesen Winkeln und der schon bei (4) angegebenen Basisseite b macht man eine genäherte vorläufige Dreiecks-Berechnung nach dem Sinussatz der ebenen Trigonometrie:

$$a = \frac{b}{\sin\beta}\sin\alpha \quad , \quad c = \frac{b}{\sin\beta}\sin\gamma$$

Dabei rechnet man nur etwa mit 5- oder 6-stelligen Logarithmen:

$log\ b$	5.025 195	$log\ b$	5.025 195
$Erg. log\, sin\,\beta$	0.000 940	$Erg. log\, sin\,\beta$	0.000 940
$log\ sin\ \alpha$	9.813 933	$log\ sin\ \gamma$	9.902 983
$log\ a$	4.840 068	$log\ c$	4.929 118

Man hat also nun zusammen:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = 40°\ 39'\ 25'' & log\,a = 4.840\,068 \\ \beta = 86°\ 13'\ 54'' & log\,b = 5.025\,195 \\ \gamma = 53°\ \ 6'\ 41'' & log\,c = 4.929\,118 \end{array}\right\} \tag{6}$$

Damit kann man die Dreiecksfläche dreifach berechnen, denn es ist bekanntlich:

$$\text{Dreiecksfläche } \triangle = \frac{1}{2} a\, b \sin\gamma = \frac{1}{2} a\, c \sin\beta = \frac{1}{2} b\, c \sin\alpha$$

		oder		
log a	4.840 068		*log a*	4.840 068
log b	5.025 195		*log c*	4.929 118
log sin γ	9.902 983 — 10		*log sin* β	9.999 060 — 10
log 0,5	9.698 970 — 10		*log* 0,5	9.698 970 — 10
log $\triangle$	9.467 216		*log* $\triangle$	9.467 216 (7)

Nach diesem braucht man den mittleren Krümmungs-Halbmesser für die Mittelbreite des Dreiecks. Diese Mittelbreite wurde schon unter (5) angegeben $\varphi = 51° 22' 34''$, und damit entnimmt man aus der Tafel Seite [20] des Anhangs durch Interpolation den Wert *log r* oder auch sofort:

$log \frac{1}{r^2}$	6.390 076 — 20	
hiezu $log\, \varrho$	5.314 425	
und von (7) $log \triangle$	9.467 216	
$log\, \varepsilon$	1.171 717	$\varepsilon = 14{,}850''$ (8)

Damit sind die oben unter (5) gegebenen Winkel, insofern sie nur auf 1″ genau angesetzt sind, in ihrer Summe bestätigt. Die genaueren Winkel und die genauere Berechnung der Dreiecksseiten werden wir in § 41.—§ 42. kennen lernen.

Zu der einfachen Excess-Berechnung, welche im vorstehenden Beispiele in aller Ausführlichkeit gegeben ist, kann man noch einige Bemerkungen machen. Für ein Dreieck mit den Seiten *a*, *b* und dem eingeschlossenen Winkel γ ist der Excess:

$$\varepsilon = \frac{\varrho}{2\, r^2} a\, b \sin\gamma \tag{9}$$

und deswegen schreibt man für häufigeren Gebrauch die Logarithmen von $\frac{\varrho}{2\, r^2}$ tabellarisch heraus; zur Übersicht stellen wir zusammen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi = 45° \quad & log \frac{\varrho}{2\, r^2} = 1.40411 - 10 \\ 50° \quad & log \frac{\varrho}{2\, r^2} = 1.40361 - 10 \\ 55° \quad & log \frac{\varrho}{2\, r^2} = 1.40312 - 10 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Zur weiteren Übersicht der Verhältnisse kann man auch berechnen:

Fläche des Dreiecks	Sphärischer Excess
1 Quadrat-Kilometer	$\varepsilon = 0{,}00507''$
1 Quadrat-Meile	$\varepsilon = 0{,}279$
gleichseitiges Dreieck mit Seiten von $1° = 15$ geogr. Meilen $= 111^{km}$	$\varepsilon = 27''$

Die letzte Annahme eines Dreiecks von 111^{km} Seite ist wohl das äusserste für Landes-Vermessungen; schon das Gauss sche Dreieck Inselsberg-Hohehagen-Brocken, das wir bei (8) als Beispiel benützten, mit rund $\varepsilon = 15''$, ist eines der grössten

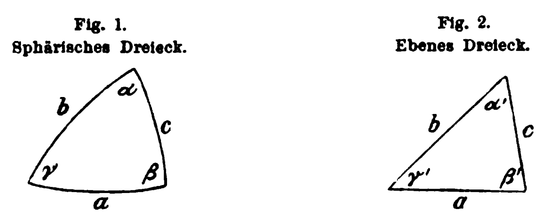
deutschen Dreiecke, das wir deswegen auch schon in der Zusammenstellung Seite 22 erwähnt haben.

Die grössten Dreiecke, welche die Geodäsie kennt, nämlich die auf Seite 23 dargestellten Verbindungsdreiecke zwischen Spanien und Algier über das mittelländische Meer hinweg, haben geodätische Excesse von bzw. rund: 54″ , 1′ 11″ , 44″ , 1′ 0″.

Bei so grossen Dreiecken darf man aber nicht mehr bloss sphärisch rechnen; wir werden in einem späteren Kapitel darauf zurückkommen.

§ 41. Der Legendre sche Satz.

Wir betrachten ein geodätisches Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ, wie in Fig. 1. dargestellt ist.



Wenn das sphärische Dreieck auf einer Kugel vom Halbmesser r liegt, so entsprechen den Seiten a b c gewisse Erd-Centriwinkel, wie aus folgender Übersicht zu ersehen ist:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Seiten-Längen (in Metermass)} \;\ldots\ldots & a, & b, & c \\ \text{Erd-Centriwinkel in analytischem Mass} \;\ldots & \dfrac{a}{r}, & \dfrac{b}{r}, & \dfrac{c}{r} \\ \text{,, \quad ,, \quad ,, geometrischem Mass} \;. & \dfrac{a}{r}\varrho, & \dfrac{b}{r}\varrho, & \dfrac{c}{r}\varrho \end{array}\right\} \quad (1)$$

Man könnte nun mit diesen Erd-Centriwinkeln und den Winkeln α, β, γ, welche die Bögen a, b, c auf der Kugelfläche unter sich bilden, das sphärische Dreieck nach den bekannten strengen Formeln der sphärischen Trigonometrie auflösen; man thut das aber für geodätische Zwecke nicht, weil die Erd-Centriwinkel sehr klein sind, und deswegen sich viel bequemer in Reihen-Entwicklungen und Näherungs-Formeln behandeln lassen.

Die älteste und beliebteste dieser Verfahrungsarten ist der von Legendre in Paris im Jahre 1787 gefundene und nach ihm benannte Satz, welcher heisst:

> Ein kleines sphärisches Dreieck kann näherungsweise wie ein ebenes Dreieck mit denselben Seiten berechnet werden, wenn man als Winkel des ebenen Dreiecks die um je ein Drittel des sphärischen Excesses verminderten Winkel des sphärischen Dreiecks nimmt.

Diesem Satze entspricht das oben in Fig. 2. gezeichnete ebene Dreieck, das dieselben Seiten a, b, c wie das sphärische Dreieck Fig. 1. hat, und dessen Winkel α', β', γ' zunächst noch unbestimmt gelassen sind.



Um den genannten Satz zu beweisen, schreiben wir für das sphärische Dreieck die Cosinus-Gleichung an:

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\alpha$$

oder $$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}} \, .$$

Nun werden alle kleinen Winkel nach Potenzen entwickelt (vgl. die Reihen-Formeln für $\sin x$ und $\cos x$ § 28. S. 172), nämlich bis zur 4. Potenz einschliesslich:

$$\cos\alpha = \frac{\left(1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{24r^4}\right) - \left(1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{24r^4}\right)}{\left(\frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3}\right)\left(\frac{c}{r} - \frac{c^3}{6r^3}\right)}$$

Wenn man die hier vorkommenden Klammern ausmultipliziert, dabei immer die Glieder von höherer als der 4. Ordnung vernachlässigt, so hat man:

$$\left(1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{24r^4}\right) = 1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4} - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{b^2c^2}{4r^4} + \frac{c^4}{24r^4}$$

$$= 1 - \frac{b^2+c^2}{2r^2} + \frac{b^4+c^4}{24r^4} + \frac{b^2c^2}{4r^4}$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2} + \frac{a^4-b^4-c^4}{24r^4} - \frac{b^2c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2}\left(1 - \frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)}$$

Der Nenner $\left(1 - \frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)$ wird hinreichend genähert dadurch berücksichtigt, dass man statt dessen in dem Zähler einen Faktor $\left(1 + \frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)$ zusetzt, und wenn man zugleich überall einen Faktor r^2 als gemeinsam weglässt, hat man:

$$\cos\alpha = \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24r^2bc}\right)\left(1 + \frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)$$

die beiden Klammern multipliziert, mit Weglassung alles dessen, was über r^2 geht, führen auf die Gleichung:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24r^2bc} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\,\frac{b^2+c^2}{6r^2} \quad (2)$$

Nun giebt das ebene Dreieck Fig. 2. nach dem Cosinus-Satz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha' \quad \text{oder} \quad \cos\alpha' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad (3)$$

Dieses mit (2) zusammen giebt:

$$\cos\alpha = \cos\alpha' + \frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24r^2bc} + \frac{b^4+c^4+2b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2}{12r^2bc}$$

Die beiden Teile zusammen gefasst geben:

$$\cos\alpha = \cos\alpha' + \frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24r^2bc} \quad (4)$$

Wir lassen diese Gleichung zunächst stehen und betrachten den Zähler des Bruches; dieser Zähler steht in naher Verwandtschaft zu dem Inhalte $\triangle$ des ebenen Dreiecks. Es ist bekanntlich nach dem Heron schen Satze:

$$\triangle = \sqrt{\frac{s}{2}\,\frac{(s-a)}{2}\,\frac{(s-b)}{2}\,\frac{(s-c)}{2}}$$

wobei $s = a + b + c$, $s - a = -a + b + c$ u. s. w. folglich:

$$\triangle^2 = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$$

Hiebei ist: $(a+b+c)(-a+b+c) = -a^2 + b^2 + c^2 + 2bc$

und $(a-b+c)(+a+b-c) = \quad a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$

Folglich: $16\triangle^2 = (-a^2 + b^2 + c^2 + 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)$

und indem man auch diese zwei Klammern ausmultipliziert und ordnet, (wobei alles mit ungeraden Potenzen sich hebt) so findet man:

$$16\triangle^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 \tag{5}$$

Man hat also aus (4) und (5):

$$\cos\alpha - \cos\alpha' = -\frac{16\triangle^2}{24\,r^2\,b\,c} \tag{6}$$

Nun ist aber in erster Näherung:

$$\cos\alpha - \cos\alpha' = -(\alpha - \alpha')\sin\alpha' + \ldots \tag{7}$$

was man entweder geradezu als Differential-Formel nach § 29. S. 179 einsehen, oder etwa auch goniometrisch so begründen kann:

$$\cos\alpha - \cos\alpha' = -2\sin\frac{\alpha - \alpha'}{2}\sin\frac{\alpha + \alpha'}{2}$$

d. h. wenn α und α' sehr nahe gleich sind:

$$\cos\alpha - \cos\alpha' = -(\alpha - \alpha')\sin\alpha' \tag{7a}$$

Setzt man dieses (7) bzw. (7a) in (6), so erhält man:

$$\alpha - \alpha' = \frac{2}{3}\,\frac{\triangle^2}{r^2\,b\,c\sin\alpha'} \tag{8}$$

Es ist aber auch andererseits im ebenen Dreieck:

$$b\,c\sin\alpha' = 2\triangle \tag{9}$$

und damit wird (8): $\alpha - \alpha' = \frac{1}{3}\frac{\triangle}{r^2}$ bzw. $\alpha - \alpha' = \frac{1}{3}\frac{\triangle}{r^2}\varrho$ (10)

Die erste hier in (10) geschriebene Form gilt für analytisches Mass, die zweite für geometrisches Mass.

Oder wenn man nach (3) § 40. S. 232 den sphärischen Excess ε einführt, so hat man:

$$\alpha - \alpha' = \frac{1}{3}\varepsilon \tag{11a}$$

und entsprechend:

$$\beta - \beta' - \frac{1}{3}\varepsilon \tag{11b}$$

$$\gamma - \gamma' = \frac{1}{3}\varepsilon \tag{11c}$$

Summe: $\alpha + \beta + \gamma - 180° = \varepsilon$ (12)

Damit ist der oben S. 234 in Worten ausgesprochene Satz bewiesen.

Zu einem Zahlen-Beispiele nehmen wir wieder das klassische Dreieck, das wir schon im vorigen § 40. S. 232 benützt haben, nämlich nun mit scharfen Winkel-Werten:

	sphärisch	eben (Leg.-Satz.)	
Inselsberg	$\alpha = 40° 39' 30{,}380''$	$\alpha' = 40° 39' 25{,}430''$	
Hohehagen	$\beta = 86 \quad 13 \quad 58{,}840$	$\beta' = 86 \quad 13 \quad 53{,}890$	(13)
Brocken	$\gamma = 53 \quad 6 \quad 45{,}630$	$\gamma' = 53 \quad 6 \quad 40{,}680$	
Summe:	$180° \; 0' \; 14{,}850''$	$180° \; 0' \; 0{,}000''$	

$$\varepsilon = 14{,}850''$$

$$\frac{\varepsilon}{3} = 4{,}950''$$

Die eine gegebene Seite sei $b = 105\,972{,}850^m$. (14)

Damit macht man eine Berechnung, wie wenn das Dreieck eben wäre, nach dem Sinus-Satze der ebenen Trigonometrie scharf mit 7—8stelligen Logarithmen, weshalb wir die ganze Rechnung hersetzen wollen:

$\log b$	5.025 1946·1	oder	$\log b$	5.025 1946·1
$\log \sin \beta'$	9.999 0600·0		$Erg. \log \sin \beta'$	0.000 9400·0
$\log (b : \sin \beta')$	5.026 1346·1		$\log (b : \sin \beta')$	5.026 1346·1
$\log \sin \alpha'$	9.813 9344·8		$\log \sin \gamma'$	9.902 9830·6
$\log a$	4.840 0690·9		$\log c$	4.929 1176·7

$a = 69194{,}105^m$ $\qquad$ $c = 84941{,}060^m$ (15)

Bemerkung über die Schärfe der Rechnung.

Das vorstehende Beispiel ist mit 3 Dezimalen der Sekunde, d. h. auf 0,001″ genau gerechnet. Es geschieht dieses häufig, wenn auch die Messungen selbst viel weniger sicher sind. Hiebei soll die letzte Dezimale keine selbständige Bedeutung haben, sondern nur die vorletzte Dezimale vor Abrundungs-Fehlern schützen. Es ist keine Frage, dass oft mit solchen 0,001″ Überfluss an Ziffern geschrieben und gedruckt wird, aber bei langen Ausgleichungs-Rechnungen kann man genötigt sein, von vorn herein auf 0,001″ genau und vielleicht noch schärfer zu rechnen, wenn man am Schlusse 0,01″ noch sicher haben will, bei kürzeren trigonometrischen Berechnungen genügt 0,01″ als letzte Rechenstelle.

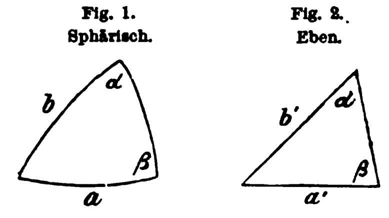
Entsprechende Genauigkeit ist bei der logarithmischen Rechnung anzuwenden. Unsere Zahlen-Beispiele sind meist 8stellig, d. h. mit 0.000 0000·1 als letzter logarithmischer Rechenstelle geführt; die letzte Stelle 0·1 ist teils mit Hilfe des 10stelligen „Thesaurus logarithmorum", teils auch nur durch Benützung der Abrundungs-Merkmale in der Schrön schen 7stelligen Logarithmen-Tafel erhalten, und dient dann (ebenso wie 0,001″ bei den Winkeln) nur als Sicherung für die vorhergehende 7. Stelle.

§ 42. Die Additamenten-Methode.

Ein zweites Näherungs-Verfahren zur Berechnung sphärischer Dreiecke, deren Seiten im Vergleich zu dem Kugel-Halbmesser klein sind, ist am Anfang dieses Jahrhunderts zuerst in Bayern eingeführt, und dann auch bei den übrigen süddeutschen Landes-Vermessungen allgemein angewendet worden. Das Verfahren wurde mit dem Namen „Additamenten-Methode" bezeichnet, weil kleine Korrektions-Grössen häufig zu den Logarithmen addiert (allerdings umgekehrt auch subtrahiert) werden.

Während beim Legendre schen Satz ein ebenes Hilfsdreieck benützt wurde, dessen Seiten denen des sphärischen Dreiecks gleich sind, und dessen Winkel ver-

schieden von den Winkeln des sphärischen Dreiecks angenommen werden mussten gehen wir nun umgekehrt darauf aus, ein ebenes Hilfsdreieck zu suchen, welches zwei Winkel mit dem sphärischen Dreieck gemein, dafür aber andere Seiten hat. Mit Beziehung auf Fig. 1. und Fig. 2. denken wir uns ein sphärisches Dreieck, gegeben mit den Seiten a und b und den Gegenwinkeln α und β, und konstruieren hiezu ein ebenes Hilfsdreieck, welches dieselben Winkel α und β hat wie das sphärische Dreieck, aber damit notwendig andere Seiten a', b' haben muss.



Nach dem Sinus-Satze für das sphärische Dreieck und nach dem Sinus-Satze für das ebene Dreieck haben wir die zwei Gleichungen:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\frac{a}{r}}{\sin\frac{b}{r}} \quad \text{und} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a'}{b'} \tag{1}$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\sin\frac{a}{r}}{\sin\frac{b}{r}} = \frac{\frac{a}{r} - \frac{a^3}{6\,r^3} + \dots}{b - \frac{b^3}{6\,r^3} + \dots} \tag{2}$$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a - \frac{a^3}{6\,r^2} + \dots}{b - \frac{b^3}{6\,r^2} + \dots} \tag{3}$$

Diese Gleichung ist befriedigt, wenn man setzt:

$$a' = a - \frac{a^3}{6\,r^2} \quad \text{und} \quad b' = b - \frac{b^3}{6\,r^2}$$

oder allgemein für irgend eine Dreiecks-Seite s hat man:

$$s' = s - \frac{s^3}{6\,r^2} \tag{4}$$

Der so bestimmte Wert $\frac{s^3}{6\,r^2}$ ist das lineare Additament für die Seite s, und wenn man den Halbmesser r kennt, kann man eine Tafel der Werte $\frac{s^3}{6\,r^2}$ berechnen, z. B. für die Mittelbreite $\varphi = 50°$ hat man:

$$\log r = 6.804\,894 \qquad \log\frac{1}{6\,r^2} = 5.612\,062$$

Damit ist zur Übersicht folgendes berechnet:

$$\left.\begin{array}{lllllllll} s & = 10\,000^m & 20\,000^m & 30\,000^m & 40\,000^m & 50\,000^m & 60\,000^m & 80\,000^m & 100\,000^m \\ \frac{s^3}{6\,r^2} & = \;\; 0{,}004^m & 0{,}033^m & 0{,}111^m & 0{,}262^m & 0{,}512^m & 0{,}884^m & 2{,}096^m & 4{,}093^m \end{array}\right\} \tag{5}$$

Wenn also z. B. eine Dreiecksseite $s = 40\,000^m$ vorliegt, so wird das zugehörige $s' = 40\,000 - 0{,}262 = 39\,999{,}738^m$, und darauf könnte man eine Dreiecks-Berechnung mit sphärischen Winkeln gründen, welche nun ganz die Form einer ebenen Rechnung hat.

Indessen thut man dieses in dieser Form gewöhnlich nicht geradezu, sondern da man doch logarithmisch rechnet, bringt man auch die Additamente in logarithmische Form, und dazu gehen wir nochmals auf (1) und (3) zurück und finden als allgemeine Beziehung zwischen einer Dreiecks-Seite s und der reduzierten Seite s' folgendes:

$$s' = r \sin \frac{s}{r}, \text{ oder } \frac{s'}{r} = \sin \frac{s}{r} \tag{6}$$

also logarithmisch:

$$\log \frac{s'}{r} = \log \sin \frac{s}{r} = \log \left(\frac{s}{r} - \frac{s^3}{6 r^3} + \frac{s^5}{120 r^5} - \dots \right) \tag{7}$$

Dabei haben wir noch die 5. Ordnung in der Reihe beibehalten, um nachher beurteilen zu können, ob das Glied 5. Ordnung noch von Einfluss ist.

Entwickelt man den letzten Ausdruck nach der logarithmischen Reihe, so erhält man:

$$\log \sin \frac{s}{r} = \log \frac{s}{r} + \log \left(1 - \frac{s^2}{6 r^2} + \frac{s^4}{120 r^4}\right)$$

$$\log \sin \frac{s}{r} = \log \frac{s}{r} + \mu \left(- \frac{s^2}{6 r^2} + \frac{s^4}{120 r^4}\right) - \frac{\mu}{2} \left(- \frac{s^2}{6 r^2} + \dots\right)^2$$

$$\log \sin \frac{s}{r} = \log \frac{s}{r} - \frac{\mu s^2}{6 r^2} - \frac{\mu}{180} \frac{s^4}{r^4}$$

Oder wenn man wieder s' nach (6) benützt:

$$\log s - \log s' = \frac{\mu s^2}{6 r^2} + \frac{\mu}{180} \frac{s^4}{r^4} \tag{8}$$

Für die Mittelbreite $\varphi = 50°$ hat man hiefür, nach Seite [20] des Anhangs:

$$\log \frac{\mu}{6 r^2} = 5.24985 - 20 \qquad \log \frac{\mu}{180 r^4} = 0.16294 - 40$$

oder für Einheiten der 7. Logarithmen-Dezimale:

$$\log \frac{\mu}{6 r^2} = 2{\cdot}24985 - 10 \qquad \log \frac{\mu}{180 r^4} = 7{\cdot}16294 - 30$$

Für $s = 100\,000^m$ oder $\log s = 5.00000$ als Beispiel genommen, giebt dieses:

$$\frac{\mu}{6 r^2} s^2 = 0.000\,0177{\cdot}8 \qquad \frac{\mu}{180 r^4} s^4 = 0.000\,0000{\cdot}001$$

Daraus folgt, dass für gewöhnliche Dreiecks-Seiten das zweite Glied der Formel (8) unmerklich ist, und dass man deswegen bei dem ersten Gliede von (8) stehen bleiben kann.

Indem wir das logarithmische Additament mit A bezeichnen, schreiben wir mit Weglassung des zweiten Gliedes, zur Zusammenfassung:

$$A = \log s - \log s'$$

oder $A = \log \frac{s}{r} - \log \sin \frac{s}{r} = \frac{\mu}{6 r^2} s^2$ wo $\log \frac{\mu}{6 r^2} = 2{\cdot}249\,846 - 10$ für $\varphi = 50°$ (9)

Damit ist die Hilfstafel auf Seite [43] des Anhangs berechnet, und zwar in zweifacher Form, I. als Funktion von $\log s$, mit der Annahme $\log r = 6.804\,894$ für $\varphi = 50°$ und II. als Funktion von $\log \frac{s}{r}$.

Die erste Tafel I., d. h. der obere Teil von Seite [43], ist die bequemere für

Dreiecks-Berechnung, weil man geradezu mit *log s* (für *s* in Metern) einzugehen hat, während man im Falle II., d. h. im unteren Teile von Seite [43], zuvor $log \frac{s}{r}$ bilden muss, das man sonst nicht braucht. Die Tafel II. ist aber andererseits allgemeiner brauchbar, weil sie nicht wie I. an eine bestimmte Annahme für den Halbmesser *r* gebunden ist, und weil sie auch noch für anderes Mass als Meter (z. B. Fusse, Toisen, Ruten u. s. w. bei älteren Triangulierungen) anwendbar ist.

Zu einem Zahlen-Beispiel nehmen wir wieder das klassische Dreieck des vorigen § 41. S. 237:

$$\left.\begin{array}{llrrr} \text{Inselsberg} & \alpha = & 40^\circ & 39' & 30{,}380'' \\ \text{Hohehagen} & \beta = & 86 & 13 & 58{,}840 \\ \text{Brocken} & \gamma = & 53 & 6 & 45{,}630 \\ \hline & & 180^\circ & 0' & 14{,}850'' \end{array}\right\} \qquad (10)$$

$$\text{Basis } b = 105\,972{,}850^m \qquad log\, b = 5.025\,1946{\cdot}1 \qquad (11)$$

Hiezu braucht man das logarithmische Additament, das aus der Hilfstafel I. von Seite [43] des Anhangs für $log\, s = 5.0252$ durch Interpolation $= 199{\cdot}7$ entnommen werden kann. Da jedoch jene Hilfstafel I. Seite [43] für die Mittelbreite $\varphi = 50^\circ$ gilt, während unser Dreieck die Mittelbreite $\varphi = 51^\circ\, 22{,}6'$ hat, mit $log\, r = 6.804962$. und da unsere Dreiecks-Seiten sehr gross sind, so berechnen wir diesesmal das Additament A besonders:

$$\begin{array}{r|l} log\, b^2 & 10.05039 \\ log\,(\mu : 6\, r^2) & 2{\cdot}24971 \\ \hline log\, A_b & 2.30010 \end{array} \qquad A_b = 199{\cdot}57 \qquad (12)$$

Dieses ist nur wenig verschieden von dem aus der Tafel entnommenen 199·7.

Nun hat man eine logarithmische Berechnung im wesentlichen wie in der Ebene, nämlich nach (10), (11), (12):

$log\, b$	5.025 1946·1				
Logar. Additament	— 199·6				
$log\, b'$	5.025 1746·5		$log\, b'$	5.025 1746·5	
$log\, sin\, \beta$	9.999 0606·9	oder	$Erg.\, log\, sin\, \beta$	0.000 9393·1	
$log\,(b' : sin\, \beta)$	5.026 1139·6			5.026 1139·6	
$log\, sin\, \alpha$	9.813 9466·1		$log\, sin\, \gamma$	9.902 9908·8	
$log\, a'$	4.840 0605·7		$log\, b'$	4.929 1048·4	
Logar. Additament	+ 85·1		Logar. Add.	+ 128·2	(13)
$log\, a$	4.840 0690·8		$log\, c$	4.929 1176·6	

$$a = 69\,194{,}105^m \qquad\qquad b = 84\,941{,}060^m \qquad (14)$$

Dieses stimmt hinreichend mit (15) § 41. S. 237.

Die soeben bei (13) gebrauchten Additamente entnimmt man wieder aus der Hilfstafel I. von Seite [43] des Anhangs, oder, wenn man die letzte Stelle ganz scharf haben will, berechnet man dieselben ebenso wie vorher bei (12).

Vergleicht man die Rechnung nach dieser Additamenten-Methode mit der Rechnung nach dem Legendre schen Satze, in Hinsicht auf Bequemlichkeit, Übersichtlichkeit u. dergl., so wird man etwa sagen können:



Der Legendre sche Satz empfiehlt sich bei einem einzelnen Dreieck oder bei seltener Anwendung, durch seine Unabhängigkeit von allen besonderen Hilfen, denn den Excess ε muss man der Winkelprobe wegen bei dem anderen Verfahren doch auch kennen, und der Legendre sche Satz selbst, d. h. die Verteilung $\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$ ist immer im Gedächtnis.

Dagegen bei ganzen Dreiecks-Netzen, mit vielen zusammenhängend zu rechnenden Dreiecken, ist die Additamenten-Methode vorteilhafter. Man reduziert zunächst nur den Logarithmus der Basis des Netzes ($log\, b' = log\, b - A_b$), dann rechnet man das ganze Dreiecks-Netz mit den sphärischen Winkeln durch, und erhält dadurch zunächst lauter reduzierte Werte $log\, a'$, $log\, c'$ u. s. w., die man dann aber nachher alle auf einmal mit der Additamenten-Tafel auf $log\, a$, $log\, c$ u. s. w. reduzieren kann.

Ein Vorteil des Additamenten-Verfahrens besteht auch darin, dass man nur eine Tabelle der Dreiecks-Winkel α, β, γ ... führen muss, während für den Legendre schen Satz eine zweite Tabelle der α', β', γ' nötig ist, welche nicht nur die Akten vermehrt, sondern auch Veranlassung zu Irrtümern geben kann, wenn nachher zur Coordinaten-Berechnung u. dergl. wieder die sphärischen Winkel selbst gebraucht werden.

Zusammenhang zwischen dem Legendre schen Satze und der Additamenten-Methode.

Diese beiden Rechnungs-Arten beruhen auf Reihen-Entwicklungen sphärischer Formeln bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$, und es muss deshalb möglich sein, beide Rechnungen in ihren Formeln gegenseitig auseinander abzuleiten, was wir nun noch zeigen wollen.

Mit Annahme der bisherigen Bezeichnungen hat man nach dem Legendre schen Satze:

$$\frac{a}{b} = \frac{sin\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\right)}{sin\left(\beta - \frac{\varepsilon}{3}\right)} = \frac{sin\,\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\cos\alpha}{sin\,\beta - \frac{\varepsilon}{3}\cos\beta} = \frac{sin\,\alpha\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\,cotg\,\alpha\right)}{sin\,\beta\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\,cotg\,\beta\right)} \tag{15}$$

Nun ist $\varepsilon = \frac{\triangle}{r^2}$, und wenn man in den Korrektions-Gliedern ebene und sphärische Winkel vertauscht, so hat man:

$$2\,b\,c\,cos\,\alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

$$b\,c\,sin\,\alpha = 2\triangle$$

also $$cotg\,\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\triangle}\,,\quad \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\triangle}{3\,r^2} \tag{16}$$

$$\frac{\varepsilon}{3}\,cotg\,\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{12\,r^2} \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon}{3}\,cotg\,\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{12\,r^2}$$

Damit giebt (15):

$$\frac{sin\,\alpha}{sin\,\beta} = \frac{a}{b}\,\frac{\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{12\,r^2}\right)}{\left(1 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{12\,r^2}\right)} = \frac{a}{b}\left(1 + \frac{1}{12\,r^2}(2\,b^2 - 2\,a^2)\right)$$

Dieses kann man auch so schreiben:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}\left(1 - \frac{a^2}{6\,r^2}\right)\left(1 + \frac{b^2}{6\,r^2}\right) = \frac{a}{b}\,\frac{1 - \dfrac{a^2}{6\,r^2}}{1 - \dfrac{b^2}{6\,r^2}}$$

Dieses stimmt nach (1), (3) § 42. S. 238 mit der Additamenten-Methode überein; es ist also der oben angegebene Zusammenhang bewiesen.

Die „Additamenten-Methode" wurde in Bayern eingeführt durch Soldner. Weiteres hierüber findet man in dem amtlichen Werke: „Die Bayerische Landes-Vermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage. München 1873, S. 263 u. ff. (auf S. 262 u. ff. Abdruck einer Abhandlung Soldner, vom 5. Mai 1810). Vgl. auch: Bohnenberger, „De computandis dimensionibus trigonometricis in superficie terrae sphaeroidica institutis". Tubingae 1826, § 11.

Ausführlichere Additamenten-Tafeln als unsere Tafel Seite [43] finden sich in manchen geodätischen Werken, z. B. in:

Bremiker, Studien über höhere Geodäsie, Berlin 1869. Anhang Tafel III., Reduktion von Bogen auf Sehne, d. h. 0,25 A, wenn A der Wert unserer Tafel II. Seite [43].

Bremiker, Tafel zur Verwandlung von Log. Bogen in Log. Tangente. Wissenschaftliche Begründung der Rechnungs-Methoden des Centralbureaus der Europäischen Gradmessung. Beilage zum Generalbericht d. Europ. Gr. für 1870 (giebt $T = 2\,A$).

Auch die Zahlen S, welche in der Bremikerschen und Schrönschen 7-stelligen Logarithmentafel und auch in anderen Tafeln am Fuss jeder Seite der Logarithmen der natürlichen Zahlen angegeben sind, stehen in einfacher Beziehung zu unseren Additamenten. Es ist nämlich dieses S:

$$S = \log\frac{1}{\varrho''} - A = \log\sin 1'' - A$$

z. B. in Schrön S. 29 findet man für 0° 36′ 0″ $S = 4.685\,5669{\cdot}3$. Dabei ist $\log\,(1:\varrho) = 4.685\,5748{\cdot}7$ und unsere Tafel II. auf Seite [43] giebt für den Centriwinkel 0° 36′ 0″ den Wert $A = 79{\cdot}4$, was die Differenz der beiden soeben geschriebenen Zahlen ist. Für die Zahlen T der Logarithmentafeln gilt die entsprechende Gleichung:

$$T = \log\frac{1}{\varrho''} + 2\,A = \log\sin 1'' + 2\,A$$

§ 43. Verschiedene sphärische Aufgaben.

Nachdem wir die Reduktion eines sphärischen Dreiecks auf ein ebenes Hilfsdreieck in zweifacher Weise kennen gelernt haben, können wir auch andere Aufgaben als die zuerst behandelte Berechnung eines Dreiecks aus einer Seite und allen Winkeln lösen. Wir wollen hier noch die Bestimmung eines sphärischen Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel und dann die sphärische Aufgabe des Rückwärts-Einschneidens vornehmen:

I. Bestimmung eines sphärischen Dreiecks b, c, α nach dem Legendreschen Satz.

Wenn zwei Seiten b, c und der eingeschlossene Winkel α gegeben sind, so kann man daraus sofort den Excess ε berechnen:

$$\varepsilon = b\,c\sin\alpha\,\frac{\varrho}{2\,r^2} \tag{1}$$

Damit hat man auch die Summe der beiden andern Winkel β und γ:

$$\beta + \gamma = 180° + \varepsilon - \alpha \tag{2}$$

Betrachtet man nun das Legendre sche ebene Hilfsdreieck und berücksichtigt, dass:

$$\left(\beta - \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(\gamma - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \beta - \gamma$$

so findet man nach den Gauss schen Gleichungen der ebenen Trigonometrie:

$$tang\,\frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{(b - c)\cos\dfrac{\alpha - {}^1/_3\,\varepsilon}{2}}{(b + c)\sin\dfrac{\alpha - {}^1/_3\,\varepsilon}{2}} = \frac{Z}{N} \tag{3}$$

$$a = \frac{Z}{\sin\dfrac{\beta - \gamma}{2}} = \frac{N}{\cos\dfrac{\beta - \gamma}{2}} \tag{4}$$

Aus (2) und (4) hat man also $\beta + \gamma$ und $\beta - \gamma$, folglich auch β und γ und mit Probe a aus (4), womit die Aufgabe gelöst ist.

II. Bestimmung eines sphärischen Dreiecks b, c, α nach der Additamenten-Methode.

Wenn b und c logarithmisch gegeben sind, so ist folgende Rechnung bequemer als die vorige:

Für ein ebenes Dreieck mit den Seiten b' und c' und den Winkeln β und γ hat man, mit Einführung eines Hilfswinkels λ folgendes:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b'}{c'} = \frac{1}{tang\,\lambda}$$

$$\frac{\sin\beta - \sin\gamma}{\sin\beta + \sin\gamma} = \frac{1 - tang\,\lambda}{1 + tang\,\lambda}$$

$$tang\,\frac{\beta - \gamma}{2} = tang\,\frac{\beta + \gamma}{2}\,cotg\,(\lambda + 45^\circ)$$

Für das sphärische Dreieck setzen wir entsprechend:

$$\log b' = \log b - A_b \quad , \quad \log c' = \log c - A_c$$

wobei A_b und A_c die Additamente von b und c sind. Man rechnet nun den Hilfswinkel λ nach der Formel:

$$cotg\,\lambda = \frac{b'}{c'} \tag{5}$$

dann bestimmt man den sphärischen Excess ε durch eine vorläufige Dreiecks-Berechnung, und hat dann:

$$\beta + \gamma = 180^\circ + \varepsilon - \alpha$$

$$tang\,\frac{\beta - \gamma}{2} = tang\,\frac{\beta + \gamma}{2}\,cotg\,(\lambda + 45^\circ) \tag{6}$$

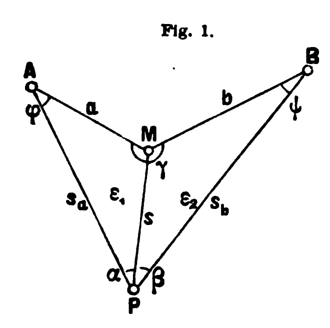
Aus $\dfrac{\beta + \gamma}{2}$ und $\dfrac{\beta - \gamma}{2}$ erhält man β und γ.

Die dritte Seite a kann man sodann sowohl nach dem Legendre schen Satz als auch nach der Additamenten-Methode bestimmen.

III. Rückwärts-Einschneiden.

Wir nehmen in Fig. 1. S. 244 dieselben Berechnungen wie früher für die ebenes Rückwärts-Einschneiden in Band II, 4. Aufl. 1893, § 89. und wir haben auch nur wenig an der früheren Rechnung zu ändern.

Drei Punkte A, M, B sind gegenseitig festgelegt durch die Seiten $AM = a$, $MB = b$ und den Winkel $BMA = \gamma$; ein Punkt P soll durch Messung der Winkel α und β gegen A, M, B festgelegt werden.



Man löst diese Aufgabe zunächst vorläufig genähert auf, indem man die Figur als eben behandelt (d. h. man rechnet zuerst nach Band II, 4. Aufl. 1893, § 89). Dann hat man so viel Anhalt, um die sphärischen Excesse ε_1 und ε_2 der beiden Dreiecke PAM und PMB zu berechnen, und damit ist auch die Summe $\varphi + \varphi$ bestimmt, nämlich:

$$\varphi + \psi = 360° + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - (\alpha + \beta + \gamma) \qquad (7)$$

Mit den logarithmischen Additamenten A_a und A_b wird reduziert:

$$log\, a - A_a = log\, a' \quad \text{und} \quad log\, b - A_b = log\, b'$$

dann lässt sich die Rechnung wie für ein ebenes Viereck weiterführen; man setzt:

$$\frac{a'}{sin\, \alpha} : \frac{b'}{sin\, \beta} = tang\, \lambda$$

und findet:

$$tang \frac{\varphi - \psi}{2} = tang \frac{\varphi + \psi}{2} cotg\, (\lambda + 45°) \qquad (8)$$

Nachdem somit durch (7) und (8) die beiden Winkel φ und ψ bestimmt sind, können alle Dreiecks-Seiten nach dem Legendre schen Satze oder nach der Additamenten-Methode weiter berechnet werden.

Diese 3 Aufgaben mögen genügen, um zu zeigen, dass man mit dem Legendre schen Satz und mit der Additamenten-Methode nahezu alles berechnen kann, was in der ebenen Trigonometrie berechnet zu werden pflegt. Die sphärischen Rechnungen dieser Art spielen aber keine wichtige Rolle.

§ 44. Sphärisch-trigonometrische Reihen-Entwicklungen bis zur Ordnung $\frac{1}{r^4}$ einschliesslich.

Der Legendre sche Satz und die Additamenten-Methode beruhen auf sphärisch-trigonometrischen Reihen-Entwicklungen, die wir beim Legendre schen Satze nur bis auf Glieder von der Ordnung $1 : r^2$ einschliesslich genau im Schluss-Ergebnis behandelt haben. Bei der Additamenten-Methode haben wir in (8) § 42. S. 239 noch ein Glied von der Ordnung $1 : r^4$ hinzugenommen, weil sich das ohne besondere Mühe nebenbei ergab; und es hat sich gezeigt, dass dieses höhere Glied bei den praktischen Berechnungen mit Dreiecks-Seiten bis 100 000^m und darüber unmerklich ist.

Obgleich dadurch die Wahrscheinlichkeit nahe gelegt wird, dass auch in den übrigen verwandten Entwicklungen die Glieder von der Ordnung $1 : r^2$ genügen, müssen wir doch, um ein sicheres Urteil zu haben, die höheren Glieder kennen lernen.

Allerdings ist dabei zu berücksichtigen, dass eine sehr weit und fein geführte *sphärische* Berechnung für die Geodäsie zunächst wenig Wert hat, solange die sphärische Berechnungs-Art überhaupt nicht strenger begründet wird als dieses in unserem § 38.

S. 226—227 geschehen ist; denn ausser den höheren Gliedern von der Ordnung $1 : r^4$ sollte man auch den Einfluss der Ungleichheit der Krümmungen nach verschiedenen Richtungen und die von der geographischen Breite abhängigen Änderungen der Krümmungen untersuchen.

Dieses können wir erst später thun, und wenn wir jetzt die höheren Glieder von der Ordnung $1 : r^4$ untersuchen, so hat das zunächst den Sinn, dass wir uns überzeugen, ob die Entwicklungen bis $1 : r^2$ einschliesslich, hinreichend sind, um die *geschlossenen* sphärischen Formeln, welche man ja auch anwenden könnte, zu ersetzen, und zweitens sollen durch die nachfolgenden Entwicklungen unsere späteren Entwicklungen mit der geodätischen Linie zweckmässig vorbereitet werden.

Beim ersten Studium der höheren Geodäsie im Sinne des Verständnisses unserer heutigen Landes-Vermessungen wird man den hier folgenden § 44. zunächst ganz übergehen und erst viel später nach Bedürfnis nachholen.

Fig. 1.

I. Der sphärische Excess.

Wir betrachten in Fig. 1. das rechtwinklige sphärische Dreieck ABC mit der Hypotenuse s, mit den Katheten p und q und mit den Winkeln $90°$, β und α. Da einer der Winkel $= 90°$ ist, ist der sphärische Excess:

$$\varepsilon = \alpha + \beta + 90° - 180°$$

oder

$$\varepsilon = \alpha + \beta - 90° \tag{1}$$

Dieses rechtwinklige Dreieck Fig. 1. giebt:

$$cotg\, \alpha\, cotg\, \beta = cos \frac{s}{r}$$

$$\text{oder} \quad = 1 - 2\, sin^2 \frac{s}{2r}$$

$$\text{also} \quad 2\, sin^2 \frac{s}{2r} = 1 - cotg\, \alpha\, cotg\, \beta = \frac{sin\, \alpha\, sin\, \beta - cos\, \alpha\, cos\, \beta}{sin\, \alpha\, sin\, \beta}$$

$$2\, sin^2 \frac{s}{2r} = -\frac{cos\,(\alpha + \beta)}{sin\, \alpha\, sin\, \beta} = \frac{sin\, \varepsilon}{sin\, \alpha\, sin\, \beta} = \frac{sin\, \varepsilon\, sin^2 \frac{s}{r}}{sin \frac{p}{r}\, sin \frac{q}{r}}$$

$$sin\, \varepsilon = \frac{sin \frac{p}{r}\, sin \frac{q}{r}}{2\, cos^2 \frac{s}{2}} \tag{2}$$

Dieses bis $\frac{1}{r^4}$ entwickelt giebt:

$$\varepsilon = \frac{\left(\frac{p}{r} - \frac{p^3}{6\,r^3}\right)\left(\frac{q}{r} - \frac{q^3}{6\,r^3}\right)}{2\left(1 - \frac{s^2}{8\,r^2}\right)^2} = \left(\frac{p\,q}{2\,r^2} - \frac{p\,q\,(p^2 + q^2)}{12\,r^4}\right)\left(1 + \frac{s^2}{4\,r^2}\right)$$

Da man aber in den höheren Gliedern $s^2 = p^2 + q^2$ setzen darf, so giebt dieses alsbald:

$$s = \frac{pq}{2r^2} + \frac{pq}{24r^4}(p^2 + q^2) \tag{3}$$

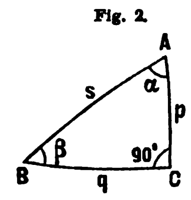


Fig. 2.

II. *Die Katheten-Formeln.*

Das rechtwinklige sphärische Dreieck Fig. 2. giebt nach § 27. S. 163:

$$\sin\frac{q}{r} = \sin\frac{s}{r}\sin\alpha \quad , \quad \tang\frac{p}{r} = \tang\frac{s}{r}\cos\alpha \tag{4}$$

oder entwickelt:

$$q - \frac{q^3}{6r^2} = \left(s - \frac{s^3}{6r^2}\right)\sin\alpha \quad , \quad p + \frac{p^3}{3r^2} = \left(s + \frac{s^3}{3r^2}\right)\cos\alpha \tag{5}$$

Um diese Gleichungen nach q bzw. nach p aufzulösen, benützt man zunächst die ersten Näherungen:

$$q = s\sin\alpha + \frac{1}{r^2}\ldots \qquad p = s\cos\alpha + \frac{1}{r^2}\ldots$$

$$\frac{q^3}{6r^2} = \frac{s^3\sin^3\alpha}{6r^2} + \frac{1}{r^4}\ldots \qquad \frac{p^3}{3r^2} = \frac{s^3\cos^3\alpha}{3r^2} + \frac{1}{r^4}\ldots$$

$$q = s\sin\alpha - \frac{s^3}{6r^2}\sin\alpha + \frac{s^3}{6r^2}\sin^3\alpha \qquad p = s\cos\alpha + \frac{s^3}{3r^2}\cos\alpha - \frac{s^3}{3r^2}\cos^3\alpha$$

$$q = s\sin\alpha - \frac{s^3}{6r^2}\sin\alpha\cos^2\alpha \qquad p = s\cos\alpha + \frac{s^3}{3r^2}\sin^2\alpha\cos\alpha \tag{6}$$

Wir werden diese Entwicklungen noch um ein Glied weiter treiben, wollen dieses aber nur noch an der Formel für q ausführlich zeigen. Statt (5) hat man dann:

$$q - \frac{q^3}{6r^2} + \frac{q^5}{120r^4} = \left(s - \frac{s^3}{6r^2} + \frac{s^5}{120r^4}\right)\sin\alpha \tag{7}$$

hiezu hat man nach (6):

$$q^3 = s^3\sin^3\alpha - \frac{3}{6}\frac{s^5}{r^2}\sin^3\alpha\cos^2\alpha + \ldots$$

$$q^5 = s^5\sin^5\alpha + \ldots$$

Wenn man diese beiden Ausdrücke für q^3 und q^5 in (7) einsetzt, so bekommt man:

$$\begin{aligned} q = s\sin\alpha &- \frac{s^3}{6r^2}\sin\alpha + \frac{s^5}{120r^4}\sin\alpha \\ &+ \frac{s^3}{6r^2}\sin^3\alpha - \frac{s^5}{12r^4}\sin^3\alpha\cos^2\alpha \\ &- \frac{s^5}{120r^4}\sin^5\alpha \end{aligned}$$

Wenn man dieses ordnet und berücksichtigt, dass:

$$s^4 = s^4(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2$$

so findet man:

$$q = s\sin\alpha - \frac{s^3}{6r^2}\sin\alpha\cos^2\alpha - \frac{s^5}{120r^4}\sin\alpha\cos^2\alpha\,(8\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) \tag{8}$$

Dieses ist die Weiterentwicklung der ersten Formel der Gruppe (6); die Weiterentwicklung der zweiten Formel der Gruppe (6) wird ebenso gemacht und giebt:

$$p = s \cos \alpha + \frac{s^3}{3 r^2} \sin^2 \alpha \cos \alpha + \frac{s^5}{15 r^4} \sin^2 \alpha \cos \alpha (2 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \tag{9}$$

Umkehrung der Reihen (8) und (9).

Man kann die Reihen (8) und (9) auch umkehren, d. h. man kann $s \sin \alpha$ und $s \cos \alpha$ in Potenzen von q und p ausdrücken. (Man könnte hiezu das allgemeine Verfahren anwenden, das wir in § 29. S. 180—181 angedeutet haben; wir ziehen es aber hier vor, ohne alle Vorbereitungs-Hilfsmittel zu verfahren.)

Jedenfalls hat man in erster Näherung aus (8) und (9):

$$s \sin \alpha = q + \dots \qquad s \cos \alpha = p + \dots$$

folglich sofort in zweiter Näherung aus (8) und (9):

$$s \sin \alpha = q + \frac{q\, p^2}{6 r^2} + \dots \qquad s \cos \alpha = p - \frac{q^2\, p}{3 r^2} + \dots$$

folglich zum Einsetzen in die höheren Glieder von (8) und (9):

$$s^2 \sin^2 \alpha = q^2 + \frac{q^2\, p^2}{3 r^2} + \dots \qquad s^2 \cos^2 \alpha = p^2 - 2\, \frac{q^2\, p^2}{3 r^2} + \dots$$

$$s^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha = \left(q^2 + \frac{q^2\, p^2}{3 r^2}\right)\left(p - \frac{q^2\, p}{3 r^2}\right) = q^2\, p + \frac{q^2\, p^3}{3 r^2} - \frac{q^4\, p}{3 r^2} + \dots$$

$$s^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha = \left(q + \frac{q\, p^2}{6 r^2}\right)\left(p^2 - 2\, \frac{q^2\, p^2}{3 r^2}\right) = q\, p^2 + \frac{q\, p^4}{6 r^2} - 2\, \frac{q^3\, p^2}{3 r^2} + \dots$$

Setzt man dieses in (8), so bekommt man:

$$s \sin \alpha = q + \frac{q\, p^2}{6 r^2} + \frac{q\, p^4}{36 r^4} - \frac{q^3\, p^2}{9 r^4} - \frac{1}{120 r^4}(q\, p^4 - 8\, q^3\, p^2) + \dots$$

Dieses giebt geordnet:

$$s \sin \alpha = q + \frac{q\, p^2}{6 r^2} - \frac{q\, p^2}{360 r^4}(16\, q^2 - 7\, p^2) \tag{10}$$

und auf gleiche Weise bekommt man aus (9):

$$s \cos \alpha = p - \frac{q^2\, p}{3 r^2} - \frac{q^2\, p}{45 r^4}(q^2 + 2\, p^2) \tag{11}$$

III. Die Hypotenusen-Formel.

Aus den soeben gewonnenen Formeln (10) und (11) kann man auch eine Formel für s^2 herstellen, indem man $s \sin \alpha$ und $s \cos \alpha$ quadriert und addiert. Wenn man dabei die höheren Glieder wie bisher vernachlässigt, so bekommt man:

$$s^2 \sin^2 \alpha = q^2 + \frac{q^2\, p^4}{36 r^4} + \frac{q^2\, p^2}{3 r^2} + \frac{q^2\, p^2}{180 r^4}(-16\, q^2 + 7\, p^2)$$

$$s^2 \cos^2 \alpha = p^2 + \frac{q^4\, p^2}{9 r^4} - 2\, \frac{q^2\, p^2}{3 r^2} - 2\, \frac{q^2\, p^2}{45 r^4}(q^2 + 2\, p^2)$$

Wenn man dieses zusammennimmt und ordnet, so findet man:

$$s^2 = q^2 + p^2 - \frac{q^2 p^2}{3 r^2} - \frac{q^2 p^2 (q^2 + p^2)}{45 r^4} \tag{12}$$

Man kann diese Formel auch unmittelbar finden durch Entwicklung von

$$\cos \frac{s}{r} = \cos \frac{q}{r} \cos \frac{p}{r}.$$

IV. Der erweiterte Legendre sche Satz.

Nach Andeutung von Fig. 4. verbinden wir zwei rechtwinklige sphärische Dreiecke zu einem allgemeinen sphärischen Dreieck $A B C$, indem die beiden Katheten q und q' nun die Seite $C B = a$ bilden, zu welcher die gemeinschaftliche Kathete p als Höhe gehört.

Fig. 4.

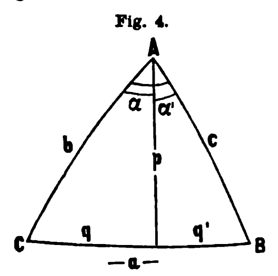
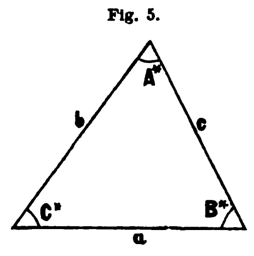


Fig. 5.



Die Winkel A^*, B^*, C^* des ebenen Dreiecks, Fig. 5., deren Summe $A^* + B^* + C^* = 180°$ ist, entsprechen den Winkeln α', β', γ' in der früheren Fig. 2. § 41. S. 234.

Der Dreiecks-Winkel A setzt sich nun aus den beiden Winkeln α und α' der beiden rechtwinkligen Dreiecke so zusammen:

$$A = \alpha + \alpha', \quad \text{also} \quad \cos A = \cos \alpha \cos \alpha' - \sin \alpha \sin \alpha' \tag{13}$$

Nun hat man nach (11):

$$b \cos \alpha = p - \frac{p q^2}{3 r^2} - \frac{p q^2}{360 r^4} (16 p^2 + 8 q^2) \tag{14}$$

$$c \cos \alpha' = p - \frac{p q'^2}{3 r^2} - \frac{p q'^2}{360 r^4} (16 p^2 + 8 q'^2) \tag{15}$$

$$b \sin \alpha = q + \frac{p^2 q}{6 r^2} + \frac{p^2 q}{360 r^4} (7 p^2 - 16 q^2) \tag{16}$$

$$c \sin \alpha' = q' + \frac{p^2 q'}{6 r^2} + \frac{p^2 q'}{360 r^4} (7 p^2 - 16 q'^2) \tag{17}$$

Wenn man (14) und (15) multipliziert, dabei die höheren Glieder vernachlässigt, und dann nach gleichen Potenzen ordnet, so bekommt man:

$$\begin{aligned} b c \cos \alpha \cos \alpha' = p^2 &- \frac{p^2 q^2}{3 r^2} - \frac{p^2 q^2}{360 r^4} (16 p^2 + 8 q^2) \\ &- \frac{p^2 q'^2}{3 r^2} + \frac{p^2 q^2 q'^2}{9 r^4} \\ &- \frac{p^2 q'^2}{360 r^4} (16 p^2 + 8 q'^2) \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise findet man auch aus (16) und (17):

$$b\,c \sin\alpha \sin\alpha' = q\,q' + \frac{p^2 q\,q'}{6\,r^2} + \frac{p^2 q\,q'}{360\,r^4}(7\,p^2 - 16\,q^2) + \frac{p^2 q\,q'}{6\,r^2} + \frac{p^4 q\,q'}{36\,r^4} + \frac{p^2 q\,q'}{360\,r^4}(7\,p^2 - 16\,q'^2)$$

Diese beiden Ausdrücke zusammen geben:

$$b\,c(\cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha') = b\,c\cos(\alpha+\alpha') = b\,c\cos A = p^2 - q\,q' - \frac{p^2}{3\,r^2}(q^2 + q'^2 + q\,q')$$
$$- \frac{p^2}{360\,r^4}(16 p^2 q^2 + 16 p^2 q'^2 + 24 p^2 q\,q' + 8\,q^4 + 8\,q'^4 - 40\,q^2 q'^2 - 16\,q^3 q' - 16\,q'^3 q) \quad (18)$$

Nun hat man nach der Hypotenusen-Formel (12):

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= p^2 + q^2 - \frac{p^2 q^2}{3\,r^2} - \frac{p^2 q^2}{45\,r^4}(p^2 + q^2) \\ c^2 &= p^2 + q'^2 - \frac{p^2 q'^2}{3\,r^2} - \frac{p^2 q'^2}{45\,r^4}(p^2 + q'^2) \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

und unmittelbar $\quad a^2 = (q + q')^2 = q^2 + 2\,q\,q' + q'^2 \quad$ (20)

Zugleich wird in Fig. 5. ein *ebenes* Dreieck eingeführt, dessen Seiten a, b, c gleich sind den Seiten des sphärischen Dreiecks, und dessen Winkel A^*, B^*, C^* bestimmt werden sollen. Für das ebene Dreieck hat man bekanntlich die Gleichung:

$$2\,b\,c\cos A^* = b^2 + c^2 - a^2$$

und wenn man hier die Werte (19) und (20) einsetzt, so bekommt man:

$$b\,c\cos A^* = p^2 - q\,q' - \frac{p^2}{6\,r^2}(q^2 + q'^2) - \frac{p^2}{90\,r^4}(p^2 q^2 + p^2 q'^2 + q^4 + q'^4) \quad (21)$$

Dieses (21) wird mit dem früheren (18) verglichen, wodurch man nach einiger algebraischer Umformung finden wird:

$$b\,c(\cos A^* - \cos A) = \frac{p^2}{6\,r^2}(q + q')^2 + \frac{p^2(q + q')^2}{90\,r^4}(3\,p^2 + (q + q')^2 - 8\,q\,q') \quad (22)$$

Das hier vorkommende Produkt $p\,(q + q')$ steht in naher Beziehung zu $b\,c\sin A$, denn wir haben aus (16) und (15) mit Weglassung der letzten Glieder:

$$b\,c\sin\alpha\cos\alpha' = p\,q + \frac{p^3 q}{3\,r^2} - \frac{p\,q\,q'^2}{3\,r^2}$$

Entsprechend geben auch (14) und (17):

$$b\,c\cos\alpha\sin\alpha' = p\,q' + \frac{p^3 q'}{6\,r^2} - \frac{p\,q^2 q'}{3\,r^2}$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen giebt:

$$b\,c(\sin\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\sin\alpha') = b\,c\sin A = p\,(q + q') + \frac{p\,(q + q')}{6\,r^2}(p^2 - 2\,q\,q')$$

also: $$p\,(q + q') = b\,c\sin A\left(1 - \frac{1}{6\,r^2}(p^2 - 2\,q\,q')\right) \quad (23)$$

Das Ziel dieser Entwicklung ist die kleine Winkel-Differenz zwischen A und A^*, und wir wollen deshalb setzen:

$$A - A^* = x \quad (24)$$

folglich in erster Näherung:

$$\cos A = \cos (A^* + x) = \cos A^* - x \sin A^* + \ldots \tag{25}$$

Setzt man dem entsprechend $\cos A^* - \cos A = x \sin A^*$ in (22), und berücksichtigt (23) genähert, mit $A = A^*$, so erhält man:

$$x = \frac{p}{6\,r^2}(q + q') \tag{26}$$

Damit entwickelt man eine zweite Annäherung:

$$A = A^* + \frac{p}{6\,r^2}(q + q') \quad , \quad \sin A = \sin A^* + \frac{p}{6\,r^2}(q + q') \cos A^* + \ldots$$

$$\sin A = \sin A^* \left(1 + \frac{p}{6\,r^2}(q + q') \operatorname{cotg} A^*\right) \tag{26 a}$$

oder mit Ersetzung von $\operatorname{cotg} A^*$ aus (21) und (23) genähert:

$$\operatorname{cotg} A^* = \frac{p^2 - q\,q'}{p\,(q + q')}$$

Dieses in (26 a) gesetzt giebt:

$$\sin A = \sin A^* \left(1 + \frac{1}{6\,r^2}(p^2 - q\,q')\right) \tag{27}$$

Damit kann man in (23) die Funktion $\sin A$ durch $\sin A^*$ ersetzen, und dadurch bekommt man:

$$p\,(q + q') = b\,c \sin A^* \left(1 + \frac{1}{6\,r^2}(p^2 - q\,q') - \frac{1}{6\,r^2}(p^2 - 2\,q\,q')\right)$$

$$p\,(q + q') = b\,c \sin A^* \left(1 + \frac{1}{6\,r^2}\,q\,q'\right) = 2\,\triangle \left(1 + \frac{1}{6\,r^2}\,q\,q'\right) \tag{28}$$

Hier haben wir die Fläche $\triangle$ des ebenen Dreiecks eingeführt, nämlich:

$$\frac{b\,c \sin A^*}{2} = \triangle \tag{29}$$

Nun gehen wir zum zweiten Male auf (22) zurück, und bilden durch Einsetzung von (28):

$$b\,c\,(\cos A^* - \cos A) = \frac{2}{3}\,\frac{\triangle^2}{r^2}\left(1 + \frac{q\,q'}{3\,r^2}\right) + \frac{4}{90}\,\frac{\triangle^2}{r^2}\left(\frac{3\,p^2 + (q + q')^2 - 8\,q\,q'}{r^2}\right)$$

Hier ist nach Fig. 4. zu berücksichtigen:

$$p^2 + q^2 = b^2 \quad , \quad p^2 + q'^2 = c^2 \quad \text{und} \quad (q + q')^2 = a^2$$

womit man finden wird:

$$b\,c\,(\cos A^* - \cos A) = \frac{2}{3}\,\frac{\triangle^2}{r^2} + \frac{2}{90}\,\frac{\triangle^2}{r^2}\left(\frac{3\,b^2 + 3\,c^2 - a^2}{r^2}\right) \tag{30}$$

Nun wird die frühere Entwicklung (25) noch um ein Glied weiter geführt, nämlich mit $A - A^* = x$:

$$\cos A = \cos (A^* + x) = \cos A^* - x \sin A^* - \frac{x^2}{2} \cos A^*$$

$$\cos A - \cos A^* = - \sin A^* \left(x + \frac{x^2}{2} \operatorname{cotg} A^*\right)$$

Dieses in (30) gesetzt, zugleich mit Rücksicht auf (29) giebt:

$$x + \frac{x^2}{2} \cot g A^* = \frac{\triangle}{3 r^2} + \frac{1}{90} \frac{\triangle}{r^4} (3 b^2 + 3 c^2 - a^2) \tag{30 a}$$

Die erste Näherung für x ist:

$$x = \frac{\triangle}{3 r^2} + \frac{1}{r^4} \dots$$

Dazu hat man aus dem ebenen Dreieck:

$$\cos A^* = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 b c} \qquad \sin A^* = \frac{2 \triangle}{b c}$$

also von (30 a):

$$\frac{x^2}{2} \cot g A^* = \frac{\triangle^2}{9 r^4} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \triangle} = \frac{\triangle}{72 r^4} (b^2 + c^2 - a^2)$$

Dieses in (30 a) gesetzt giebt:

$$x = \frac{\triangle}{3 r^2} + \frac{\triangle}{360 r^4} (7 b^2 + 7 c^2 + a^2) \tag{31}$$

Hiebei ist die Winkelreduktion $A - A^* = x$ in analytischem Masse dargestellt; um auf Sekunden überzugehen, muss man den Faktor ϱ zusetzen. Thut man dieses und schreibt zugleich auch die zwei anderen entsprechenden Formeln für $B - B^*$ und $C - C^*$, so hat man:

$$x = A - A^* = \frac{\triangle}{3 r^2} \varrho + \frac{\triangle}{360 r^4} \varrho (a^2 + 7 b^2 + 7 c^2) \tag{31 a}$$

$$y = B - B^* = \frac{\triangle}{3 r^2} \varrho + \frac{\triangle}{360 r^4} \varrho (7 a^2 + b^2 + 7 c^2) \tag{32 a}$$

$$z = C - C^* = \frac{\triangle}{3 r^2} \varrho + \frac{\triangle}{360 r^4} \varrho (7 a^2 + 7 b^2 + c^2) \tag{33 a}$$

$$\text{Summe} \quad \varepsilon = \frac{\triangle}{r^2} \varrho + \frac{\triangle}{24 r^4} \varrho (a^2 + b^2 + c^2) \tag{34}$$

Unter $\triangle$ ist hier die Fläche des *ebenen* Dreiecks verstanden, das aus den drei Seiten a, b, c konstruiert werden kann, und die vorstehenden Formeln sind immer nur Näherungs-Formeln, weil noch höhere Glieder vernachlässigt sind. Wenn man dagegen die kugelförmige Oberfläche F des *sphärischen* Dreiecks benützt, so hat man die schon früher in (2 a) § 40. S. 231 aufgestellte strenge Formel:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2} \varrho \tag{35}$$

Durch Vergleichung von (35) und (34) hat man auch eine Vergleichung zwischen F und $\triangle$, nämlich:

$$F = \triangle \left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24 r^2}\right) \tag{36}$$

Hiefür kann man auch noch eine andere Form finden, indem man nach (31 a) schreibt:

$$\sin A = \sin A^* + \frac{\triangle}{3 r^2} \cos A^* = \sin A^* \left(1 + \frac{\triangle}{3 r^2} \cot g A^*\right)$$

Nimmt man hiezu die einfachen Beziehungen, $2\,b\,c\cos A^* = b^2 + c^2 - a^2$ und $2\,\triangle = b\,c\sin A^*$, so findet man:

$$\frac{\sin A}{\sin A^*} = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{12\,r^2}$$

dieses auch auf die beiden andern Winkel angewendet giebt für (36):

$$F = \triangle \sqrt{\frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin A^* \sin B^* \sin C^*}} \tag{37}$$

Von ähnlicher Bedeutung wie (36) ist auch die aus (34) folgende Gleichung:

$$\frac{\triangle}{r^2} = \varepsilon\left(1 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24\,r^2}\right) \tag{38}$$

Setzt man dieses noch in (31 a), (31 b), (31 c), so wird überall $\triangle$ durch ε ersetzt und man hat:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180}\left(\frac{-2\,a^2 + b^2 + c^2}{r^2}\right) \tag{39 a}$$

$$B - B^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180}\left(\frac{a^2 - 2\,b^2 + c^2}{r^2}\right) \tag{39 b}$$

$$C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180}\left(\frac{a^2 + b^2 - 2\,c^2}{r^2}\right) \tag{39 c}$$

Summe $\quad \varepsilon = \varepsilon \quad$ (Probe) (40)

Endlich kann man hier noch eine kleine Form-Veränderung vornehmen dadurch, dass man den Mittelwert m^2 von a^2, b^2 und c^2 einführt, nämlich:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = m^2 \tag{41}$$

Damit werden die vorstehenden Formeln:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{60}\,\frac{m^2 - a^2}{r^2} \tag{42 a}$$

$$B - B^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{60}\,\frac{m^2 - b^2}{r^2} \tag{42 b}$$

$$C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{60}\,\frac{m^2 - c^2}{r^2} \tag{42 c}$$

Für ein gleichseitiges Dreieck verschwinden die zweiten Glieder, was auch an sich klar ist.

Nimmt man ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit den Katheten a und a, also $c^2 = 2\,a^2$, so wird:

$$\varepsilon = \frac{a^2}{2\,r^2} \quad , \quad 3\,m^2 = a^2 + a^2 + 2\,a^2 \quad , \quad m^2 = \frac{4}{3}\,a^2.$$

Setzt man $a = 100\,000^m$, so werden die zweiten Glieder in (42 a), (42 b) und (42 c) bzw.:

$$+\frac{a^4}{40\,r^4}\,\varrho = +\,0{,}0003''$$

$$+\frac{a^4}{40\,r^4}\,\varrho = +\,0{,}0003''$$

$$-\frac{a^4}{20\,r^4}\,\varrho = -\,0{,}0006''$$

Zu einer Anwendung der vorstehenden Formeln auf ein Zahlen-Beispiel nehmen wir wieder das klassische Dreieck Inselsberg, Hohehagen, Brocken, das wir schon mehrfach, in § 40.—42. benützt haben.

Mit Zugrundlegung der hier als vorläufig zu betrachtenden Berechnungen § 40. S. 233 und § 41. S. 237 erhalten wir:

$$log\, r = 6.804\,9621 \quad , \quad log \triangle = 9.467\,2168 \quad , \quad log\, F = 9.467\,2271$$

und dann nach (31 a), (31 b), (31 c):

$$\begin{array}{rcl} A - A^* = & 4{,}949\,900'' + 0{,}000\,136'' = & 4{,}950\,036'' \\ B - B^* = & 4{,}949\,900 \quad + 0{,}000\,096 \quad = & 4{,}949\,996 \\ C - C^* = & 4{,}949\,900 \quad + 0{,}000\,121 \quad = & 4{,}950\,021 \\ \hline \varepsilon = & 14{,}849\,700'' + 0{,}000\,353'' = & 14{,}850\,053'' \end{array}$$

Dasselbe bekommt man auch nach den Formeln (42 a), (42 b), (42 c), nämlich:

$$\begin{array}{rcl} A - A^* = & 4{,}950\,018'' + 0{,}000\,018'' = & 4{,}950\,036'' \\ B - B^* = & 4{,}950\,018 \quad - 0{,}000\,021 \quad = & 4{,}949\,997 \\ C - C^* = & 4{,}950\,018 \quad + 0{,}000\,003 \quad = & 4{,}950\,021 \\ \hline \varepsilon = & 14{,}850\,054'' + 0{,}000\,000'' = & 14{,}850\,054'' \end{array}$$

Damit hat man folgende sphärische und ebene Winkel:

Inselsberg	$A =$	40° 39′ 30,380 000″	$A^* =$	40° 39′ 25,429 964″
Hohehagen	$B =$	86 13 58,840 000	$B^* =$	86 13 53,890 004
Brocken	$C =$	53 6 45,630 053	$C^* =$	53 6 40,680 032
Summe		180° 0′ 14,850 053″		180° 0′ 0,000 000″

Wenn man mit diesen Winkeln die frühere Berechnung (13)—(15) S. 237 wiederholt, so muss man mindestens 10 stellig rechnen, um den Unterschied noch wahrnehmbar zu machen; indessen auch in den 10 stelligen Logarithmen ist der Unterschied höchstens eine letzte Stelle, d. h. = 0·001, und z. B. an der Dreiecks-Seite $a = 69194{,}105^m$ bringt die neue schärfere Rechnung nur einen Unterschied von $0{,}00002^m$ oder $0{,}02^{mm}$.

Da das benützte Dreieck eines der grössten in der deutschen Geodäsie ist, können wir hiernach mit Ruhe die höheren Glieder vernachlässigen.

Zum Schlusse dieser Entwicklungen wollen wir noch eine Übersichts-Tabelle berechnen für die Werte des Korrektions-Gliedes 4. Ordnung zum Legendre schen Satze, d. h. nach (42 a) für das Glied:

$$\varDelta A_4 = \frac{\varepsilon}{60\, r^2}(m^2 - a^2) \quad , \quad \text{wo } m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

Die beiden Faktoren ε und $(m^2 - a^2)$ desselben sind von einander unabhängig; der Excess ε misst die Fläche des Dreiecks und der Faktor $(m^2 - a^2)$ ist ein Mass für die Unsymmetrie und Ungleichseitigkeit des Dreiecks. Wenn ein Dreieck sehr lang aber schmal ist, so kann ε klein und $(m^2 - a^2)$ gross sein; wenn ein Dreieck sehr gross und nahezu gleichseitig ist, so wird ε gross und $(m^2 - a^2)$ klein; man kann also alle denkbaren Fälle am besten umfassen durch eine Tabelle für $\varDelta A_4$ mit zwei unabhängigen Eingängen ε und $m^2 - a^2$, wie im folgenden gegeben wird:



Winkel-Korrektion 4. Ordnung, $\varDelta A_4$, zum Legendreschen Satz.

Unsymmetrie des Dreiecks		Sphärischer Excess ε des Dreiecks					
$\sqrt{m^2 - a^2}$	$m^2 - a^2$	$\varepsilon = 10''$	$\varepsilon = 20''$	$\varepsilon = 50''$	$\varepsilon = 100''$	$\varepsilon = 200''$	$\varepsilon = 300''$
10^km	100^qkm	0,00000″	0,00000″	0,00000″	0,00000″	0,00001	0,00001″
20	400	0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00003	0,00005
50	2 500	0,00001	0,00002	0,00005	0,00010	0,00021	0,00031
100	10 000	0,00004	0,00008	0,00021	0,00041	0,00082	0,00123
200	40 000	0,00016	0,00033	0,00081	0,00164	0,00329	0,00493
400	160 000	0,00066	0,00131	0,00325	0,00657	0,01314	0,01972

Indem wir noch eine allgemeinere Betrachtung über das Fehler-Glied des Legendreschen Satzes anstellen, schreiben wir nach (39 a) mit Zuziehung des Ausdrucks $\triangle$ nach (5) § 41. S. 236:

$$\varDelta A_4 = \frac{b^2 + c^2 - 2\,a^2}{720\,r^4} \sqrt{a^2 (2\,b^2 + 2\,c^2 - a^2) - (b - c)^2}$$

Wenn hier $b = c$, also das Dreieck gleichschenklig genommen wird, so fällt $(b - c)^2$ fort, und der Ausdruck wird ein Maximum in Hinsicht auf das Verhältnis zwischen b und c. Indem man den an der Seite a anliegenden Winkel β einführt, kann man, mit $c = b$, das Fehler-Glied zweifach ausdrücken:

$$\varDelta A_4 = \frac{a^4}{1440\,r^4} \frac{1 - 4\cos^2\beta}{\cos^2\beta} \tang \beta \qquad \text{(a)}$$

oder

$$\varDelta' A_4 = \frac{b^4}{180\,r^4} (1 - 4\cos^2\beta) \sin 2\beta \qquad \text{(b)}$$

Im Falle (a) entsteht ein Maximum mit $\beta = 45°$ und im Falle (b) entstehen Maxima mit $\beta = 26° 49'$ und $\beta = 73° 44'$ und daraus folgt:

$$(\beta = 45°), \qquad (\varDelta A_4)\,max = 0{,}001\,389\,\frac{a^4}{r^4}$$

$$(\beta = 73° 44'), \quad (\varDelta' A_4)\,max = 0{,}002\,050\,\frac{b^4}{r^4}$$

Setzt man hier bzw. a oder $b = 100\,000$ Meter, so wird das betreffende Fehler-Glied $= 0{,}000\,017''$ oder $0{,}000\,026''$.

Man sieht hieraus, dass bei messbaren Dreiecken die Korrektion 4. Ordnung immer zu vernachlässigen ist.

Der einfache Legendresche Satz mit Entwicklung bis $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich, erschien in den Pariser „Mémoires de l'académie des sciences", Jahrgang 1787, und hat inzwischen zahlreiche Beweisformen gefunden.

Die Entwicklung bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$ ist zuerst von Buzengeiger gegeben in der „Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, herausgegeben von Lindenau und Bohnenberger, 6. Band, S. 264—270, Tübingen 1818". Dieses wird auch von Bessel citiert in „Astr. Nachr. 19. Band, 1841, S. 103".

Unsere neue Behandlungsweise (im vorstehenden § 44.) ist hervorgerufen durch die ent-

sprechenden Entwicklungen für Dreiecke mit geodätischen Linien in der klassischen Abhandlung von Gauss „Disquisitiones generales circa superficies curvas, art. 24—28". Wir betrachten unseren § 44. als Vorbereitung für unsere späteren analogen Entwicklungen für Dreiecke auf dem Ellipsoid.

Über den Maximal-Einfluss der sphärischen Glieder von der Ordnung $1:r^4$ giebt schon Baeyer (Messen auf d. sphär. Oberfl. S. 73—74) eine Erörterung.

In unserer zweiten Auflage, 1878, S. 131, hatten wir eine solche Untersuchung mit der Nebenbedingung konstanter Dreiecks-Fläche. Helmert untersucht in math. u. phys. Theorieen der höheren Geodäsie I. § 16. den Maximal-Einfluss der höheren Glieder mit der Nebenbedingung, dass die Quadratsumme der Seiten, d. h. $a^2+b^2+c^2=3\,m^2$ konstant sei.

Kapitel V.

Sphärische Coordinaten.

§ 45. Übersicht der Coordinaten-Systeme.

Wir betrachten in der Folge die Erde als Kugel von gegebenem Halbmesser.

Bei dieser Betrachtungsweise werden manche Formeln und Rechen-Verfahren gefunden werden (mit kleinen Gliedern von der Ordnung $1:r^2$), welche man sofort auch auf das Ellipsoid, bzw. auf Messungen an der Erd-Oberfläche anwenden kann, wenn man nur den Kugel-Halbmesser r der Erd-Krümmung an der betreffenden Stelle einigermassen anpasst.

Andere der in diesem Kapitel zu entwickelnden Formeln (mit Gliedern von der Ordnung $1:r$) werden keine so unmittelbare Übertragung auf das Ellipsoid zulassen, und daher nur als Vorbereitungs-Formeln in irgend welchem Sinne zu betrachten sein.

Indem wir nähere Untersuchungen dieser Art auf die besonderen Fälle verschieben, betrachten wir jetzt die einzelnen Arten der Punkt-Bestimmung auf der Kugel.

I. Geographische Coordinaten.

Fig. 1.
Sphärische Coordinaten.

In Fig. 1. ist O der Mittelpunkt einer Kugel, welche, als Darstellung der Erde, den Nordpol N, Südpol S, also die Axe NS und den Äquator AA' hat.

NAS und NBS sind zwei Meridiane mit darauf liegenden Punkten P und P'; die gegenseitige Lage zweier Meridiane wird durch den Längen-Unterschied λ bestimmt, welcher entweder als Winkel λ am Pol N oder als Bogen AB auf dem Äquator dargestellt werden kann.

Auf einem Meridian NA wird ein Punkt P bestimmt durch seine geographische Breite φ; welche entweder als Erd-Centriwinkel $AOP=\varphi$ oder als Meridian-Bogen AP (für den Halbmesser $=1$) dargestellt werden kann.

II. Polar-Coordinaten.

Wenn P als fester Punkt gilt, so kann man einen zweiten Punkt P' dagegen festlegen durch Angabe des Entfernungs-Bogens PP' und des Azimutes $NPP' = \alpha$. Die Azimute werden meist von Norden über Osten gezählt, wie in Fig. 1. mit α bei P eingeschrieben ist.

Ein zweites Azimut α' hat der Bogen PP' im Punkte P' und zwar erscheint in Fig. 1. der Winkel α' entweder als nordöstliches Azimut von PP' in der Verlängerung über P', oder als südwestliches Azimut von $P'P$.

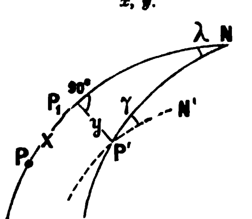
Die Differenz der beiden Azimute α und α' führt den Namen „Meridian-Konvergenz", d. h.

$$\text{Meridian-Konvergenz} = \alpha' - \alpha \tag{1}$$

Dabei ist der dem Äquator zugewendete Winkel α' der grössere, also die Meridian-Konvergenz in dem Sinne der Gleichung (1) gezählt, positiv.

III. Rechtwinklige Coordinaten.

Fig. 2.
Rechtwinklige Coordinaten
x, y.



In Fig. 2., welche einen besonderen Fall von Fig. 1. darstellt, ist $P'P_1$, ein Grosskreisbogen, rechtwinklig zu PN, und der Punkt P' wird in Bezug auf P bestimmt, durch die Abscisse $PP_1 = x$, auf dem Meridian NP gemessen, und durch die Ordinate $P_1P' = y$, rechtwinklig zum Meridian gemessen.

Als Meridian-Konvergenz bei rechtwinkligen Coordinaten gilt der Winkel γ, welcher in P' liegt zwischen dem Meridiane $P'N$ und dem Bogen $P'N'$, welcher eine Parallele zu P_1N ist.

Dieses ist nur eine andere Ausdrucksweise für die schon bei *II.* gegebene allgemeinere Erklärung der Meridian-Konvergenz, denn wenn das Azimut bei P_1 den besonderen Wert 90° annimmt, so ist die Meridian-Konvergenz für die Punkte P_1 und P' die Differenz:

$$PP_1P' - P_1P'N = 90° - (90° - \gamma) = \gamma \tag{2}$$

Dabei kommt der Ursprungs-Punkt P und die Abscisse x gar nicht in Betracht, sondern nur der Fusspunkt P_1.

Bemerkungen zur Meridian-Konvergenz.

Die Benennung Meridian-Konvergenz rührt ursprünglich davon her, dass für zwei Punkte unter gleicher Breite die Meridiane sich in einem Punkte der Erdaxe schneiden und in ihrem Schnittwinkel daselbst die Konvergenz der Meridian-*Tangenten* genau darstellen.

In erweitertem Sinne wird die Benennung Meridian-Konvergenz für die Azimut-Differenz $\alpha' - \alpha$ dadurch erklärt, dass man den Bogen PP' als unendlich kleine Gerade betrachtet, und die Meridian-Tangenten in P und P' mit entsprechender Näherung als sich schneidend annimmt; denkt man sich den Schnittpunkt T, dann hat man ein langgestrecktes schmales Dreieck $PP'T$, wo PP' die unendlich kleine Gerade und T der Schnittpunkt der beiden Meridian-Tangenten ist. In diesem schmalen ebenen Dreieck ist nun der Winkel bei T gleich $\alpha' - \alpha$.

Es ist auch leicht einzusehen, dass die Meridian-Konvergenz in erster Näherung durch $\lambda \sin \varphi$ ausgedrückt ist, denn wenn die zwei Punkte P und P' in Fig. 1. unter sich unendlich nahe, in der Mittelbreite φ liegen, so ist für den Kugel-Halbmesser r der Parallelkreis-Halbmesser daselbst $= r \cos \varphi$, also der Parallelkreisbogen $= r \cos \varphi \, \lambda$, aber die Tangentenlänge $PT = P'T = r \cot g \, \lambda$, also der Winkel bei T gleich $r \cos \varphi \, \lambda : r \cot g \, \varphi = \lambda \sin \varphi$.

So viel genügt hier zur Wort-Erklärung und zur ersten geometrischen Betrachtung der Meridian-Konvergenz, von welcher später noch weiter gehandelt werden wird.

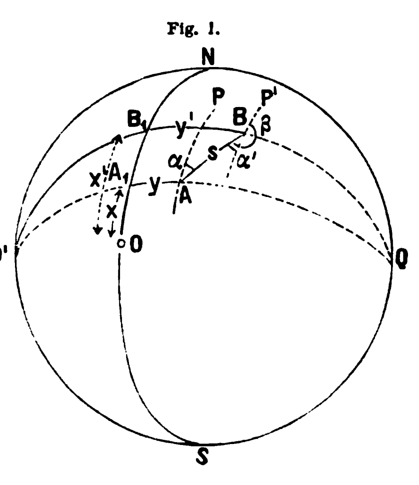
(Vgl. hiezu Fig. 1. § 61. und die Schlussbemerkungen von § 60.)

§ 46. Rechtwinklige sphärische (Soldner sche) Coordinaten.

Der einfache Grundgedanke der rechtwinkligen sphärischen Coordinaten ist etwa um 1809 von Soldner zur Vermessung des Königreichs Bayern und unabhängig von Bohnenberger in Württemberg angewendet worden, und da diese Vorgänge Nachahmung bei vielen anderen deutschen Vermessungen gefunden haben, werden diese Coordinaten häufig nach Soldner benannt.

Wir denken uns in Fig. 1. einen Meridian NOS der kugelförmigen Erde als Anfangsmeridian des Systems angenommen, und darauf einen Punkt O als Ursprung oder Nullpunkt.

Fig. 1.



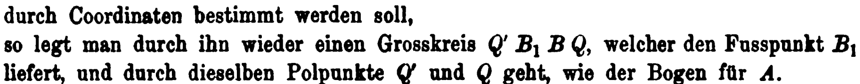
Um einen Punkt A durch Coordinaten zu bestimmen, legen wir einen Grosskreisbogen $Q' A_1 A Q$ durch den Punkt A, rechtwinklig zu dem Meridian ON, wobei A_1 auf ON der Fusspunkt der Senkrechten $A A_1$ ist und Q' sowie Q die sogenannten Pole des Meridians SON sind.

Durch den Fusspunkt A_1 wird bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} O A_1 &= x, \text{ die Abscisse von } A \\ A_1 A &= y, \text{ die Ordinate von } A \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Wenn noch ein zweiter Punkt B durch Coordinaten bestimmt werden soll, so legt man durch ihn wieder einen Grosskreis $Q' B_1 B Q$, welcher den Fusspunkt B_1 liefert, und durch dieselben Polpunkte Q' und Q geht, wie der Bogen für A.

Durch den Fusspunkt B_1 wird dann bestimmt:



$$\left.\begin{aligned} O B_1 &= x' \text{ die Abscisse von } B \\ B_1 B &= y' \text{ die Ordinate von } B \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Wir zählen die Abscissen x nördlich positiv und die Ordinaten y östlich positiv.

Richtungswinkel.

Ausser den Coordinaten selbst haben wir den Begriff des Richtungs-Winkels festzustellen. Der Richtungs-Winkel α, welcher dem Grosskreisbogen AB in A zukommt, ist der Winkel, welchen dieser Bogen AB mit dem zu dem Meridian von O parallel gezogenen Bogen AP im Punkte A bildet.



Bei der vorhin angegebenen Lage des Coordinaten-Systems, mit $+ x$ nach Norden und $+ y$ nach Osten, werden die Richtungs-Winkel α vom nördlichen x gegen östliches y hin positiv gezählt, wie in Fig. 1. eingeschrieben ist.

Der Winkel α, welcher hier Richtungs-Winkel genannt ist, ist derselbe, wie auch schon in den Formeln für ebene Coordinatenrechnung in unserem II. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 225 ein Winkel in diesem Sinne eingeführt wurde.

Ausser dem Richtungs-Winkel α von $A\,B$ in A ist auch der Richtungs-Winkel β von $B\,A$ in B bestimmt als Winkel zwischen der Parallelen-Tangente $B\,P'$ und dem Strahle $B\,A$, im positiven Sinne gezählt.

Wir haben neben β bei B auch noch den Winkel α' eingeschrieben, welcher um 180° kleiner ist als β, oder allgemeiner:

$$\alpha' = \beta \pm 180^\circ \tag{3}$$

Dieser Winkel α' bedeutet also im wesentlichen dasselbe wie β, er ist aber in den Formeln meist angenehmer als β selbst, weil $\alpha - \alpha'$ eine *kleine* Grösse ist, welche in einer Reihen-Entwicklung benützt werden kann. Man nennt auch, nach Analogie der Meridian-Konvergenz, diese kleine Grösse:

$$\alpha - \alpha' = \text{Ordinaten-Konvergenz.} \tag{4}$$

Wohl zu unterscheiden von dem Richtungs-Winkel α des Strahls $A\,B$ im Punkte A der Fig. 1. ist das *Azimut* dieses Strahles $A\,B$, denn das Azimut von $A\,B$ wäre der Winkel, welchen $A\,B$ mit dem Meridiane $A\,N$ in A bildet (vgl. Fig. 1. S. 255).

In Fig. 1. wäre also der in der Figur *nicht* angezeichnete Winkel zwischen $A\,N$ und $A\,B$ das Azimut von $A\,B$ in A, und der mit α bezeichnete Winkel zwischen $A\,P$ und $A\,B$ ist der Richtungs-Winkel von $A\,B$ in A.

Was wir hier Richtungs-Winkel nennen, heisst auch in den Veröffentlichungen der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landes-Aufnahme „Richtungs-Winkel", dagegen bei der preussischen Kataster-Vermessung „Neigungs-Winkel".

In der deutschen Sprache bezeichnet „Neigung" im allgemeinen einen Winkel in einer Vertikal-Ebene, man sagt z. B. der Wind weht in der Richtung N.O. in einer Neigung von 5° aufwärts oder abwärts.

Auch die Benennung „ebenes Azimut" wird von Vielen für jenen Richtungs-Winkel angewendet. So lange man es nur mit einem *ebenen* Systeme zu thun hat, wo gar keine Unterscheidung zwischen ebenem Azimut (bei Gauss „Azimut in plano") und sphärischem oder sphäroidischem Azimut vorkam, kann man sich die kurze Ausdrucksweise Azimut wohl erlauben; aber nun, da solche Unterscheidung nötig wird, wollen wir das Wort „Azimut" für die Abweichung von dem Meridian vorbehalten, und die Abweichungen von der Parallelen konsequent mit „Richtungs-Winkel" bezeichnen.

Entwicklung der Grund-Formeln.

Mit Beziehung auf Fig. 1. stellen wir folgende Aufgabe:

Gegeben sind die Coordinaten x und y eines Punktes A, ferner die Länge s des Bogens $A\,B$ und dessen Richtungs-Winkel α in A.

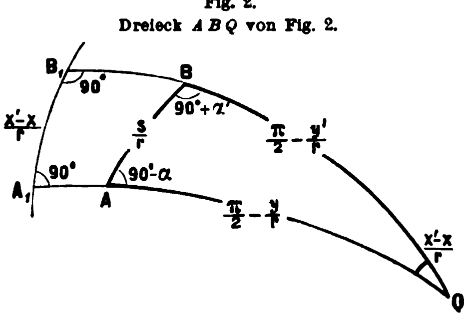
Gesucht sind die Coordinaten x' und y' des jenseitigen Punktes B und der jenseitige Richtungs-Winkel β des Bogens $B\,A$ in B, oder statt β selbst die Ordinaten-Konvergenz $\alpha - \alpha'$.

Wir werden diese Aufgabe mit Hilfe des sphärischen Dreiecks $A\,B\,Q$ von Fig. 1. lösen können, und haben deshalb dieses Dreieck in Fig. 2. nochmals besonders herausgezeichnet.



Alle Seiten und Winkel dieses Dreiecks stehen in einfacher Beziehung zu den besprochenen Coordinaten und Richtungs-Winkeln, z. B. der Winkel bei A ist $= 90° - \alpha$ und der Winkel bei B ist $= 90° + \alpha'$, wie die Vergleichung mit Fig. 1. unmittelbar ergiebt; und im übrigen ist nur noch die Bemerkung zu machen, dass die linearen Werte von Fig. 1. nun in Fig. 2., durch Division mit dem Erd-Halbmesser r, auf Erd-Centriwinkel in analytischem Masse gebracht sind, z. B. die Entfernung s in Fig. 1. giebt $\frac{s}{r}$ in Fig. 2. u. s. w. Der Wert $\frac{x'-x}{r}$ erscheint in Fig. 2. zweimal, erstens als Bogen $A_1 B_1$ und zweitens als Winkel Q, weil $Q A_1$ und $Q B_1$ beide Quadranten, d. h. analytisch $= \frac{\pi}{2}$ sind.

Fig. 2.
Dreieck ABQ von Fig. 2.



Nach dieser Vorbereitung benützen wir drei Formeln der sphärischen Trigonometrie, nämlich:

1) eine Cosinus-Formel (von S. 164),
2) eine Sinus-Formel (von S. 164),
3) eine Gauss'sche Formel (S. 165).

Im einzelnen geben diese 3 Formeln ausführlichst geschrieben:

$$1)\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y'}{r}\right) = \cos\frac{s}{r}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{r}\right) + \sin\frac{s}{r}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{r}\right)\cos(90° - \alpha)$$

$$2)\quad \frac{\sin\dfrac{x'-x}{r}}{\sin\dfrac{s}{r}} = \frac{\sin(90° - \alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{y'}{r}\right)}$$

$$3)\quad \operatorname{tang}\frac{(90° + \alpha') + (90° - \alpha)}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{r}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y'}{r}\right)\right)}{\cos \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{r}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y'}{r}\right)\right)}\operatorname{cotg}\frac{x'-x}{2r}$$

Wenn man diese drei Gleichungen, welche sehr ausführlich geschrieben sind, damit ihre Entstehungsweise ersichtlich bleibt, vereinfacht, so erhält man:

$$1)\ \text{für } y': \quad \sin\frac{y'}{r} = \cos\frac{s}{r}\sin\frac{y}{r} + \sin\frac{s}{r}\cos\frac{y}{r}\sin\alpha \qquad (5)$$

$$2)\ \text{für } x': \quad \sin\frac{x'-x}{r} = \frac{\sin\dfrac{s}{r}}{\cos\dfrac{y'}{r}}\cos\alpha \qquad (6)$$

$$3)\ \text{für } \alpha': \quad \operatorname{cotg}\frac{\alpha - \alpha'}{2} = \frac{\cos\dfrac{y'-y}{2r}}{\sin\dfrac{y'+y}{2r}}\operatorname{cotg}\frac{x'-x}{2r}$$

und wenn man hier Zähler und Nenner umkehrt, so hat man:

$$tang \frac{\alpha - \alpha'}{2} = \frac{sin \frac{y' + y}{2r}}{cos \frac{y' - y}{2r}} tang \frac{x' - x}{2r} \tag{7}$$

Zuerst nehmen wir die Gleichung (5) allein vor:

$$sin \frac{y'}{r} = cos \frac{s}{r} sin \frac{y}{r} + sin \frac{s}{r} cos \frac{y}{r} cos \alpha$$

Auf die hierin vorkommenden *sin* und *cos* kleiner Grössen werden die Potenz-Reihen für *sin* und *cos* nach S. 172 angewendet, jedoch mit Beschränkung auf Glieder dritter Ordnung; dieses giebt:

$$\frac{y'}{r} - \frac{y'^3}{6r^3} = \left(1 - \frac{s^2}{2r^2}\right)\left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3}\right) + \left(\frac{s}{r} - \frac{s^3}{6r^3}\right)\left(1 - \frac{y^2}{2r^2}\right) sin \alpha$$

Wenn man mit Vernachlässigung der höheren Glieder weiter rechnet, so erhält man:

$$y' - \frac{y'^3}{6r^2} = y\left(1 - \frac{s^2}{2r^2} - \frac{y^2}{6r^3}\right) + s \sin \alpha \left(1 - \frac{s^2}{6r^2} - \frac{y^2}{2r^2}\right) \tag{8}$$

Diese Gleichung soll nach y' aufgelöst werden; man hat es also mit einer cubischen Gleichung zu thun. Da jedoch von vornherein alle Glieder von höherer als der dritten Ordnung vernachlässigt worden sind, so kann auch die Auflösung von (8) entsprechend genähert ausgeführt werden. Man bildet nämlich zuerst eine erste Näherung für y':

$$y' = y + s \sin \alpha + \frac{1}{r^2} \cdots$$

Dieser Näherungs-Wert von y' genügt, um das zweite Glied $\frac{y'^3}{6r^2}$ in (8) auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich genau zu bestimmen. Man hat daher durch Einsetzen der ersten Näherung in jenes zweite Glied:

$$y' - \frac{(y + s \sin \alpha)^3}{6r^2} = y + s \sin \alpha + y\left(-\frac{s^2}{2r^2} - \frac{y^2}{6r^2}\right) + s \sin \alpha \left(-\frac{s^2}{6r^2} - \frac{y^2}{2r^2}\right)$$

$$y' = y + s \sin \alpha - \frac{3s^2 y - 3s^2 y \sin^2 \alpha + s^3 \sin \alpha - s^3 \sin^3 \alpha}{6r^2}$$

$$y' = y + s \sin \alpha - \frac{s^2 y \cos^2 \alpha}{2r^2} - \frac{s^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{6r^2} \tag{9}$$

Damit ist die Gleichung für y' erledigt, und wir gehen über zur Entwicklung für x'. Zur Bestimmung von $x' - x$ haben wir die Gleichung (6):

$$sin \frac{x' - x}{r} = \frac{sin \frac{s}{r}}{cos \frac{y'}{r}} cos \alpha$$



Dieses giebt bis zur dritten Ordnung entwickelt:

$$\frac{x'-x}{r} - \frac{(x'-x)^3}{6r^3} = \frac{\frac{s}{r} - \frac{s^3}{6r^3}}{1 - \frac{y'^2}{2r^2}} \cos\alpha$$

$$\frac{x'-x}{r} - \frac{(x'-x)^3}{6r^3} = \left(\frac{s}{r} - \frac{s^3}{6r^3}\right)\left(1 + \frac{y'^2}{2r^2}\right)\cos\alpha$$

$$x'-x - \frac{(x'-x)^3}{6r^2} = s\cos\alpha\left(1 - \frac{s^2}{6r^2} + \frac{y'^2}{2r^2}\right)$$

Erste Näherung $x'-x = s\cos\alpha + \ldots$

folglich:
$$x'-x = \frac{(s\cos\alpha)^3}{6r^2} + s\cos\alpha - \frac{s^3\cos\alpha}{6r^2} + \frac{s\cos\alpha\, y'^2}{2r^2}$$

$$x' = x + s\cos\alpha + \frac{s\cos\alpha\, y'^2}{2r^2} - \frac{s^3\cos\alpha\sin^2\alpha}{6r^2} \tag{10}$$

Damit ist auch die zweite Gleichung für x' erledigt, und wir gehen zur Entwicklung für die Ordinaten-Konvergenz. Zur Bestimmung von $\alpha - \alpha'$ haben wir die Gleichung (7), bei deren Entwicklungen man überall schon beim ersten Gliede stehen bleiben kann, weil dadurch schon rechts ein Glied von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ entsteht, über welches wir nicht hinaus gehen. Wir haben daher kurz aus (7):

$$\frac{\alpha-\alpha'}{2} + \ldots = \frac{\frac{y'+y}{2r} - \ldots}{1 - \ldots}\,\frac{x'-x}{2r} + \ldots$$

$$\alpha - \alpha' = \frac{y'+y}{2r^2}(x'-x) \tag{11}$$

Eine etwas andere Form bekommt man hiefür, wenn man $y' = y + s\sin\alpha + \ldots$ nach (9) einsetzt, nämlich:

$$\alpha - \alpha' = (x'-x)\frac{y}{r^2} + \frac{(x'-x)\, s\sin\alpha}{2r^2} \tag{12}$$

In (11) und (12) ist zur Reduktion auf Sekunden noch der Faktor $\varrho = 206\,265''$ hinzu zu setzen.

Zusammenfassung.

Zur Übersicht führen wir noch eine abkürzende Bezeichnung ein, indem wir setzen:

$$s\sin\alpha = v \qquad \text{und} \qquad s\cos\alpha = u \tag{13}$$

Damit geben die Formeln (9), (10) und (12), letztere mit Zusetzung von ϱ:

$$y' = y + v - \frac{u^2 y}{2r^2} - \frac{u^2 v}{6r^2} \tag{14}$$

$$x' = x + u + \frac{u\,y'^2}{2r^2} - \frac{u v^2}{6r^2} \tag{15}$$

$$\alpha - \alpha' = u\,y\,\frac{\varrho}{r^2} + u\,v\,\frac{\varrho}{2r^2} \quad \text{oder} \quad = u\,\frac{y+y'}{2}\,\frac{\varrho}{r^2} \tag{16}$$

Hiezu $\beta = \alpha' \pm 180°$,

also:
$$\beta = \alpha \pm 180° - u\,y\,\frac{\varrho}{r^2} - u\,v\,\frac{\varrho}{2r^2} \tag{16a}$$

Die von r abhängigen Coëfficienten dieser und einiger verwandter Formeln kann man bei gegebener geographischer Breite immer nach der Hilfstafel Seite [8]—[29] des Anhangs bestimmen; für die Breiten $\varphi = 45°$, $50°$, $55°$ sind die Logarithmen dieser Coëfficienten folgende (mit Weglassung der — 10 u. s. w.) und bei μ für Einheiten der 7ten Stelle:

φ	$log\,\frac{1}{2r^2}$	$log\,\frac{1}{6r^2}$	$log\,\frac{\varrho}{r^2}$	$log\,\frac{\varrho}{2r^2}$	$log\,\frac{\mu}{2r^2}$	$log\,\frac{\mu}{6r^2}$
45°	6.08969	5.61257	1.70514	1.40411	2·72747	2·25035
50°	6.08918	5.61206	1.70464	1.40361	2·72697	2·24985
55°	6.08869	5.61157	1.70415	1.40312	2·72648	2·24936

Wenn man in den Formeln (14), (15), (16) den Halbmesser $r = \infty$ setzt, d. h. wenn man die Kugel in die Ebene übergehen lässt, so bekommt man:

$$y' = y + s\sin\alpha \qquad x' = x + s\cos\alpha \qquad \alpha' = \alpha \tag{17}$$

Dieses sind die für die ebene Coordinaten-Rechnung gültigen Formeln.

Dasselbe hat man in anderer Form, wenn man nicht $r = \infty$, aber die Entfernung s und damit auch m und n sehr klein setzt; man sieht daraus, dass die sphärischen Formeln von selbst in die Formeln der Ebene übergehen, sobald die Entfernungen so klein werden, dass sich das Anbringen der Korrektions-Glieder nicht lohnt.

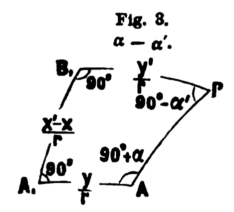
Unsere Schluss-Formeln (14), (15), (16) werden auch noch in manchen anderen Formen gebraucht, wie für die Ordinaten-Konvergenz schon bei (11) und (12) gezeigt wurde.

Auch die Ordinaten-Formel (14) kann umgeformt, d. h. etwa so geschrieben werden:

$$y' - y = s\sin\alpha - \frac{2y + y'}{3}\,\frac{u^2}{2r^2} \tag{18}$$

Der algebraisch scheinbar störende Umstand, dass in der Gleichung (15) für x das erst zu bestimmende y' selbst vorkommt, ist für unsere Anwendungen unwesentlich, wenn y' zuerst bestimmt wird, um es für die Einsetzung in das Korrektions-Glied für x zu haben; sollte ausnahmsweise x allein zu bestimmen sein, so müsste man zur Berechnung des ersten Korrektions-Gliedes von x einen Näherungs-Wert von $y' = y + s\sin\alpha$ nehmen.

Geometrische Bedeutung der Ordinaten-Konvergenz.



Die Formel (11) hat eine sehr einfache geometrische Bedeutung, es ist nämlich $\alpha - \alpha'$ der sphärische Excess des Vierecks $A\,P\,B_1\,A_1$, dessen Fläche, eben, genähert

$$= \frac{y' + y}{2}\,(x' - x) \text{ ist.}$$

Man kann diese Bedeutung von $\alpha - \alpha'$ unmittelbar leicht nachweisen, nämlich nach Fig. 3. ist der Excess des Vierecks:

$$90° + 90° + (90° + \alpha) + (90° - \alpha') - 360° = \alpha - \alpha' \tag{19}$$

Dieses ist dieselbe Anschauung, welche auch auf die Meridian-Konvergenz (§ 45.) angewendet werden kann.



Rechen-Hülfsmittel für die Korrektions-Glieder der Soldner schen Formeln.

Wenn man zu häufiger Anwendung dieser Coordinaten-Formeln Schemate lithographiert, und hiebei die konstanten Coëfficienten-Logarithmen $\log \frac{1}{2r^2}$, $\log \frac{\varrho}{2r^2}$ u. s. w. mit vordruckt, so geht die Rechnung nach den Formeln (14), (15), (16) ziemlich rasch; doch sind auch schon mehrfach besondere Hilfsmittel angewendet worden.

In unserem Anhang Seite [44] haben wir zwei kleine Tabellen I. und II. für die Korrektions-Glieder der Formeln (14), (15), (16) gegeben, insofern alle diese Glieder im wesentlichen die Form $\frac{A^2 B}{2r^2}$ oder $\frac{A B}{r^2} \varrho$ haben, doch sind diese Tabellen I. und II. auf Seite [44] nicht zum eigentlichen Rechnen bestimmt, sondern nur zur Übersicht, oder als Hauptwerte zu graphischen Darstellungen, oder auch zur Unterstützung von Rechnungen mit dem Rechenschieber u. dergl.

Eine ausführlichere, für $\varphi = 51°$ gültige, zum unmittelbaren praktischen Gebrauch bestimmte Tabelle der Werte $\frac{A^2 B}{2r^2}$ ist enthalten in dem Werke: „Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmess-Kunst von F. G. Gauss", 2. Aufl. 1892, II. Teil, S. 54—61.

Graphische Hilfsmittel für die Soldner schen Korrektions-Glieder sind bei der badischen Landes-Vermessung benützt worden (uns jedoch nicht näher bekannt geworden). Drei Schichten-Tafeln für den vorliegenden Zweck giebt Franke, „Die Grundlehren der trigonometrischen Vermessung", Leipzig 1879, Anhang Tafel I., II., III.

Alle diese Hilfsmittel sind aber kaum im stande, das unmittelbare Ausrechnen der Korrektions-Glieder zu ersetzen, zumal man bei solchen Rechnungen, zum Schutz gegen die vielen Abrundungs-Häufungen die einzelnen Glieder meist auf $0{,}001^m$ ausrechnet, um im Schlussergebnis $0{,}01^m$ noch scharf zu haben, und hiezu ist das Ausrechnen der Glieder im vorgedruckten Schema mit 4—5 stelligen Logarithmen immer noch das Beste.

Die Soldner schen Korrektions-Glieder sind zwar alle von der Ordnung $1 : r^2$, aber unter sich doch gewissermassen von verschiedener Ordnung, je nachdem $s \sin \alpha$, $s \cos \alpha$ oder y , y' selbst, mehr noch, je nachdem $s^2 \sin^2 \alpha$, $s^2 \cos^2 \alpha$ oder y^2 , y'^2 darin auftreten, denn die $s \sin \alpha = v$ und $s \cos \alpha = u$ sind im allgemeinen erheblich kleiner als die y, und deswegen ist das Glied $\frac{u\, y'^2}{2r^2}$ in (15) das erheblichste von allen. Wir werden später bei den konformen Coordinaten (§ 52.) finden, dass dort solche Glieder mit y^3 nicht vorkommen.

Die Unmöglichkeit genauer und bequemer Hilfstafeln für die Soldner schen Korrektions-Glieder ist ein Übelstand des Systems selbst, der namentlich bei der Vergleichung mit den später in § 52. zu behandelnden konformen Coordinaten zu Tage tritt.

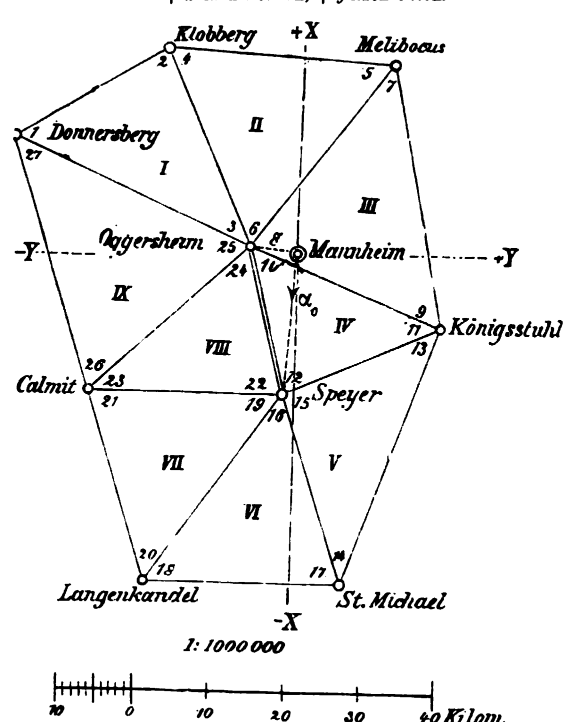
§ 47. Beispiel der Soldnerschen Coordinaten-Berechnung.

Zu einem zusammenhängenden Zahlen-Beispiel, an welchem der ganze Gang der Soldner schen Coordinaten-Berechnung gezeigt werden kann, eignet sich sehr gut der nördliche Teil des badischen Netzes, den wir schon früher mehrfach behandelt haben.



Dieses in der nachfolgenden Fig. 1. dargestellte Netz wurde aus badischen und einigen anderen Winkeln zusammengesetzt und (unabhängig von den amtlichen Berechnungen) in sich selbst ohne weitere Anschlüsse ausgeglichen und 1870 veröffentlicht in den „astronom. Nachrichten“ 75. Band, S. 289—306 „über die Genauigkeit süddeutscher Triangulierungen“, und jene Ausgleichung ist auch unverändert in den ersten zwei Auflagen dieses Werkes 1873 und 1878 aufgenommen, dagegen in 3. Aufl. I. Band, 1888, S. 194—204 schärfer neu berechnet, wobei die Winkel sich teilweise um 0,001″ oder 0,002″ geändert haben. In der 4. Aufl. I. Band, 1895, S. 174 ist die Ausgleichung nicht mehr aufgenommen, weshalb wir nun die ausgeglichenen Winkel und Seiten von 3. Aufl. I. Band, 1888, S. 202—203 hier benützen, wie sie in dem nachfolgenden Abrisse (S. 265) sich darstellen.

Fig. 1.
Coordinaten-System mit dem Ursprung Mannheim.
$+x$ nach Norden, $+y$ nach Osten.



Das Netzbild mit Andeutung des Coordinaten-Systems ist in nebenstehender Fig. 1. gezeichnet.

Von dem Punkt Mannheim Sternwarte, der als Coordinaten-Nullpunkt dient, zählt die amtliche badische Vermessung $+x$ nach Süden und $+y$ nach Westen, während wir nun, dem allgemeineren Gebrauche in Deutschland entsprechend, $+x$ nach Norden und $+y$ nach Osten zählen wollen.

Auf der Sternwarte Mannheim wurde das Azimut nach Speyer astronomisch gemessen, von Norden über Osten gezählt:

$$\text{Azimut Mannheim-Speyer} = 183° \, 40' \, 25{,}291'' \quad (1)$$

Dieses *Azimut* Mannheim-Speyer wird man unter der Bezeichnung *Richtungswinkel* in dem nachfolgenden Ausgleichungsabrisse S. 265 wieder finden, denn im Coordinaten-Nullpunkt, durch welchen der Meridian als x-Axe geht, ist das Azimut gleich dem Richtungswinkel, während in allen anderen Punkten die Richtungswinkel sich von den Azimuten unterscheiden.

Wir geben sofort den ganzen Abriss des Netzes mit ausgeglichenen Richtungswinkeln α und ausgeglichenen Entfernungen $log\, s$, obgleich zwar alle $log\, s$ als Ergebnisse der Netzausgleichung eingesetzt werden können, die Spalten der Richtungswinkel α aber erst allmählich im Laufe der nachfolgenden Coordinatenrechnung sich füllen werden.

Abriss der Triangulierung des Netzes Fig. 1. S. 264 mit Soldnerschen Coordinaten.

Stationen und Zielpunkte	Richtungswinkel sphärisch α	Redukt. $\delta\alpha$	eben $\alpha_0 = \alpha + \delta\alpha$	Entfernung sphärisch $\log s$	Redukt. $\delta \log s$	eben $\log s_0$
1. Mannheim.						
Speyer	183° 40′ 25,29″	− 0,02	183° 40′ 25,27″	4.275 4362·8	+ 0·0	4.275 4362·8
Oggersheim	273 42 22,23	+ 0,00	273 42 22,23	3.779 1890·3	+ 0·3	3.779 1890·6
2. Speyer.						
Mannheim	3° 40′ 25,23″	+ 0,04	3° 40′ 25,27″	4.275 4362·8	+ 0·0	4.275 4362·8
Königsstuhl	65 10 11,04	− 0,25	65 10 10,79	4.358 8019·0	+ 1·1	4.358 8020·1
St. Michael	161 20 31,86	+ 1,13	161 20 32,99	4.430 2529·8	+ 0·8	4.430 2530·6
Langenkandel . . .	215 0 1,15	− 0,63	215 0 0,52	4.502 8974·0	+ 5·0	4.502 8979·0
Calmit	270 34 57,86	+ 0,00	270 34 57,86	4.418 4219·3	+ 0·3	4.418 4219·6
Oggersheim	345 59 7,49	+ 0,13	345 59 7,62	4.296 5476·9	+ 0·3	4.296 5477·2
3. Oggersheim.						
Melibocus	35° 38′ 31,00″	− 0,07	35° 38′ 30,93	4.507 0618·5	+ 1·9	4.507 0620·4
Mannheim	93 42 22,24	− 0,01	93 42 22,23	4.779 7890·3	+ 0·3	3.779 1890·6
Königsstuhl	110 37 58,62	+ 0,14	110 37 58,76	4.435 7945·9	+ 0·9	4.435 7946·8
Speyer	165 59 7,85	− 0,23	165 59 7,62	4.296 5476·9	+ 0·3	4.296 5477·2
Calmit	228 30 28,54	− 1,02	228 30 27,52	4.456 1549·3	+ 7·7	4.456 1557·0
Donnersberg	294 51 17,21	+ 1,17	294 51 18,38	4.549 3120·0	+ 5·6	4.549 3125·6
Klobberg	336 22 4,82	+ 0,75	336 22 5,57	4.479 8976·0	+ 7·2	4.479 8983·2
4. Calmit.						
Oggersheim	48° 30′ 26,93″	+ 0,59	48° 30′ 27,52″	4.456 1549·3	+ 7·7	4.456 1557·0
Speyer	90 34 57,88	− 0,02	90 34 57,86	4.418 4219·3	+ 0·3	4.418 4219·6
Langenkandel . . .	163 12 53,76	− 1,29	163 12 52,47	4.439 5852·2	+ 26·9	4.439 5879·1
Donnersberg	342 23 54,18	+ 3,44	342 23 57,62	4.550 1058·1	+ 52·3	4.550 1110·4
5. Donnersberg.						
Klobberg	57° 29′ 38,98″	+ 0,08	57° 29′ 39,06″	4.375 9182·8	+ 13·2	4.375 9196·0
Oggersheim	114 51 18,88	+ 0,50	114 51 18,38	4.549 3120·0	+ 5·6	4.549 3125·6
Calmit	162 23 59,80	− 2,18	162 23 57,62	4.550 1058·1	+ 52·3	4.550 1110·4
6. Klobberg.						
Melibocus	92° 51′ 35,28″	− 0,02	92° 51′ 35,26″	4.489 5442·5	+ 0·3	4.489 5442·8
Oggersheim	156 22 6,51	− 0,94	156 22 5,57	4.479 8976·0	+ 7·2	4.479 8983·2
Donnersberg	237 29 40,80	− 1,74	237 29 39,06	4.375 9182·8	+ 13·2	4.375 9196·0
7. Melibocus.						
Königsstuhl	169° 13′ 40,29″	+ 1,49	169° 13′ 41,78″	4.560 7787·3	+ 13·9	4.560 7801·2
Oggersheim	215 38 30,55	+ 0,38	215 38 30,93	4.507 0618·5	+ 1·9	4.507 0620·4
Klobberg	272 51 35,26	+ 0,00	272 51 35,26	4.489 5442·5	+ 0·3	4.489 5442·8
8. Königsstuhl.						
St. Michael	199° 2′ 30,38″	+ 1,23	199° 2′ 31,61″	4.569 8613·7	+ 9·2	4.569 8622·9
Speyer	245 10 10,59	+ 0,20	245 10 10,79	4.358 8019·0	+ 1·1	4.358 8020·1
Oggersheim	290 37 58,96	− 0,20	290 37 58,76	4.435 7945·9	+ 0·9	4.435 7046·8
Melibocus	349 13 43,21	− 1,43	349 13 41,78	4.560 7787·3	+ 13·9	4.560 7801·2
9. St. Michael.						
Königsstuhl	19° 2′ 32,78″	− 1,17	19° 2′ 31,61″	4.569 8613·7	+ 9·2	4.569 8622·9
Langenkandel . . .	268 48 10,93	+ 0,86	268 48 11,79	4.429 4468·0	+ 0	4.429 4468·0
Speyer	341 20 32,27	− 0,27	341 20 32,00	4.430 2529·8	+ 0·8	4.430 2530·6
10. Langenkandel.						
Speyer	34° 59′ 59,18″	+ 1,34	35° 0′ 0,52″	4.502 8974·0	+ 5·0	4.502 8979·0
St. Michael	88 48 10,91	+ 0,88	88 48 11,79	4.429 4468·0	+ 0·0	4.429 4468·0
Calmit	343 12 50,62	+ 1,85	343 12 52,47	4.439 5852·2	+ 26·9	4.439 5879·1

Zuerst müssen wir die nötigen Konstanten für die Soldnerschen Glieder zweiter Ordnung bilden:

Der Coordinaten-Nullpunkt hat die geographische Breite rund $\varphi = 49° 30'$, und damit bilden wir nach Seite [20] des Anhangs die für uns nötigen konstanten Coëfficienten-Logarithmen:

$$\left.\begin{array}{lll} \log \frac{1}{2r^2} = 6.08923 & \log \frac{1}{6r^2} = 5.61211 & \log \frac{1}{3r^2} = 5.91314 \\ \log \frac{\varrho}{r^2} = 1.70469 & \log \frac{\varrho}{2r^2} = 1.40366 & \log \frac{\varrho}{6r^2} = 0.92654 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Wir beginnen mit dem schon bei (1) angegebenen Ausgangswerte

$$\text{Mannheim-Speyer } \alpha_0 = 183° 40' 25{,}291'' \text{ und } \log s = 4.275\,4362{\cdot}8 \quad (3)$$

Damit können wir sofort die Coordinaten y', x' von Speyer berechnen, und zwar vereinfachen sich diesesmal die allgemeinen Formeln deswegen, weil die Ausgangs-Coordinaten y, x für Mannheim beide Null sind. Setzt man also $y = 0$ und $x = 0$ in den Formeln (13)—(16) § 46, S. 261, so bekommt man:

$$\text{Speyer} \quad \left.\begin{array}{ll} s \sin \alpha_0 = v & s \cos \alpha_0 = u \\ y' = v - \frac{u^2 v}{6r^2} \;, & x' = u + \frac{u v^2}{3r^2} \,, \\ \alpha' = \alpha_0 - \frac{\varrho}{2r^2} u v & \end{array}\right\} \quad (4)$$

Nun rechnen wir hiernach mit 7stelligen Logarithmen (mit einer an sich unsicheren, durch Interpolation nach Schrön erhaltenen 8. Kontrollestelle 0·1):

	$\log s$	4.275 4362·8	$\log s$	4.275 4362·8
$\alpha_0 = 183° 40' 25{,}291''$	$\log \sin \alpha_0$	8.806 6825·0$_n$	$\log \cos \alpha_0$	9.999 1066·6$_n$
	$\log v$	3.082 1187·8$_n$	$\log u$	4.274 5429·4$_n$
		$v = -1208{,}144^m$		$u = -18816{,}678^m$ (5)

Hiezu die Korrektions-Glieder nach (4):

$\log u^2$	8.5491	$\log u$	4.2745$_n$
$\log v$	3.0821$_n$	$\log v^2$	6.1642
$\log(-1:6r^2)$	5.6121$_n$	$\log(1:3r^2)$	5.9131
	7.2433		6.3518$_n$
	$+0{,}0017$		$-0{,}0002$ (6)

Diese kleinen Beträge zu (5) hinzunehmend hat man:

$$\text{Speyer} \quad y = -1208{,}142^m \qquad x = -18\,816{,}678^m \quad (7)$$

Endlich noch die Ordinaten-Konvergenz:

$\log u$	4.2745$_n$	
$\log v$	3.0821$_n$	
$\log(-\varrho:2r^2)$	1.4037$_n$	
	8.7603$_n$	$-0{,}058''$ (8)

Man hat also nun in Zusammenfassung:

$$\begin{array}{rl} \text{Richtungs-Winkel Mannheim-Speyer} & \alpha = 183^\circ\, 40'\, 25{,}291'' \\ \text{hiezu nach (8):} & -0{,}058 \\ \hline & \alpha' = 183^\circ\, 40'\, 25{,}233'' \\ & \pm 180^\circ \end{array}$$

Also Richtungs-Winkel Speyer-Mannheim $\alpha_2 = 3^\circ\, 40'\, 25{,}233''$ (9)

Nun kann man die Richtungs-Winkel aller von Speyer ausgehenden Strahlen angeben, denn man braucht nur die auf Speyer ausgeglichenen Winkel mit α_2 zusammenzusetzen. Dazu brauchen wir, wie der Anblick des Netzbildes Fig. 1., S. 264 zeigt, die ausgeglichenen Dreieckswinkel der Station Speyer, welche nach Band I, 3. Aufl. 1888, S. 202, 203 sind:

Mannheim		
Königsstuhl	... = 61° 29′ 45,804″	
St. Michael	[15] = 96 10 20,829	
Langenkandel	[16] = 53 39 29,285	
Calmit	[19] = 55 34 56,714	360° 0′ 0,000″
Oggersheim	[22] = 75 24 9,630	
Mannheim	... = 17 41 17,738	

Wenn man diese 6 Winkel zu dem soeben berechneten 3° 40′ 25,233″ nacheinander addiert, so erhält man die sämtlichen Richtungswinkel, wie sie für die Station 2. Speyer auf S. 265 angegeben sind, auf 0,01″ abgerundet.

Nach diesem ersten Beispiele können wir kurz sagen, dass auch die zweite vom Nullpunkt Mannheim ausgehende Richtung Mannheim-Oggersheim ebenso wie Mannheim-Speyer behandelt wird, und dann auch den Abriss 3. Oggersheim auszufüllen gestattet, wie auf S. 265 zu sehen ist.

Nach diesem kommen aber die allgemeinen Coordinatenformeln von (14)—(16) § 46, S. 261, deren Anwendung an dem Beispiel Speyer-Langenkandel gezeigt werden soll:

Aus dem soweit ausgefüllten Abrisse S. 265 entnimmt man hiezu:

Speyer-Langenkandel $\alpha = 215^\circ\, 0'\, 1{,}150''$ und $\log s = 4.502\,8974{\cdot}0$

$\log s$	4.502 8974·0	$\log s$	4.502 8974·0
$\log \sin \alpha$	9.758 5947·8$_n$	$\log \cos \alpha$	9.913 3628·3$_n$
$\log v$	4.261 4921·8$_n$	$\log u$	4.416 2602·3$_n$

	$v = -18\,259{,}639$	$u = -26\,077{,}156$
Speyer (7) gegeben:	$y = -\ \ 1\,208{,}142$	$x = -18\,816{,}678$
	$y + v = -19\,467{,}781$	$x + u = -14\,893{,}834$
Langenkandel	genähert $= y'$	genähert $= x'$

Korrektions-Glieder für y. Korrektions-Glieder für x.

$\log u^2$	8.8325	$\log u^2$	8.8325	$\log u$	4.4163$_n$	$\log u$	4.4163$_n$
$\log y$	3.0821$_n$	$\log n$	4.2615$_n$	$\log y'^2$	8.5786	$\log v^2$	8.5230
$\log(-1:2r^2)$	6.0892$_n$	$\log(-1:6r^2)$	5.6121$_n$	$\log(1:2r^2)$	6.0892	$\log(-1:6r^2)$	5.6121$_n$
	8.0038		8.7061		9.0841$_n$		8.5514
	+ 0,010		+ 0,051		− 0,121		+ 0,036

Zusammenfassung:

	$y + v =$	$-19\,467{,}781^m$	$x + u =$	$-44\,893{,}834^m$
		$+0{,}010$		$-0{,}121$
		$+0{,}051$		$+0{,}036$
Langenkandel:	$y' =$	$-19\,467{,}720$	$x' =$	$-44\,893{,}919$

Korrektions-Glieder für α:

$\log u$	4.4163_n	$\log u$	4.4163_n
$\log y$	3.0821_n	$\log v$	4.2615_n
$\log(-\varrho : r^2)$	1.7047_n	$\log(-\varrho : 2r^2)$	1.4037_n
	9.2031_n		0.0815_n
	$-0{,}160$		$-1{,}206$

Statt dessen kann auch die Rechnung geführt werden nach der zweiten Formel (16) § 46. S. 261

$$\alpha' - \alpha = u \frac{y + y'}{2} \frac{\varrho}{r^2}$$

Zusammenfassung: $\alpha = 215°\ 0'\ 1{,}150''$
$-\ 0{,}160$
$-\ 1{,}206$

α' $214°\ 59'\ 59{,}784''$
$\pm 180°$
$\alpha_{10} =$ $34°\ 59'\ 59{,}784''$ = Richtungs-Winkel Langenkandel-Speyer.

Mit diesem Richtungs-Winkel α_{10} und mit den auf Langenkandel ausgeglichenen Dreiecks-Winkeln kann man nun von neuem einen orientierten Abriss für die Station 10. Langenkandel aufstellen, wie auf S. 265 zu sehen ist.

In dieser Weise wird in dem ganzen Netze auf verschiedenen Wegen herum gerechnet, wobei zahlreiche Proben sowohl für die Richtungs-Winkel als auch für die Coordinaten entstehen, z. B. nachdem die beiden Stationen 2. Speyer und 3. Oggersheim erledigt sind, kann man nach 4. Calmit von beiden Seiten her rechnen, und man wird finden:

von 2. Speyer her:	4. Calmit	$y_4 = -27\,414{,}066^m$	$x_4 = -18\,550{,}134^m$
„ 3. Oggersheim her:	„	,065	,135

also hinreichende Übereinstimmung. Ebenso auch die Richtungs-Winkel:

von 2. Speyer her:	Richtungs-Winkel	$(4.2) = 90°\ 34'\ 57{,}882''$
„ 3. Oggersheim her:	„	$(4.3) = 48°\ 30'\ 26{,}932''$

Diese beiden Richtungs-Winkel werden in den Abriss der Station Calmit eingesetzt, und geben mit den auf Calmit ausgeglichenen Dreiecks-Winkeln Proben, welche in unserem Falle zu Abänderungen von 0,002″ und 0,003″ geführt haben, was jedoch auf S. 265, wo alles auf 0,01″ abgerundet ist, nicht mehr bemerklich werden kann.

Man sieht, dass die Stations-Abrisse von S. 265 in Hinsicht auf die Richtungswinkel allmählich entstehen. Die Endwerte der Coordinaten sind folgende:



Punkt	y	x
1. Mannheim . .	0,000^m	0,000^m
2. Speyer	— 1 208,142	— 18 816,676
3. Oggersheim . .	— 6 001,777	+ 888,767
4. Calmit	— 27 414,066	— 18 550,134
5. Donnersberg . .	— 38 145,688	+ 15 278,872
6. Klobberg . . .	— 18 104,628	+ 28 049,296
7. Melibocus . . .	+ 12 727,470	+ 26 509,100
8. Königsstuhl . .	+ 19 525,476	— 9 223,075
9. St. Michael . .	+ 7 407,498	— 44 332,386
10. Langenkandel .	— 19 467,721	— 44 893,918

Rechtwinklige sphärische Soldnersche Coordinaten aller Punkte des Netzes Fig. 1. S. 264. Nullpunkt Mannheim mit $+x$ nach Norden, und $+y$ nach Osten. (10)

Vergleichungen dieser Coordinaten mit den amtlichen Coordinaten von Baden, Bayern Hessen, und Bemerkungen dazu, wurden gegeben in Band I, Aufl. 3, 1888, S. 203—204, II. Band Aufl. 2, 1878, S. 272 und astr. Nachr., 75. Band, 1870, Nr. 1795—1796, S. 289—306 und S. 367.

Der grosse Abriss von S. 265 wäre für die Zwecke der Soldnerschen Coordinaten-Behandlung genügend, wenn er die sphärischen Richtungs-Winkel α und die sphärischen Entfernungen $\log s$ enthielte. Wir haben aber auch noch die ebenen Richtungs-Winkel α_0 und die ebenen Entfernungen s_0 dazu berechnet, nach den einfachen Formeln:

$$\tang \alpha_0 = \frac{y'-y}{x'-x}$$

$$s_0 = \frac{y'-y}{\sin \alpha_0} = \frac{x'-x}{\cos \alpha}$$

wobei die Coordinaten $x\,y$, $x'\,y'$ selbst die sphärischen in der vorstehenden Tabelle (10) enthaltenen sind. Die Differenzen $\delta\alpha$ und $\delta \log s$ sind dann einfach aus $\alpha_0 - \alpha$ und $\log s_0 - \log s$ erhalten. Wie man diese $\delta\alpha$ und $\delta \log s$ selbständig berechnet, wird im folgenden § 48. gezeigt werden.

Wir haben diese $\delta\alpha$ und $\delta \log s$ auf S. 265 mit aufgenommen, auch wegen der späteren Vergleichung mit den konformen Coordinaten.

§ 48. Bestimmung von Entfernung und Richtungs-Winkeln aus Soldnerschen Coordinaten.

Es handelt sich um Umkehrung der bisherigen in § 46.—47. behandelten Aufgabe, und um die Übersicht zu gewinnen, wollen wir an die entsprechenden einfachen Aufgaben der Ebene erinnern. Man hat bekanntlich in der Ebene:

$$y'-y = s \sin \alpha \qquad x'-x = s \cos \alpha \tag{a}$$

$$\tang \alpha = \frac{y'-y}{x'-x} \quad \text{und} \quad s = \frac{y'-y}{\sin \alpha} = \frac{x'-x}{\cos \alpha} \tag{b}$$

$$\text{oder} \quad s = \sqrt{(y'-y)^2 + (x'-x)^2} \tag{c}$$

Während in § 46. die sphärischen Analogieen zu den ebenen Formeln (a) behandelt worden sind, handelt es sich jetzt darum, auch zu den umgekehrten For-

meln (*b*) und (*c*) das zu finden, was entsprechend auf der Kugel gilt, d. h. wir stellen die Aufgabe: Gegeben sind die sphärischen Coordinaten zweier Punkte P und P', nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ und } y \text{ Coordinaten von } P \\ x' \text{ und } y' \quad \text{,,} \qquad \text{,,} \quad P' \end{array}\right\} \tag{1}$$

Gesucht ist:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{die Entfernung} & PP' = s \\ \text{der Richtungs-Winkel} & (PP') = \alpha \\ \text{,,} \qquad \text{,,} & (P'P) = \beta = \alpha' \pm 180^\circ \end{array}\right\} \tag{2}$$

I. Gemeinsame Formeln für s und α.

Man kann diese Aufgabe lösen durch Umkehrung von (14), (15) § 46. S. 261, wobei in den Korrektions-Gliedern $u = x' - x$ und $v = y' - y$ gesetzt wird. Auf diese Weise erhält man:

$$s \sin \alpha = (y' - y) + \frac{(x' - x)^2 y}{2 r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)}{6 r^2} = (y' - y) + \delta y \tag{3}$$

$$s \cos \alpha = (x' - x) - \frac{(x' - x) y'^2}{2 r^2} + \frac{(x' - x)(y' - y)^2}{6 r^2} = (x' - x) + \delta x \tag{4}$$

Die hier geschriebenen Zeichen δy und δx sollen nur die Zusammenfassung der Korrektions-Glieder ausdrücken, denn man hat nun weiter:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{(y' - y) + \delta y}{(x' - x) + \delta x} \tag{5}$$

$$s = \frac{(y' - y) + \delta y}{\sin \alpha} \quad \text{oder} \quad = \frac{(x' - x) + \delta x}{\cos \alpha} \tag{6}$$

Um auch den Gegenrichtungs-Winkel β zu finden, braucht man nur die Bezeichnungen für die Punkte P und P' umzukehren, was wir nicht durch besondere Formeln von der Form (5) und (6) anzuzeigen für nötig halten (vgl. das nachfolgende Zahlen-Beispiel).

Statt dessen kann man aber auch die Formel (16) § 46. S. 261 anwenden:

$$\alpha' = \alpha - (x' - x)(y' + y) \frac{\varrho}{2 r^2} \tag{7}$$

oder

$$\alpha' = \alpha - (x' - x) y \frac{\varrho}{r^2} - (x' - x)(y' - y) \frac{\varrho}{2 r^2} \tag{7a}$$

und dann:

$$\beta = \alpha' \pm 180^\circ \tag{7b}$$

Damit sind alle Bedürfnisse befriedigt; es ist jedoch aus vielen Gründen erwünscht, die Entfernung s auch ohne die Richtungs-Winkel oder andererseits einen oder beide Richtungs-Winkel ohne die Entfernung zu bestimmen.

II. Einzelformel für s.

Um die Entfernung s allein aus den Coordinaten abzuleiten, kann man sofort die Gleichungen (3) und (4) benützen, denn wenn man diese quadriert und addiert, so erhält man:

$$s^2 = \left((y' - y) + \frac{(x' - x)^2 y}{2 r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)}{6 r^2}\right)^2$$
$$+ \left((x' - x) - \frac{(x' - x) y'^2}{2 r^2} + \frac{(x' - x)(y' - y)^2}{6 r^2}\right)^2$$

Wenn man die Quadrierungen ausführt und dabei alle Glieder von der Ordnung $1 : r^2$ vernachlässigt, so erhält man:

$$s^2 = (y' - y)^2 + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)\, y}{r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)^2}{3\, r^2}$$

$$+ (x' - x)^2 - \frac{(x' - x)^2\, y'^2}{r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)^2}{3\, r^2}$$

Zusammengefasst und geordnet giebt dieses:

$$s^2 = (y' - y)^2 + (x' - x)^2 + \frac{(x' - x)^2}{3\, r^2} \left(3\, y\, (y' - y) + 2\, (y' - y)^2 - 3\, y'^2\right)$$

$$s^2 = (y' - y)^2 + (x' - x)^2 - \frac{(x' - x)^2}{3\, r^2} \left(y^2 + y\, y' + y'^2\right) \tag{8}$$

Hier bezeichnen wir die ersten Glieder, welche der Rechnung mit ebenen Coordinaten entsprechen mit s_0^2, d. h.:

$$(y' - y)^2 + (x' - x)^2 = s_0^2 \tag{9}$$

und da man in den Korrektions-Gliedern s_0 mit s verwechseln kann, wird (8) geben:

$$s^2 = s_0^2 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{3\, r^2} (y^2 + y\, y' + y'^2)\right)$$

$$s = s_0 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{6\, r^2} (y^2 + y\, y' + y'^2)\right) \text{ oder } = s_0 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{6\, r^2}\, \frac{y'^3 - y^3}{y' - y}\right) \tag{10}$$

oder logarithmisch:

$$\log s = \log s_0 - \frac{\mu}{6\, r^2} \cos^2 \alpha\, (y^2 + y\, y' + y'^2) \tag{11}$$

III. Einzelformel für α.

Um auch für α eine unmittelbare Formel zu bekommen, denken wir uns die Formeln (3) und (4) so zerlegt:

$$\left.\begin{aligned} s \sin \alpha &= (y' - y) + d\, y \\ s \cos \alpha &= (x' - x) + d\, x \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

wo die Bedeutung von $d\, y$ und $d\, x$ sich durch Vergleichung mit (3) und (4) giebt, d. h. es sind $d\, y$ und $d\, x$ die negativen Werte der oben mit $\delta\, y$ und $\delta\, x$ bezeichneten Zusammenfassungen, oder ausführlich:

$$\left.\begin{aligned} d\, y &= \frac{(x' - x)^2\, y}{2\, r^2} + \frac{(x' - x)^3 (y' - y)}{6\, r^2} \\ d\, x &= -\frac{(x' - x)\, y'^2}{2\, r^2} + \frac{(x' - x)\, (y' - y)^2}{6\, r^2} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Wir wollen auch α selbst entsprechend zerlegt denken in $\alpha_0 + d\, \alpha$ und haben dann:

$$\alpha = \alpha_0 + d\, \alpha = arc\ tang \frac{(y' - y) + d\, y}{(x' - x) + d\, x} \tag{14}$$

Nach dem Taylorschen Satze giebt dieses:

$$\alpha_0 = arc\ tang \frac{y' - y}{x' - x} \tag{15}$$

und

$$d\,\alpha = \frac{1}{1 + \left(\frac{y'-y}{x'-x}\right)^2} \frac{d\,y}{x' - x} - \frac{1}{1 + \left(\frac{y'-y}{x'-x}\right)^2} \frac{y' - y}{(x' - x)^2} d\,x$$

$$d\,\alpha = \frac{x' - x}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} d\,y - \frac{y' - y}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} d\,x \tag{16}$$

Setzt man die oben bei (13) erklärten Bedeutungen von $d\,y$ und $d\,x$ ein, so erhält man aus (16):

$$d\,\alpha = \frac{(x' - x)\,y}{2\,r^2} \cos^2\alpha + \frac{(x' - x)(y' - y)}{6\,r^2} \cos^2\alpha + \frac{y'^2}{2\,r^2} \cos\alpha \sin\alpha - \frac{(x' - x)(y' - y)}{6\,r^2} \sin^2\alpha \tag{17}$$

Dieses kann auch so geschrieben werden:

$$d\,\alpha = \frac{(x' - x)\,y}{2\,r^2} \cos^2\alpha + \frac{y'^2}{4\,r^2} \sin 2\,\alpha + \frac{(x' - x)(y' - y)}{6\,r^2} \cos 2\,\alpha \tag{18}$$

Nützlicher ist noch eine andere Umformung von (17), welche im dritten Gliede von (17) den Faktor $\sin^2\alpha$ erzeugt, nämlich:

$$d\,\alpha = \frac{x' - x}{6\,r^2} \cos^2\alpha\,(2\,y + y') + \frac{x' - x}{6\,r^2} \sin^2\alpha \left(\frac{3\,y'^2}{y' - y} - (y' - y)\right)$$

hier ist

$$\frac{3\,y'^2}{y' - y} - (y' - y) = 2\,y + y' + \frac{y^2 + y\,y' + y'^2}{y' - y}$$

und setzt man dieses in das vorhergehende ein, so bekommt man:

$$d\,\alpha = \frac{x' - x}{6\,r^2} (2\,y + y') + \frac{x' - x}{6\,r^2\,s^2} (y'^3 - y^3) \tag{19}$$

Dieses $d\,\alpha$ ist die Verbesserung, welche an dem Näherungswert α_0 von (15) noch anzubringen ist; man kann also im Zusammenhang für den Richtungs-Winkel von einem Punkte P (mit x, y) nach P' (mit x', y') schreiben, zugleich mit Zusetzung der nötigen ϱ:

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\varrho}{6\,r^2} (x' - x)(2\,y + y') + \frac{\varrho}{6\,r^2} \frac{x' - x}{s^2} (y'^3 - y^3) \tag{20}$$

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\varrho}{6\,r^2} (x' - x)(2\,y + y') + \frac{\varrho}{6\,r^2} (y^2 + y\,y' + y'^2) \sin\alpha \cos\alpha \tag{20a}$$

Auf den jenseitigen Punkt angewendet giebt diese Formel:

$$\alpha' = \alpha_0 + \frac{\varrho}{6\,r^2} (x - x')(y + 2\,y') + \text{ zweites Glied von oben.}$$

Diese beiden Formeln geben subtrahiert:

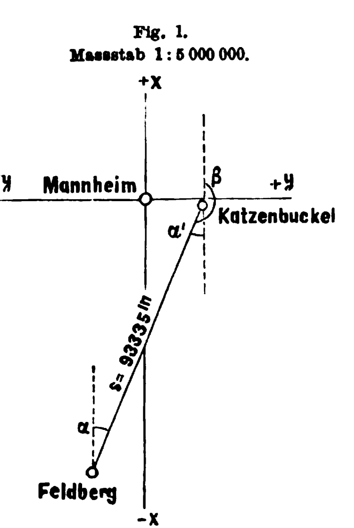
$$\alpha' - \alpha = \frac{\varrho}{2\,r^2} (x' - x)(y + y') \tag{21}$$

Dieses ist wieder die Formel für die Ordinaten-Konvergenz nach (11) § 46. S. 261, was auch unmittelbar eingesehen werden kann.

IV. Zahlenbeispiele.

Um die vorstehenden Formeln anzuwenden, kann man in den Zahlenangaben von § 47. reiche Gelegenheit finden, indem aus den Coordinaten von (10) S. 269 sich die Richtungs-Winkel und die Entfernungen des grossen Abrisses S. 265 wieder rückwärts finden lassen müssen. Dieses als Übung anheimgebend, wollen wir ein grösseres Zahlenbeispiel hier durchrechnen, bei welchem die Korrektions-Glieder mehr ausmachen.

Fig. 1.
Massstab 1 : 5 000 000.



Nach nebenstehender Fig. 1. nehmen wir die zwei Punkte Katzenbuckel und Feldberg in dem badischen Coordinatensystem (1870—1871 von uns festgelegte und ins badische System eingerechnete Gradmessungspunkte). Die mittlere Breite ist rund = 49° und dazu

$$log \frac{1}{r^2} = 6.39031.$$

Die nachfolgenden Rechnungen sind nicht bloss 7 stellig sondern mit dem 10 stelligen Thesaurus gemacht, um die Proben formell jedenfalls bis auf 0,001″ zum Stimmen zu bringen, was bei diesem Schulbeispiel formell erwünscht ist.

K, Katzenbuckel	$y' = + 42\,176,169^m$		$x' = - \quad 1\,575,546^m$
F, Feldberg	$y = - 34\,075,071$		$x = - 179\,239,479$
	$y' - y = + 76\,251,240$		$x' - x = + 177\,663,933$
Hiezu werden die Korrektions-glieder nach (3) u. (4) berechnet:	$\delta y \begin{cases} - 13,210 \\ + \quad 9,854 \end{cases}$		$\delta x \begin{cases} - 3,881 \\ + 4,229 \end{cases}$
	$(y' - y) + \delta y = + 76247,884$		$(x' - x) + \delta x = + 177\,664,281$

damit geben die Formeln (5) und (6):

$$(F\,,\,K) = \alpha = 23^\circ\,13'\,38,920'' \quad log\, s = 5.286\,3099 \cdot 9 \quad s = 193\,334,779^m \qquad (21)$$

Die Umkehrung der Bezeichnungen giebt:

F, Feldberg	$y' = - 34\,075,071^m$	$x' = - 179\,239,479^m$
K, Katzenbuckel	$y = + 42\,176,169$	$x = - \quad 1\,575,546$
	$y' - y = - 76\,251,240$	$x' - x = - 177\,663,933$
Korrektionsglieder nach (3) und (4)	$\delta y \begin{cases} + 16,350 \\ - \quad 9,854 \end{cases}$	$\delta x \begin{cases} + 2,534 \\ - 4,229 \end{cases}$
	Zähler $= - 76\,244,744$	Nenner $= - 177\,665,628$

damit wieder nach (5) und (6):

$$(K\,,\,F) = \beta = 203^\circ\,13'\,35,275'' \quad log\, s = 5.286\,3099 \cdot 8 \quad s = 193\,334,778^m \qquad (22)$$

Durch (21) und (22) ist also bereits die Entfernung s auf $0,001^m$ sicher gestellt.

Um auch die Richtungs-Winkel α und β zu versichern, hat man nach (7) und (7 a) die Differenz beider Richtungs-Winkel und zwar bei (7 a) abermals doppelt, je nachdem man die Bezeichnungen P und P' entsprechend F und K, oder umgekehrt, wählt; man bekommt für unser Beispiel:

aus (7): $\alpha' - \alpha = -\ 3{,}646''$ (23)

aus (7a): $\alpha' - \alpha = +30{,}674'' - 34{,}320'' = -3{,}646''$ (23a)

oder „ „ : $\beta' - \beta = +37{,}966 - 34{,}320 = +3{,}646''$ (23b)

Diese 3 Werte stimmen unter sich, und mit der Differenz von (21) und (22), welche 3,645″ beträgt, auf 0,001″.

Nun haben wir noch die Formeln (10) und (11), welche zuerst eine Berechnung von s_0 bzw. $log\, s_0$ verlangen, d. h. eine Berechnung, welche ebenen Coordinaten entspricht; und dabei berechnen wir auch zugleich einen ebenen Wert α_0:

$\alpha_0 = 23°\ 13'\ 42{,}356''$ $log\, s_0 = 0.286\ 3122{\cdot}4$ $s_0 = 193\ 335{,}782^m$ (24)

Hiezu nach (11) und (10): $-22{\cdot}6$ $-1{,}004$

$log\, s = 5.286\ 3099{\cdot}8$ $s = 193\ 334{,}778$ (25)

Dieses stimmt hinreichend mit (21) und (22).

Endlich haben wir noch verschiedene Formeln für $d\,\alpha$. Die Formel (18) giebt in zweifacher Anwendung:

$\alpha_0 = 23°\ 13'\ 42{,}356''$	$\beta_0 = 203°\ 13'\ 42{,}356''$
$-12{,}951$	$-16{,}030$
$+\ 1{,}633$	$+\ 1{,}066$
$+\ 7{,}881$	$+\ 7{,}881$
$\alpha = 23°\ 13'\ 38{,}919''$	$\beta = 203°\ 13'\ 35{,}273''$ (26)

Endlich giebt die Formel (20) ebenfalls zweifach:

$\alpha_0 = 23°\ 13'\ 42{,}356''$	$\beta_0 = 203°\ 13'\ 42{,}356''$
$-3{,}897$	$-7{,}543$
$+0{,}460$	$+0{,}460$
$\alpha = 23°\ 13'\ 38{,}919''$	$\beta = 203°\ 13'\ 35{,}273''$ (27)

Damit ist alles mit zahlreichen Proben berechnet, man sieht, dass man mit solchen sphärischen Coordinaten alles rechnen kann, was auch in der Ebene vorkommt, allein die neben der Hauptrechnung herlaufenden Korrektions-Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ machen doch ziemlich viele Mühe und wir wollen gleich hier bemerken, dass bei den konformen Coordinaten, welche wir später (§ 50.) kennen lernen werden, die Nebenrechnungen mit $1 : r^2$ erheblich einfacher und zugleich viel übersichtlicher werden.

Ein weiteres Zahlenbeispiel mit Soldnerschen Coordinaten, nämlich sphärisches Rückwärts-Einschneiden bei gegebenen Coordinaten dreier Zielpunkte hatten wir in 2. Aufl., II. Band 1878, S. 278—279 ausführlichst und in 3. Aufl., III. Band 1890, S. 276—277 noch im Auszug gebracht, welches nun übergangen werden mag.

Die „Soldnerschen“ Coordinaten, welche in den vorstehenden § 46.—48. behandelt wurden, sind zuerst öffentlich mitgeteilt von Bohnenberger in der Abhandlung „De computandis dimensionibus trigonometricis etc.“ Tübingen 1826, § 15—16, und Bohnenberger sagt dazu in § 16: „formulae (entsprechend unseren (14), (15), (16) § 46. S. 261) conveniunt cum iis, quibus usus est cel. Soldner in computandis dimensionibus bavaricis.“ In Württemberg sind diese Coordinaten zur Landesvermessung eingeführt und Bohnenbergers Entwicklungen stets hochgehalten worden, wie namentlich zu ersehen ist aus „Pross, Lehrbuch der praktischen Geometrie“, Stuttgart 1838, S. 314 und aus dem amtlichen Werke von Kohler, „die Landesvermessung des Königreichs Württemberg u. s. w. 1858“, S. 125—146.

Von Württemberg aus gelangten diese Coordinaten auch in die Bayerische geodätische Litteratur, nämlich in Bauernfeinds „Elemente der Vermessungskunde, 1. Auflage, II. Band 1858", S. 201—206, wo (ohne Quellenangabe) ein Auszug aus Bohnenberger „De computandis etc." § 15—17 mit drei Zahlenbeispielen Bohnenbergers gegeben sind als „Berechnung einiger Dreiecke der württembergischen Vermessung."

Soldners Entwicklungen, von 1810 stammend, wurden erst 1873 veröffentlicht in „Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage", München 1873, S. 263—281.

Alle diese Schriften geben die Grundformeln (14)—(16) § 46. S. 261 und in Betreff der Umkehrung nur die Formeln (3)—(7) S. 270. Die weiteren Formeln (10)—(20) S. 271—272 sind zuerst aufgestellt in unserer 1. Auflage, „Taschenbuch der praktischen Geometrie 1873", S. 326.

§ 49. Karten-Zeichnung nach rechtwinkligen sphärischen (Soldnerschen) Coordinaten.

Man benützt die rechtwinkligen sphärischen Coordinaten zur Karten-Zeichnung, indem man dieselben wie rechtwinklige *ebene* Coordinaten behandelt.

Dadurch erhält man ein verzerrtes Bild der krummen Erdoberfläche in der Ebene, und es ist unsere Aufgabe, die Verzerrungen, welche hier, wie bei allen anderen ebenen Abbildungen der Erdoberfläche unvermeidlich sind, zu untersuchen.

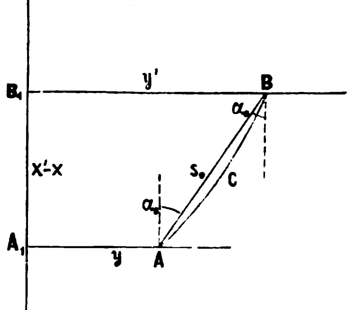
Hiezu brauchen wir nur die bereits in § 48. entwickelten Formeln anzuwenden.

Wir haben von (10) und (9) § 48. S. 271.

$$s = s_0 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{6\,r^2}(y^2 + y\,y' + y'^2)\right) \qquad (1)$$

$$s_0 = \sqrt{(y' - y)^2 + (x' - x)^2} \qquad (2)$$

Fig. 1.
Soldnersche Coordinaten in ebener Darstellung.



Indem wir in Fig. 1. die Punkte A und B mit ihren Coordinaten x, y und x', y' im ebenen System dargestellt haben, finden wir offenbar die Entfernung s_0 von (2) als *geradlinige* Entfernung $A\,B$, und man benützt das Verhältnis dieser geradlinigen Karten-Entfernung s_0 zu der wahren Entfernung s zur Berechnung des Verzerrungs-Verhältnisses, d. h. man setzt:

$$v = \frac{s_0}{s} = 1 + \frac{y^2 + y\,y' + y'^2}{6\,r^2}\cos^2 \alpha \qquad (3)$$

Für eine sehr kurze Linie s ist $y' = y$ zu setzen, und dann hat man:

$$v = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2}\cos^2 \alpha \qquad (4)$$

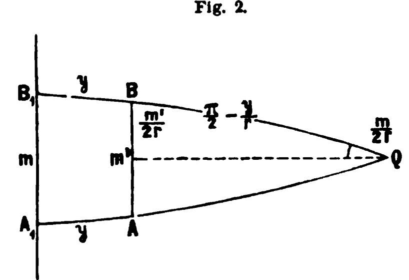
Dieses ist der allgemeine Ausdruck für die Vergrösserung einer kurzen Linie in irgend einem Punkte mit der Ordinate y, in der Richtung α. Die Vergrösserung v ist nicht abhängig von der Abscisse x, sondern nur von der Ordinate y und von der Richtung α. In Bezug auf α erreicht v seine äussersten Werte mit $\alpha = 0°$ oder $180°$ einerseits und mit $\alpha = 90°$ oder $270°$ andererseits, nämlich:

$$\alpha = 0° \text{ giebt } v_{max} = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2} \quad \text{(Meridian, } x\text{-Axe)} \qquad (5)$$

$$\alpha = 90° \quad „ \quad v_{min} = 1 \quad \text{(West-Ost, } y\text{-Axe)} \qquad (6)$$

Diese zwei Ergebnisse sind an und für sich leicht verständlich. In der West-Ost-Richtung werden die Ordinaten sowohl auf der Kugel als auch in der Ebene *gleich* aufgetragen, d. h. es ist $v = 1$; dagegen in der Nord-Richtung müssen die ebenen Masse zu gross erscheinen, weil die in Wirklichkeit konvergierenden Ordinaten y in der ebenen Zeichnung parallel sind.

Fig. 2.



Hiezu ist Fig. 2. gezeichnet mit dem Masse m in der Abscissen-Axe selbst und einem Masse m' parallel der Abscissen-Axe, im Abstand y. In der Ebene werden aber die Ordinaten y parallel, also m' *gleich* m dargestellt, und das Vergrösserungs-Verhältnis ist daher $= \frac{m}{m'}$. Nach Fig. 2. ist $A\,B$ ein Parallelkreisbogen vom Halbmesser $r' = r \cos \frac{y}{r}$ und da bei Q der Winkel $\frac{m}{r}$ sich findet, hat man:

$$m' = A\,B = \frac{m}{r} r' = m \cos \frac{y}{r}$$

$$\frac{m'}{m} = \cos \frac{y}{r} = 1 - \frac{y^2}{2\,r^2} \quad \text{oder} \quad \frac{m}{m'} = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2} \qquad (7)$$

Dieses ist eine Bestätigung von (5).

Zur Übersicht der linearen Verzerrungs-Verhältnisse haben wir nach (5) folgende Zahlen-Werte berechnet mit $\log \frac{1}{2\,r^2} = 6.08918$ für $\varphi = 50°$.

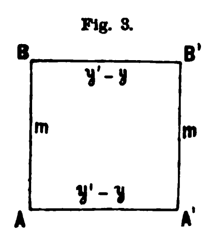
y	$\frac{y^2}{2\,r^2}$	$\frac{y^2}{2\,r^2}$ 1000^m	y	$\frac{y^2}{2\,r^2}$	$\frac{y^2}{2\,r^2}$ 1000^m
10^{km}	0,000 0012	0,001^m	70^{km}	0,000 0602	0,060^m
20	0,000 0048	0,005	80	0,000 0786	0,079
30	0,000 0111	0,011	90	0,000 0995	0,099
40	0,000 0196	0,020	100	0,000 1228	0,123
50	0,000 0307	0,031	150	0,000 2763	0,276
60	0,000 0442	0,044	200	0,000 4912	0,491

(8)

oder in runden Zahlen beträgt die Verzerrung

$$\left.\begin{array}{l} 5^{cm} \text{ auf } 1000^m \text{ oder } \frac{1}{20\,000} \text{ für } y = 64 \text{ Kilometer} \\ 10^{cm} \text{ auf } 1000^m \text{ oder } \frac{1}{10\,000} \text{ für } y = 90 \text{ Kilometer} \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Fig. 3.



Wenn ein rechteckiges Kartenblatt $A\,B\,A'\,B'$ (Fig. 3.) in der beschriebenen Weise behandelt wird, so erscheint zwar der Südrand $A\,A'$ und der Nordrand $B\,B'$ in richtiger Grösse, dagegen der Westrand $A\,B$ und der Ostrand $A'\,B'$ werden etwas zu gross.

Wir wollen annehmen, der Westrand $A\,B$ habe die Ordinate $y = 90\,000^m$ und der Ostrand $A'\,B'$ habe $y' = 100\,000^m$, dann wird nach der Zahlen-Übersicht (8), in der Zeichnung der Westrand um 0,0099 % und der Ostrand um 0,0123 %

zu gross, oder wenn $AB = A'B' = 1^m$ Papiergrösse hat, so giebt das hier einen Fehler von nur etwa $0,1^m$, der aber bei $y = 200^{km}$ rasch auf $0,5^m$ ansteigt.

Solche Verzerrungen mögen in der Karten-Zeichnung und auf dem Messtisch unschädlich sein, in der Messung und Berechnung von Polygon-Zügen sind sie es nicht.

Geht ein solcher Zug von 1000^m Länge in der Meridian-Richtung von einem trigonometrischen Punkte zu einem zweiten trigonometrischen Punkt, so wird, wenn gar keine Messungs-Fehler vorkommen, doch der Zug die Entfernung beider Punkte um 10^{cm} kleiner geben als die Coordinaten der Punkte, so lange man nur die ebene Coordinaten-Rechnung anwendet.

In Bayern, wo die Ordinaten in dem *einen* System des Münchner Meridians bis zu rund 200 Kilometer betragen, mussten daher in der Zugsberechnung besondere sphärische Korrektionen angebracht werden, über welche berichtet wird in der „Instruktion für neue Katastermessungen in Bayern", 1885, § 23 und in „Technische Anleitung" u. s. w. von Dr. J. H. Franke, München 1889, S. 121.

Wir wollen aber gleich hier bemerken, dass die Soldnerschen Coordinaten-Verzerrungen hauptsächlich deswegen schädlich wirken, weil sie nach verschiedenen Seiten verschieden sind. Wir werden später die konformen Coordinaten kennen lernen, bei welchen die Verzerrung in einem Punkte nach allen Richtungen gleich ist, und es ist leicht einzusehen, dass bei konformen Coordinaten jene bayrischen besonderen Reduktionen der Züge überflüssig würden, weil sie einfach als allgemeine Massstabs-Veränderung (etwa als konstante logarithmische Reduktion) auf weitem Gebiete konstant den trigonometrischen Netzfehlern zuzuschlagen wären, ganz ebenso wie die von der Höhe des Landes über dem Meere herrührenden Reduktionen, welche nach § 9. S. 67 für $h = 100^m$ den Betrag von 16^{mm} auf 1^{km} geben. Z. B. München mit rund 500^m Höhe hat hieraus eine Massstabsvergrösserung von 8^{cm} auf 1^{km}, welche, weil nach allen Seiten gleich, auch nicht besonders berücksichtigt wird.

In Württemberg und Baden gehen die Ordinaten bis rund 100 Kilometer, in Preussen bis 70 Kilometer.

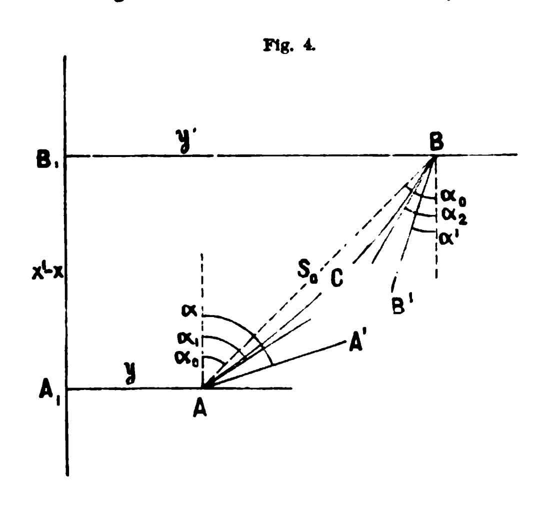
Weitere Ausführungen.

Wenn die Fig. 1. S. 275 nicht bloss eine Abbildung der Punkte A und B von der Kugel auf die Ebene vorstellen soll, sondern auch eine Abbildung der Linie AB, d. h. des auf der Kugel gezogenen Gross-Kreisbogens AB, so ist zuerst einzusehen, dass in Fig. 1. die Gerade $AB = s_0$ *nicht* das Abbild jenes Bogens AB ist, sondern der Bogen ACB.

Allerdings in Hinsicht auf die Länge ist die Gerade $AB = s_0$ und der Bogen ACB in Fig. 1. bei der von uns überhaupt eingehaltenen Genauigkeit von $\frac{1}{r^2}$ nicht zu unterscheiden, denn die Pfeilhöhe des Bogens ACB ist nur von der Ordnung $\frac{s^3}{r^2}$, und daraus kann man schliessen, dass der Krümmungs-Halbmesser der Kurve von der Ordnung $\frac{r^2}{s}$, und endlich dass der Unterschied zwischen dem Bogen ACB und der Sehne AB nur von der Ordnung $\frac{s^5}{r^4}$ ist, was in allen unseren bisherigen Entwicklungen vernachlässigt wurde.

Dagegen in Hinsicht auf die *Richtungen* in A und B ist der Bogen ACB

und die Sehne AB in Fig. 1. durchaus nicht zu verwechseln, und wenn der Bogen ACB in Fig. 1. das Soldnersche Projektions-Abbild des sphärischen Bogens AB auf der Urbildkugel Fig. 1. S. 257 ist, dann sind die Richtungs-Winkel, welche diesem Bogen (bzw. seinen Tangenten in A und B) gegen die x-Axe zukommen, *nicht* die Richtungs-Winkel α und α' des Urbildes, weil die Abbildung nicht konform ist.



Dieses ist in Fig. 4. nochmals besonders dargestellt, und aus einer besonderen Untersuchung, welche in „Zeitschr. für Verm. 1891", S. 289—294 mitgeteilt wurde, stellen wir, ohne auf alles Einzelne einzugehen, folgendes zusammen: A und B sind zwei Soldnersche Projektions-Punkte mit den Coordinaten $x\,y$ und $x'\,y'$. Die Soldnersche Abbildung des sphärischen Bogens AB ist die Curve ACB von Fig. 4., deren Tangenten AA' und BB' gewisse Richtungs-Winkel α_1 und α_2 haben, welche aber weder den bisher betrachteten α und α' noch den α_0 gleich sind; für α_0 hat man:

$$tang\,\alpha_0 = \frac{y'-y}{x'-x}$$

Dazu nach (20_a) § 48. S. 272:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{x'-x}{6\,r^2}(2\,y + y') + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{6\,r^2}(y^2 + y\,y' + y'^2) \qquad (10)$$

Dann nach „Zeitschr. f. Verm. 1891", S. 292:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = \frac{x'-x}{6\,r^2}(2\,y + y')(1 + \sin^2\alpha) \qquad (11)$$

$$\alpha - \alpha_1 = \frac{y^2}{2\,r^2}\sin\alpha\cos\alpha \qquad (12)$$

Bei konformer Projektion verschwindet $\alpha - \alpha_1$.

§ 50. Rechtwinklige konforme Coordinaten.

Wir haben gefunden, dass bei den rechtwinkligen Soldnerschen Coordinaten das Vergrösserungs-Verhältnis in der Ebene nach den verschiedenen Richtungen, welche von einem Punkt ausgehen, selbst verschieden ist, es fand sich nämlich in (5) und (6) § 49, S. 275, indem wir nun statt v das Zeichen m nehmen:

$$m_x = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2} \text{ in der Richtung der } x\text{-Axe}$$

$$m_y = 1 \text{ in der Richtung der } y\text{-Axe}$$

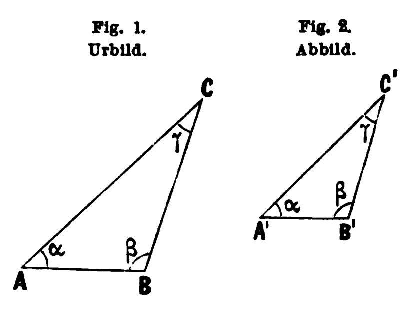
Diese Vergrösserungs-Verhältnisse beziehen sich auf eine Zeichnung, in welcher die rechtwinkligen sphärischen Coordinaten als rechtwinklige *ebene* Coordinaten, im

übrigen aber in natürlicher Grösse aufgetragen werden, so dass die Grosskreisbögen x und y auf der Kugel sich nachher im Abbild in der Ebene als Gerade darstellen.

Wir wollen nun eine andere Art der ebenen Abbildung betrachten, bei welcher das Vergrösserungs-Verhältnis in jedem Punkte nach allen Richtungen dasselbe sein soll.

Man nennt eine solche Abbildung „*konform*" nach dem Vorgange von Gauss, welcher die allgemeine Theorie solcher Abbildungen aufgestellt und die konformen Abbildungen zuerst in die trigonometrischen Berechnungen eingeführt hat.

Unter *konformer* Abbildung im allgemeinen versteht man eine solche geometrische Beziehung zwischen zwei Flächen, dass jedem Punkte der einen Fläche ein bestimmter Punkt der anderen Fläche entspricht, und dass das Abbild dem Urbild in den kleinsten Teilen *ähnlich* ist.

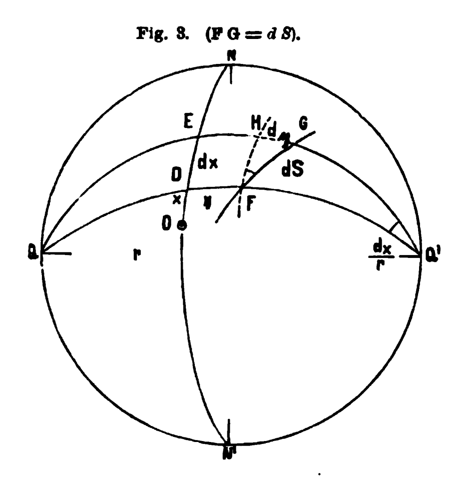


Die letztere Bedingung ist durch nebenstehende Fig. 1. und Fig. 2. deutlicher gemacht in diesem Sinne:

Es seien A, B, C drei unter sich sehr nahe liegende Punkte einer gegebenen Fläche (Urbild) und A' B' C' die entsprechenden Punkte einer anderen Fläche (Abbild); die Abbildung soll nach einem solchen Gesetze erfolgen, dass das kleine Dreieck A' B' C' dem entsprechenden kleinen Dreieck A B C ähnlich wird, dass also die Winkel α, β, γ beider Dreiecke einander gleich sind und dass zwischen den Seiten ein konstantes Verhältnis besteht:

$$\frac{A'\,B'}{A\,B} = \frac{B'\,C'}{B\,C} = \frac{C'\,A'}{C\,A} = m \tag{1}$$

Nach diesen allgemeinen Vorbemerkungen gehen wir über zu den rechtwinkligen konformen Coordinaten, welche Gauss etwa um 1820—1830 in der Hannoverschen Landesvermessung eingeführt hat, aber wir geben zunächst nur die sphärische Theorie mit Gliedern bis zu $1:r^2$ einschliesslich, d. h. das Analogon zu den in §46. behandelten Soldner schen Coordinaten.


Fig. 3. ($FG = dS$).

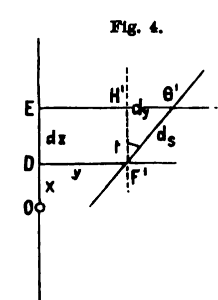
In Fig. 3. wird die Erde kugelförmig dargestellt mit dem Nordpol N, dem Südpol N' und einem Meridian $N\,O\,N'$. Alle Grosskreise, welche rechtwinklig auf diesem Meridian von O stehen, müssen sich in den Polen Q und Q' des Meridians schneiden.

Zwei solche auf dem Haupt-Meridian rechtwinklige Grosskreise sind die beiden Bögen $Q\,D\,Q'$ und $Q\,E\,Q'$, welche zur Bestimmung der rechtwinkligen Coordinaten zweier Punkte F und G dienen, indem $O\,D = x$ die Abscisse von F und $D\,F = \mathfrak{y}$ die Ordinate von F ist, und

ebenso ist OE die Abscisse und EG die Ordinate von G, wobei $DF = EH$, also FH eine geodätische Parallele zu DE.

Die Coordinatenlinien zwischen O und FG sind geradlinig abgebildet in Fig. 4., indem DF' und EG' parallel und beide rechtwinklig auf ODE sind, mit $OD = x$ und $DE = dx$ in beiden Systemen gleich, oder im Sinne der Abbildung kongruent, während $DF' = y$ mit $DF = \mathfrak{y}$ *nicht* gleich ist, auch EG' nicht gleich mit EG, sondern es sollen die Abbildungs-Ordinaten y im Vergleich mit den Urbilds-Ordinaten $\mathfrak{y}$ gewisse Verzerrungen erleiden, deren Gesetz dadurch bestimmt wird, dass das rechtwinklige Differential-Dreieck $F'H'G'$ dem Urdreieck FHG *ähnlich* wird. Indem man die Hypotenusen in diesen Dreiecken mit ds und dS bezeichnet, wird man das Verhältnis dieser Hypotenusen betrachten, welches wir m nennen wollen:

Fig. 4.



$$\frac{ds}{dS} = m \tag{2}$$

Es sei auch gleich bemerkt, dass immer ds grösser als dS und m grösser als 1 ist (s grösser als S nach feststehender Bezeichnung der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme).

Nach dem Prinzip der Gleichung (1) mit Fig. 1. und Fig. 2. sollen nun in Fig. 3. und Fig. 4. die beiden unendlich kleinen Dreiecke FGH und $F'G'H'$ einander ähnlich sein, woraus folgt:

$$\frac{F'H'}{FH} = \frac{H'G'}{HG} = m \tag{3}$$

Hierbei ist $\qquad F'H' = dx \qquad H'G' = dy$

und FH als Parallelkreisbogen im Abstande $\mathfrak{y}$ von DE hat einen Parallelkreishalbmesser $r' = r \cos\frac{\mathfrak{y}}{r}$, und da bei Q' der Winkel $= \frac{dx}{r}$ sich findet, hat man:

$$FH = r'\frac{dx}{r} = dx \cos\frac{\mathfrak{y}}{r} \qquad \text{und } HG = d\mathfrak{y} \tag{4}$$

Aus (3) und (4) hat man:

$$m = \frac{1}{\cos\frac{\mathfrak{y}}{r}} = \frac{dy}{d\mathfrak{y}} \tag{5}$$

$$\frac{dy}{r} = \frac{1}{\cos\frac{\mathfrak{y}}{r}}\,\frac{d\mathfrak{y}}{r} \tag{6}$$

Diese Gleichung kann man integrieren, nämlich:

$$\frac{y}{r} = l\,tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mathfrak{y}}{2r}\right) \tag{7}$$

Wir wollen jedoch zunächst von der strengen Integration keinen Gebrauch machen, sondern nur in erster Näherung rechnen:

$$\cos\frac{\mathfrak{y}}{r} = 1 - \frac{\mathfrak{y}^2}{2r^2}\ , \quad \frac{1}{\cos\frac{\mathfrak{y}}{r}} = 1 + \frac{\mathfrak{y}^2}{2r^2}$$

also nach (5):

$$d\,y = \left(1 + \frac{\mathfrak{y}^2}{2\,r^2}\right) d\,\mathfrak{y} \tag{8}$$

$$y = \mathfrak{y} + \frac{\mathfrak{y}^3}{6\,r^2} \tag{9}$$

Dadurch ist die Beziehung zwischen y und $\mathfrak{y}$ bestimmt und ebenso auch das Vergrösserungsverhältnis m; indessen kann man dabei in den Korrektionsgliedern auch $\mathfrak{y}$ und y vertauschen, also:

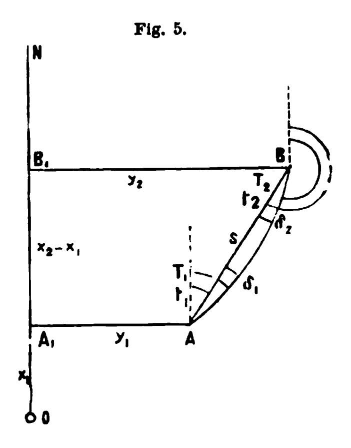
$$m = 1 + \frac{\mathfrak{y}^2}{2\,r^2} \quad \text{oder } m = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2} \tag{10}$$

$$\text{und } \frac{1}{m} = 1 - \frac{\mathfrak{y}^2}{2\,r^2} \quad \text{oder } \frac{1}{m} = 1 - \frac{y^2}{2\,r^2}$$

Dieses gilt in differentialem Sinne in einem Punkte nach *allen* Richtungen, oder in einem unendlich kleinen rechtwinkligen Dreieck, wie z. B. $F'\,G'\,H'$ Fig. 4., gilt derselbe Wert m für beide Katheten und für die Hypotenuse.

Wir gehen nun von einem unendlich kleinen Bogen über zu einem endlichen Bogen $A\,B$ in Fig. 5., dessen Endpunkte A und B die Projektions-Coordinaten $x_1\,y_1$ und $x_2\,y_2$ haben, und wir überzeugen uns zuerst, dass in Fig. 3. und Fig. 4. der Bogen $F\,G$ sich in eine Linie $F'\,G'$ abbildet, welche bei unendlich kleiner Ausdehnung als Gerade gilt, welche aber bei endlicher Entfernung nicht mehr geradlinig wird, sondern krummlinig, wie in Fig. 5. zu sehen ist, in welcher die Kurve $A\,B$ als Abbild eines entsprechenden Bogens der Kugel auftritt, während die Gerade $A\,B$ lediglich Hilfslinie in der Projektion ist.

Fig. 5.



Von dieser Kurve $A\,B$ in Fig. 5. kann man auch alsbald sagen, dass sie gegen den Abscissenmeridian $O\,N$ konkav sein muss, denn das geradlinige Viereck $A_1\,B_1\,B\,A$ hat eine Winkelsumme $= 360°$, während das entsprechende sphärische Viereck wegen des sphärischen Excesses mehr als $360°$ Winkelsumme haben muss. Da aber wegen der Konformität die richtige Winkelsumme in der Abbildung erhalten werden muss, wird die konforme Abbildung der Linie $A\,B$ sich in dem Sinne gekrümmt darstellen müssen, wie Fig. 5. zeigt.

Mit den Bezeichnungen von Fig. 5. hat man für die geradlinige Entfernung s und den Richtungswinkel t_1 in dem ebenen rechtwinkligen Systeme, wie immer:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} t_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ s = \frac{y_2 - y_1}{\sin t_1} &= \frac{x_2 - x_1}{\cos t_1} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

In erster Näherung kann die Sehnenlänge $A\,B$ der Bogenlänge $A\,B$ gleichgesetzt werden, oder es kann mit $d\,s$ sowohl das Differential der Geraden $A\,B$ als auch des Bogens $A\,B$ bezeichnet werden.

Andererseits sei S die *sphärische* in Fig. 5. nicht dargestellte Entfernung der Punkt A und B, dann besteht die Differentialgleichung:

$$d\,S = \frac{1}{m}\,d\,s = \left(1 - \frac{y^2}{2\,r^2}\right) d\,s$$

$$S = s - \int \frac{y^2}{2\,r^2}\,d\,s = s - \int \frac{y^2}{2\,r^2}\,\frac{d\,y}{\sin t}$$

$$S = s - \frac{1}{2\,r^2 \sin t}\,\frac{y^3}{3} + \text{Integr.-Const.}$$

Zwischen den Grenzen y_1 und y_2 giebt dieses:

$$S = s - \frac{1}{6\,r^2 \sin t}\,(y_2^3 - y_1^3)$$

$$S = s - \frac{1}{6\,r^2}\,\frac{y_2^3 - y_1^3}{y_2 - y_1}\,\frac{y_2 - y_1}{\sin t} = s - \frac{1}{6\,r^2}\,\frac{y_2^3 - y_1^3}{y_2 - y_1}\,s$$

$$\frac{S}{s} = 1 - \frac{1}{6\,r^2}\,\frac{y_2^3 - y_1^3}{y_2 - y_1} = 1 - \frac{1}{6\,r^2}\,(y_2^2 + y_2\,y_1 + y_1^2) \tag{12}$$

Dieses ist bereits eine brauchbare Formel, man kann sie aber noch passend umformen durch Einführen der Mittel-Ordinate

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = y_0 \tag{12a}$$

Mit $4\,y_0^2 = y_1^2 + 2\,y_1\,y_2 + y_2^2$ wird (12) auf diese Form gebracht:

$$\frac{S}{s} = 1 - \frac{1}{12\,r^2}\,(y_1^2 + 4\,y_0^2 + y_2^2) \tag{13}$$

Dieselbe Formel in logarithmischer Form lautet:

$$\log s - \log S = \frac{\mu}{12\,r^2}\,(y_1^2 + 4\,y_0^2 + y_2^2) \tag{14}$$

$$\text{oder} \quad = \frac{\mu}{12\,r^2}\,(y_1^2 + (y_1 + y_2)^2 + y_2^2) \tag{15}$$

Auch kann man noch eine andere Form bilden, indem man für den Anfang, für die Mitte und für das Ende der Strecke drei Werte m ausrechnet in dieser Weise:

$$m_1 = 1 + \frac{y_1^2}{2\,r^2} \qquad m_0 = 1 + \frac{(y_1 + y_2)^2}{8\,r^2} \qquad m_2 = 1 + \frac{y_2^2}{2\,r^2}$$

oder

$$\frac{1}{m_1} = 1 - \frac{y_1^2}{2\,r^2} \qquad \frac{1}{m_0} = 1 - \frac{(y_1 + y_2)^2}{8\,r^2} \qquad \frac{1}{m_2} = 1 - \frac{y_2^2}{2\,r^2}$$

und dann

$$\frac{s}{S} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_2}\right) \tag{16}$$

oder auch logarithmisch:

$$\log s - \log S = \frac{\log m_1 + 4 \log m_0 + \log m_2}{6} \tag{17}$$

Wenn die Differenzen $(y_2 - y_1)$ und $(x_2 - x_1)$ verhältnismässig klein sind, gegen die y_1 und y_2 selbst, so dient die Formel:

$$\log s - \log S = \frac{\mu}{8\,r^2}\,(y_1 + y_2)^2 + \frac{\mu}{24\,r^2}\,(y_2 - y_1)^2 \tag{18}$$

Wenn $(y_2 - y_1)$ *sehr* klein ist im Vergleich mit y_1 und y_2, so kann man das zweite Glied hier gegen das erste vernachlässigen.

Übergehend zur Bestimmung der Richtungs-Reduktionen knüpfen wir nochmals an die Betrachtung an, welche im Vorstehenden zu der Erkenntnis geführt hat, dass

die konforme Abbildung des Grosskreisbogens FG von Fig. 3. sich in Fig. 5. als eine flache Kurve darstellen muss, welche in Fig. 5. nach rechts hin konvex sein muss.

Diese Betrachtung giebt auch sofort die Summe der beiden kleinen Winkel δ_1 und δ_2, denn diese Summe $\delta_1 + \delta_2$ muss gleich dem sphärischen Excess des Vierecks sein, d. h. auf $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich genau:

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{(x_2 - x_1)(y_2 + y_1)}{2\,r^2} \tag{19}$$

Wenn die beiden Punkte A und B sehr nahe zusammenrücken, so giebt dieses die Differentialformel:

$$2\,\delta = \frac{d\,x \cdot y}{r^2} \tag{20}$$

Die Formel (19) ist nichts anderes als die Ordinaten-Konvergenz, welche auch bei den Soldnerschen Coordinaten § 46. in (12) und (19) S. 261 u. 262 auf zwei verschiedenen Wegen so gefunden worden ist.

Nun betrachten wir in Fig. 6. ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Ursprung im Punkte A liegt, dessen Abscissenrichtung $+\xi$ von A nach B und dessen Ordinatenrichtung $+\eta$ rechtwinklig zu $A\,B$ liegen soll. Wenn in diesem Systeme die flache Kurve $A\,B$ durch eine Gleichung zwischen ξ und η dargestellt ist, so kann der Krümmungs-Halbmesser R dieser flachen Kurve hinreichend genähert dargestellt werden durch die Gleichung:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2\,\eta}{d\,\xi^2} \tag{21}$$

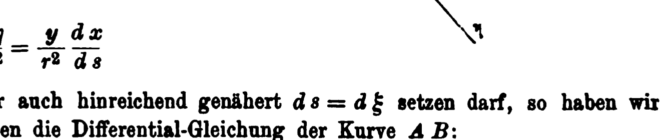
Wenn man ausserdem mit $2\,\delta$ wie bei (20) die Bogenkrümmung auf die Erstreckung des Bogenelementes $d\,s$ bezeichnet, so hat man:

$$d\,s = R\,.\,2\,\delta \tag{22}$$

also aus (20)—(22) die Differentialgleichung für η:

$$\frac{d^2\,\eta}{d\,\xi^2} = \frac{y}{r^2}\,\frac{d\,x}{d\,s}$$

Fig. 6.
$(A\,B = s)$



Da man aber auch hinreichend genähert $d\,s = d\,\xi$ setzen darf, so haben wir aus dem Vorstehenden die Differential-Gleichung der Kurve $A\,B$:

$$\frac{d^2\,\eta}{d\,\xi^2} = \frac{y}{r^2}\,\frac{d\,x}{d\,\xi}$$

Dieses ist zunächst ohne Vorzeichen entwickelt, wenn jedoch die Kurve mit ihrer konkaven Seite gegen die ξ-Axe liegt, wie in Fig. 6., so muss die zweite Ableitung negativ sein, also:

$$-\frac{d^2\,\eta}{d\,\xi^2} = \frac{y}{r^2}\,\frac{d\,x}{d\,\xi} \tag{23}$$

Nach dem Anblick von Fig. 6. hat man in erster Näherung:

$$x = x_1 + \xi \cos t_1 \quad \text{und} \quad y = y_1 + \xi \sin t_1$$

$$\frac{dx}{d\xi} = \cos t_1$$

also aus (22):

$$-\frac{d^2 \eta}{d \xi^2} = \frac{y_1}{r^2} \cos t_1 + \frac{\xi}{r^2} \sin t_1 \cos t_1 \tag{24}$$

oder

$$-\frac{d^2 \eta}{d \xi^2} = A + B \xi \tag{25}$$

wobei die Bedeutung von A und B aus der Vergleichung von (24) und (25) folgt:

$$A = \frac{y_1}{r^2} \cos t_1 \qquad B = \frac{\sin t_1 \cos t_1}{r^2} \tag{26}$$

Die Gleichung (25) wird zweimal integriert:

$$-\frac{d \eta}{d \xi} = C_1 + A \xi + \frac{B \xi^2}{2} \tag{27}$$

$$-\eta = C_1 \xi + \frac{A \xi^2}{2} + \frac{B \xi^3}{6} \tag{28}$$

Dabei ist C_1 die Integrations-Konstante für die erste Integration, und für die zweite Integration kommt keine Konstante mehr hinzu, weil, wie man sofort überblickt, für $\xi = 0$ auch $\eta = 0$ werden muss. Um die Konstante C_1 zu bestimmen, hat man nach dem Anblick von Fig. 6., dass $\xi = 0$ den Wert $\frac{d\eta}{d\xi} = +\delta_1$ und $\xi = s$ den Wert $\frac{d\eta}{d\xi} = -\delta_2$ geben muss, ebenso muss auch $\xi = s$ den Wert $\eta = 0$ geben, also:

$$-\delta_1 = C_1$$

$$+\delta_2 = C_1 + A s + \frac{B s^2}{2}$$

$$0 = C_1 s + \frac{A s^2}{2} + \frac{B s^3}{6}, \text{ oder } 0 = C_1 + \frac{A s}{2} + \frac{B s^2}{6}$$

Diese drei Gleichungen geben:

$$\delta_1 = \frac{A s}{2} + \frac{B s^2}{6} \quad \text{und} \quad \delta_2 = \frac{A s}{2} + \frac{B s^2}{3} \tag{29}$$

Oder wenn man die Bedeutungen von A und B nach (26) einsetzt:

$$\delta_1 = \frac{s \cos t_1}{6 r^2} (3 y_1 + s \sin t_1) \quad \text{und} \quad \delta_2 = \frac{s \cos t_1}{6 r^2} (3 y_1 + 2 s \sin t_1) \tag{30}$$

Endlich, da $s \sin t_1 = y_2 - y_1$ und $s \cos t_1 = x_2 - x_1$ ist, kann man dieses auch so schreiben, zugleich mit Zusetzung von ϱ:

$$T_1 - t_1 = \delta_1 = \frac{\varrho}{6 r^2} (x_2 - x_1)(2 y_1 + y_2) \tag{31}$$

$$T_2 - t_2 = \delta_2 = \frac{\varrho}{6 r^2} (x_1 - x_2)(y_1 + 2 y_2) \tag{32}$$

Diese Formeln werden von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme meist in dieser Form geschrieben:

$$T_1 - t_1 = \frac{\varrho}{4\,r^2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2) - \frac{\varrho}{12\,r^2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \tag{33}$$

$$T_2 - t_2 = \frac{\varrho}{4\,r^2}(x_1 - x_2)(y_2 + y_1) - \frac{\varrho}{12\,r^2}(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \tag{34}$$

Diese Formeln, welche mit den vorhergehenden algebraisch identisch sind, sollen dazu dienen, die relative Kleinheit der zweiten Teile auszudrücken für den Fall, dass die Coordinaten-*Differenzen* $(x_2 - x_1)$ und $(y_2 - y_1)$ verhältnismässig klein sind gegen die Ordinaten y_1 und y_2 selbst, was bei Triangulierung III. Ordnung entfernt von der Axe eintritt; und dann kann man häufig die zweiten Glieder in (33) und (34) gegen die ersten Glieder sogar vernachlässigen.

Gleichung der Kurve A B.

Nachdem die Coëfficienten A, B nebst der Integrations-Konstanten C_1 bestimmt sind, kann auch die Kurvengleichung nach (23) angeschrieben werden:

$$\eta = +\delta_1\,\xi - \frac{A\,\xi^2}{2} - \frac{B\,\xi^3}{6} = \frac{A\,s}{2}\,\xi + \frac{B\,s^2}{6}\,\xi - \frac{A\,\xi^2}{2} - \frac{B\,\xi^3}{6}$$

$$\eta = \frac{A\,\xi}{2}(s - \xi) + \frac{B\,\xi^2}{6}(s^2 - \xi^2) = \frac{y_1\,\xi}{2\,r^2}\cos t_1\,(s - \xi) + \frac{\xi\,\sin t_1\,\cos t_1}{6\,r^2}(s^2 - \xi^2)$$

oder nach Potenzen von ξ geordnet mit $s\sin t_1 = y_2 - y_1$:

$$\eta = \xi\,\frac{s\,\cos t_1}{6\,r^2}(2\,y_1 + y_2) - \frac{\xi^2}{2\,r^2}\,y_1\cos t_1 - \frac{\xi^3}{6\,r^2}\sin t_1\cos t_1 \tag{35}$$

Hiernach erscheint die Kurve $A\,B$ von Fig. 6. dargestellt durch eine Gleichung dritten Grades, aus welcher man auch nochmals rasch zur Probe die δ_1 und δ_2 durch Differentiieren bestimmen kann.

Ausrechnung der konstanten Coëfficienten.

Die vorstehenden Formeln finden zur Zeit am meisten Anwendung bei dem grossen über ganz Preussen sich erstreckenden konformen System der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landesaufnahme, dessen x-Axe im 31ten Längengrad (3′ 41,25″ westlich von der Berliner Sternwarte) und dessen Nullpunkt auf der Breite 52° 42′ 2,53251″ in diesem Meridian liegt. Der mittlere Erdkrümmungs-Halbmesser für diese Breite, gewöhnlich mit A bezeichnet, ist:

$$\log A = 6.805\,0274{\cdot}003$$

und damit sind folgende Konstanten berechnet, indem bei den Coëfficienten mit μ der Wert $\log\mu = 6{\cdot}6377843$ von S. 193 für Einheiten der 7ten Logarithmenstelle angenommen ist.

$\log\frac{1}{2A^2} = 6.0889152$	$\log\frac{1}{4A^2} = 5.7878852$	$\log\frac{1}{6A^2} = 5.6117939$	$\log\frac{1}{12A^2} = 5.3107640$
$\log\frac{\mu}{2A^2} = 2{\cdot}7266995$	$\log\frac{\mu}{8A^2} = 2{\cdot}1246395$	$\log\frac{\mu}{6A^2} = 2{\cdot}2495773$	$\log\frac{\mu}{24A^2} = 1{\cdot}6475183$
$\log\frac{\varrho}{2A^2} = 1.4033403$	$\log\frac{\varrho}{4A^2} = 1.1023103$	$\log\frac{\varrho}{6A^2} = 0.9262191$	$\log\frac{\varrho}{12A^2} = 0.6251891$



Für die Mittelbreite von Deutschland kann man annehmen $\varphi = 50°$ und den mittleren Krümmungs-Halbmesser

$$log\, r = 6.804\,8936 \cdot 173$$

und dafür gelten die folgenden Coëfficienten:

$log \frac{1}{2r^2} = 6.089\,1828$	$log \frac{1}{4r^2} = 5.788\,1528$	$log \frac{1}{6r^2} = 5.612\,0615$	$log \frac{1}{12r^2} = 5.311\,0315$
$log \frac{\mu}{2r^2} = 2{\cdot}726\,9671$	$log \frac{\mu}{8r^2} = 2{\cdot}124\,9071$	$log \frac{\mu}{6r^2} = 2{\cdot}249\,8458$	$log \frac{\mu}{24r^2} = 1{\cdot}647\,7858$
$log \frac{\varrho}{2r^2} = 1.403\,6079$	$log \frac{\varrho}{4r^2} = 1.102\,5779$	$log \frac{\varrho}{6r^2} = 0.926\,4866$	$log \frac{\varrho}{12r^2} = 0.625\,4567$

Gewöhnlich braucht man diese Coëfficienten nur 4—5stellig, für alle Fälle haben wir sie hier 7stellig hergesetzt.

In den Hilfstafeln des Anhanges Seite [45] und [46] haben wir einige Funktionen zur konformen Projektion ausgerechnet, nämlich $log\, m = \frac{\mu}{2A^2}y^2$ auf Seite [46], zunächst bis $y = 100\,000^m$ mit kleinem Intervall von 1000^m und unten am Schlusse zur allgemeinen Übersicht nur 5stellig bis $y = 690^{km}$.

Dazwischen von $y = 230^{km}$ bis 255^{km} ist eine besondere Gebrauchstafel für die Gegend von Hannover, welche aber auch auf dem ganzen 35^{km} breiten Streifen Göttingen—Hannover—Hamburg—Kiel und östlich Neisse—Breslau—Posen—Stolp, gebraucht werden kann. Die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme hat eine solche Tafel für ganz Preussen; es kann sich jedermann für einen gerade in Arbeit genommenen Bereich eine solche Tafel selbst rasch berechnen nach der Gleichung:

$$log\, m = \frac{\mu}{2A^2}y^2 = [2{\cdot}726\,700]\, y^2$$

Allerdings bei grossen y kommt noch ein Glied vierter Ordnung hinzu, so dass man hat:

$$log\, m = \frac{\mu}{2A^2}y^2 - \frac{\mu}{12A^4}y^4 = [2{\cdot}726\,6995]\, y^2 - [8{\cdot}33849]\, y^4$$

Dieses werden wir erst später behandeln können.

Die andere Tafel Seite [45] giebt oben die Coordinaten-Vergrösserung

$$Y - y = \frac{y^3}{6A^2} = [5.611\,794]\, y^3$$

wobei Y dasselbe bedeutet wie $\mathfrak{y}$ in den vorstehenden Entwicklungen zu Fig. 3. S. 279, wo $\mathfrak{y}$ die sphärische Ordinate ist. Dann der untere Teil von Seite [45] giebt die differentiale Ordinaten-Verzerrung $\frac{y^2}{2r^2}$ oder konforme allgemeine Linear-Verzerrung zusammen mit der Höhenreduktion $\frac{h}{r}$, worauf im späteren § 52. weitere Schlüsse gegründet werden sollen.



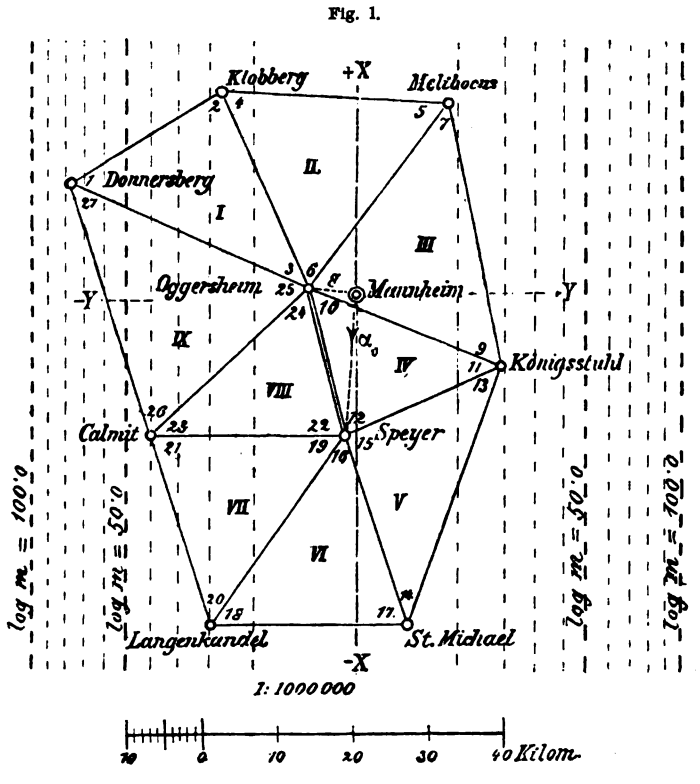
§ 51. Beispiel der konformen Coordinaten-Berechnung.

In nachstehender Fig. 1. wird unser Pfälzer Netz von § 47. nochmals vorgeführt, im wesentlichen wie früher, nur mit einer Schar von Parallel-Linien mit konstantem y, also parallel zur x-Axe, deren Bedeutung im Nachfolgenden erklärt werden wird, während zunächst nur das Netz an sich gebraucht wird.

Wir haben dieses Pfälzische Triangulierungs-Netz, welches in § 47 in Soldnerschen Coordinaten behandelt worden ist, nun in konforme Coordinaten umgerechnet und zwar für die Mittelbreite $\varphi = 49° 30'$ mit den Konstanten:

$$log\, r = 6.804\,8686 \quad , \quad log \frac{1}{6\,r^2} = 5.61211 \quad , \quad log \frac{\mu}{2\,r^2} = 2{\cdot}72702 \qquad (1)$$

Fig. 1.



Wenn man (abweichend von der Bezeichnung $\mathfrak{y}$ in § 50.) die Soldnerschen Ordinaten mit y und die konformen Ordinaten mit Y bezeichnet, so hat man nach (9) § 50. S. 281:

$$Y = y + \frac{y^3}{6\,r^2} = y + [5.612\,11]\,y^3 \qquad (2)$$

und zur Übersicht der Differenzen $Y - y$ kann man den oberen Teil der Tabelle Seite [45] des Anhangs benützen, obgleich derselbe für die Breite 52° 42′ gilt, während unser Pfälzisches Netz die Mittelbreite 49° 30′ hat, denn für kleine Ordinaten y macht das fast keinen Unterschied.



Nach vorstehender Formel (2) sind die $Y - y$ in folgender Tabelle berechnet:

Punkt	y Soldner	$\frac{y^3}{6r^2} = Y - y$	Y konform	x	$\log m = \mu \frac{y^2}{2r^2}$
1. Mannheim . . .	0,000^m	^m	0,000^m	0,000^m	0·0
2. Speyer	− 1208,142	0,000	− 1208,142	− 18 816,676	0·1
3. Oggersheim . .	− 6001,777	0,001	− 6001,778	+ 388,767	1·9
4. Calmit	− 27 414,066	0,084	− 27 414,150	− 18 550,134	40·1
5. Donnersberg . .	− 38 145,688	0,227	− 38 145,915	+ 15 278,872	77·6
6. Klobberg	− 18 104,628	0,024	− 18 104,652	+ 28 049,296	17·5
7. Melibocus . . .	+ 12 727,470	0,008	+ 12 727,478	+ 26 509,100	8·6
8. Königsstuhl . .	+ 19 525,476	0,030	+ 19 525,506	− 9223,075	20·3
9. St. Michael . .	+ 7407,498	0,002	+ 7407,500	− 44 332,386	2·9
10. Langenkandel .	− 19 467,721	0,030	− 19 467,751	− 44 893,918	20·2

$$\log \frac{1}{6r^2} = 5.61211 \qquad \log \frac{\mu}{2r^2} = 2{\cdot}72702$$

Aus diesen Coordinaten y, x können wir auch alle Entfernungen und Richtungswinkel berechnen nach den Formeln (11), (13) und (31) des vorigen § 50. S. 281, 282 und 284, wie wir an einem Beispiele Donnersberg-Calmit zeigen wollen:

konform

Calmit	$y_2 = -27\,414{,}150^m$	$x_2 = -18\,550{,}134^m$
Donnersberg	$y_1 = -38\,145{,}915$	$x_1 = +15\,278{,}872$
	$y_2 - y_1 = +11\,731{,}765$	$x_2 - x_1 = -33\,829{,}006$

$\log(y_2 - y_1)$	4.030 6711·5
$\log(x_2 - x_1)$	4.529 2892·4$_n$
$\log tang\, t_1$	9.501 3819·1$_n$

$t_1 = 162° \, 23' \, 56{,}83''$

$\log \sin t_1$	9.480 5595·8	$\log \cos t_1$	9.979 1776·6$_n$
$\log(y_2 - y_1)$	4.030 6711·5	$\log(x_2 - x_1)$	4.529 2892·4$_n$
$\log s$	4.550 1115·7	$\log s$	4.550 1115·8

Dieses ist rein ebene Rechnung und nun kommen die Korrektionen mit $1 : r^2$.

$$y_2 = -27\,414 \quad y_2 = -27\,414 \quad y_1 = -38\,146 \quad y_1 = -38\,146$$

$$y_1 + y_2 = -65\,560 \qquad 2y_1 + y_2 = -103\,706 \qquad 2y_2 + y_1 = -92\,974$$

$\log(y_1 + y_2)$	4.81 664	$\log(2y_1 + y_2)$	5.01 582$_n$	$\log(2y_2 + y_1)$	4.96 836$_n$
$\log(y_1 + y_2)^2$	9.63 328	$\log(x_2 - x_1)$	4.52 929$_n$	$\log(x_1 - x_2)$	4.52 929
$\log(\mu : 2r^2)$	2.72 701	$\log(\varrho : 6r^2)$	0.92 654	$\log(\varrho : 6r^2)$	0.92 654
$\log \frac{(y_1 + y_2)^2}{2r^2}$	2.36 029	$\log(T_1 - t_1)$	0.47 165	$\log(T_2 - t_2)$	0.42 419

$$\frac{(y_1 + y_2)^2}{2r^2} = 229{\cdot}24 \qquad T_1 - t_1 = +2{,}962'' \qquad T_2 - t_2 = -2{,}656''$$

Abriss der Triangulierung des Netzes Fig. 1. S. 287 mit konformen Coordinaten.

Stationen und Zielpunkte	Richtungswinkel sphärisch T	$t - T$	Richtungswinkel eben t	Entfernung sphärisch $\log s$	$\log s - \log S$	Entfernung eben $\log s$
1. Mannheim.						
Speyer	183° 40′ 25,29″	− 0,02″	183° 40′ 25,27″	4.275 4362·3	+ 0·0	4.275 4362·3
Oggersheim	273 42 22,23	+ 0,00	273 42 22,23	3.779 1890·8	+ 0·6	3.779 1891·4
2. Speyer.						
Mannheim	3° 40′ 25,23″	+ 0,04″	3° 40′ 25,27″	4.275 4362·3	+ 0·0	4.275 4362·3
Königsstuhl	65 10 11,05	− 0,14	65 10 10,91	4.358 8019·1	+ 6·2	4.358 8025·3
St. Michael	161 20 31,87	+ 0,11	161 20 31,98	4.430 2529 9	+ 0·8	4.430 2530·7
Langenkandel . . .	215 0 1,16	− 0,48	215 0 0,68	4.502 8974·0	+ 7·4	4.502 8981·4
Calmit	270 34 57,83	+ 0,02	270 34 57,85	4.418 4219·3	+ 14·0	4.418 4233·3
Oggersheim	345 59 7,47	+ 0,14	345 59 7,61	4.296 5476·5	+ 0·8	4.296 5477·3
3. Oggersheim.						
Melibocus	35° 38′ 31,00″	− 0,02″	35° 38′ 30,98″	4.507 0618·9	+ 2·2	4.507 0621·1
Mannheim	93 42 22,23	− 0,00	93 42 22,23	4.779 7890·8	+ 0·6	4.779 7891·4
Königsstuhl	110 37 58,62	+ 0,06	110 37 58,68	4.435 7946·2	+ 5·3	4.435 7951·5
Speyer	165 59 7,82	− 0,21	93 59 7,61	4.296 5476·5	+ 0·8	4.296 5477·3
Calmit	228 30 28,54	− 0,63	228 30 27,91	4.456 1549·5	+ 16·9	4.456 1566·4
Donnersberg	294 51 17,20	+ 0,68	294 51 17,88	4.549 3120·2	+ 30·6	4.549 3150·8
Klobberg	336 22 4,82	+ 0,70	336 22 5,52	4.479 8976·1	+ 8·4	4.479 8984·5
4. Calmit.						
Oggersheim	48° 30′ 26,94″	+ 0,97″	48° 30′ 27,91″	4.456 1549·5	+ 16·9	4.456 1566·4
Speyer	90 34 57,90	− 0,05	90 34 57,85	4.418 4219·3	+ 14·0	4.418 4233·3
Langenkandel . . .	163 12 53,74	− 1,65	73 12 52,09	4.439 5851·8	+ 29·8	4.439 5881·6
Donnersberg	342 23 54,17	+ 2,66	342 23 56,83	4.550 1057·9	+ 57·8	4.550 1115·7
5. Donnersberg.						
Klobberg	57° 29′ 38,99″	+ 1,02″	57° 29′ 40,01″	4.375 9183·2	+ 44·0	4.375 9227·2
Oggersheim	114 51 18,87	− 1,04	114 51 17,83	4.549 3120·2	+ 30·6	4.549 3150·8
Calmit	162 23 59,79	− 2,96	162 23 56,83	4.550 1057·9	+ 57·8	4.550 1115·7
6. Klobberg.						
Melibocus	92° 51′ 35,28″	− 0,03″	92° 51′ 35,25″	4.489 5442·7	+ 4·6	4.489 5447·3
Oggersheim	156 22 6,51	− 0,99	156 22 5,52	4.479 8976·1	+ 8·4	4.479 8984·5
Donnersberg	237 29 40,81	− 0,80	237 29 40,01	4.375 9183·2	+ 44·0	4.375 9227·2
7. Melibocus.						
Königsstuhl	169° 13′ 40,29″	+ 1,36″	169° 13′ 41,65″	4.560 7787·6	+ 14·1	4.560 7801·7
Oggersheim	215 38 30,55	+ 0,43	215 38 30,98	4.507 0618·9	+ 2·2	4.507 0621·1
Klobberg	272 51 35,26	− 0,01	272 51 35,25	4.489 5442·7	+ 4·6	4.489 5447·3
8. Königsstuhl.						
St. Michael	199° 2′ 30,37″	+ 1,38″	199° 2′ 31,75″	4.569 8613·6	+ 10·3	4.569 8623·9
Speyer	245 10 10,60	+ 0,31	245 10 10,91	4.358 8019·1	+ 6·2	4.358 8025·3
Oggersheim	290 37 58,95	− 0,27	290 37 58,68	4.435 7946·2	+ 5·3	4.435 7951·5
Melibocus	349 13 43,21	− 1,56	349 13 41,65	4.560 7787·6	+ 14·1	4.560 7801·7
9. St. Michael.						
Königsstuhl	19° 2′ 32,77″	− 1,02″	19° 2′ 31,75″	4.569 8613·6	+ 10·3	4.569 8623·9
Langenkandel . . .	268 48 10,93	− 0,00	268 48 10,93	4.429 4468·0	+ 5·1	4.429 4478·1
Speyer	341 20 32,27	− 0,29	341 20 31,98	4.430 2529·9	+ 0·8	4 430 2530·7
10. Langenkandel.						
Speyer	84° 59′ 59,80″	+ 0,88″	85° 0′ 0,68″	4.502 8974·0	+ 7·4	4.502 8981·4
St. Michael	88 48 10,92	+ 0,01	88 48 10,93	4.429 4468·0	+ 5·1	4.429 4478·1
Calmit	343 12 50,61	+ 1,48	343 12 52,09	4.439 5851·8	+ 29·8	4 439 5881·6

Zu 22924, welches $= 4 \log m_0$ ist, nehmen wir die schon in der Tabelle S. 288 stehenden $\log m_2 = 40{\cdot}1$ und $\log m_1 = 77{\cdot}6$ für Calmit und Donnersberg und daraus für unsere Strecke:

$$\log s - \log S = \frac{77{\cdot}6 + 229{\cdot}24 + 40{\cdot}1}{6} = 57{\cdot}8 \tag{3}$$

In Zusammenfassung haben wir also:

$$\begin{array}{lll} \log s = 4.550\,1115{\cdot}7 & t_1 = 162°\,23'\,56{,}83'' & t_2 = 342°\,23'\,56{,}83'' \\ \quad\quad\quad - 57{\cdot}8 & \quad\quad + 2{,}96 & \quad\quad - 2{,}66 \\ \hline \log S = 4.550\,1057{\cdot}9 & T_1 = 162°\,28'\,59{,}79'' & T_2 = 342°\,28'\,54{,}17'' \\ & \text{Donnersberg} & \text{Calmit} \end{array} \tag{4}$$

So sind diese Werte in dem Abrisse von S. 289 eingesetzt, und der ganze Abriss ist so entstanden, da wir die Coordinaten als gegeben angenommen haben.

Wenn umgekehrt die ganze Triangulierung mit einer Basis und einem Ausgangsazimut bezw. Ausgangsrichtungswinkel berechnet wird, so hat man im wesentlichen dasselbe zu thun. Man rechnet am bequemsten vorläufige Coordinaten nur etwa auf 1^m genau, die man ja zu anderen Zwecken meist ohnehin braucht, die Dreiecksseiten S hat man aus der Netzausgleichung und Netzberechnung; rechnet man dazu alle $\log s - \log S$ und zunächst nur das erste $t - T$, so kann man die ganze Coordinaten-Rechnung in der Ebene durchführen und braucht nur noch die sämtlichen $t - T$ zuzufügen, um den ganzen Abriss von S. 289 aufzustellen. In dieser Weise haben wir schon früher das Hannoversche Stadt-Netz im konformen System der Landesaufnahme behandelt in unserem I. Band, 4. Aufl. 1895, Abriss S. 204.

Die Vergleichung dieses Verfahrens mit der Soldnerschen Methode (Abriss § 48. S. 265) fällt zum Nachteil der Soldnerschen Methode und zum Vorteil der konformen Methode aus.

Tabellarische und graphische Behandlung der Reduktionen.

Da das Vergrösserungsverhältnis m nur von der Ordinate y abhängt, kann man es leicht tabulieren, z. B. für das Pfälzische Netz mit $\varphi = 49°\,30'$ und $\log r = 6.804\,87$ hat man die Hauptwerte

$$\left.\begin{array}{rccccc} y = & 10\,000^m & 20\,000^m & 30\,000^m & 40\,000^m & 50\,000^m \\ \log m = \dfrac{\mu\, y^2}{2\, r^2} = & 5{\cdot}3 & 21{\cdot}3 & 48{\cdot}0 & 85{\cdot}3 & 133{\cdot}4 \end{array}\right\} \tag{5}$$

Eine ausführliche Gebrauchstabelle wäre leicht herzustellen. Wir wollen darauf hier nicht eingehen, aber noch die graphische Behandlung der Sache bemerken. Man kann das Netzbild mit einer Schar von Parallelen zur x-Axe, also Parallelen für konstante y überziehen, welche gewissen runden Werten von m oder von $\log m$ entsprechen und damit kann man für jeden Punkt sein $\log m$ abstechen.

In unserem Falle ist

$$\log m = \frac{\mu}{2\, r^2}\, y^2 \qquad \text{mit } \log \frac{\mu}{2\, r^2} = 2.72\,702 - 10$$

$$y = \sqrt{\frac{2\, r^2}{\mu}}\, \sqrt{\log m} = [3.63\,649]\, \sqrt{\log m} \tag{6}$$

Danach ist folgendes berechnet:

$log\, m =$	10·0	20·0	30·0	40·0	50·0	60·0	70·0	80·0	90·0	100·0
$y =$	13,7^{km}	19,4	23,7	27,4	30,6	33,5	36,2	38,7	41,1	43,3^{km}

Hiernach sind die Parallelen in Fig. 1. gezeichnet; man kann daraus z. B. abnehmen (S. 287):

Donnersberg	Mitte	Calmit
78	57	40

$$log\, s - log\, S = \frac{78 + 4 \cdot 57 + 40}{6} = \frac{78 + 228 + 40}{6} = \frac{346}{6}$$

$$log\, s - log\, S = 57 \cdot 7$$

Dieses soll dasselbe sein wie das frühere 57·8 in (3).

In dem kleinen Netzbilde von Fig. 1. ist die graphische Interpolation für $log\, m$ wohl nicht völlig genügend, aber jedenfalls zur Kontrolle der Rechnung nützlich; hat man Netze II. und III. Ordnung entfernt von der Hauptaxe, wo die $log\, m$ grösser und die Parallelen mehr gleichabständig werden, so wird das Verfahren sehr gut. Wir betrachten noch die Reduktionen der Richtungen:

$$T_1 - t_1 = \frac{\varrho}{6\,r^2}(x_2 - x_1)\,(2\,y_1 + y_2) = \frac{\varrho}{2\,r^2}(x_2 - x_1)\,y' \text{ mit } y' = \frac{2\,y_1 + y_2}{3}$$

$$T_2 - t_2 = \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad = \frac{\varrho}{2\,r^2}(x_1 - x_2)\,y'' \text{ mit } y'' = \frac{y_1 + 2\,y_2}{3}$$

Hier kann man auch die y', y'' geradezu mit dem Zirkel abnehmen, sowie die $x_2 - x_1$, wenn man dieselben nicht ohnehin schon in der Rechnung stehen hat, und da $\frac{\varrho}{2\,r^2} = \frac{1}{395}$ für Kilometer, so kann man glatt mit dem Rechenschieber rechnen:

$$T_1 - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{395}\,y' \text{ und } T_2 - t_2 = \frac{x_1 - x_2}{395}\,y''$$

z. B. S. 287 Donnersberg — Calmit

$x_2 - x_1 = -33{,}8^{km}$ $y' = -34{,}6^{km}$ — $x_1 - x_2 = +33{,}8^{km}$ $y'' = -31{,}0^{km}$

$T_1 - t_1 = +2{,}96''$ — $T_2 - t_2 = -2{,}66''$

§ 52. Vergleichung der kongruenten und der konformen Coordinaten.

Das im vorigen § 51. behandelte System der rechtwinkligen konformen Coordinaten x, y hat die Eigenschaft, dass es von einem Teil der Kugeloberfläche eine ebene Darstellung bietet, welche dem Urbilde in den kleinsten Teilen ähnlich ist.

Diese Eigenschaft, welcher Gauss die Benennung „konforme“ Abbildung gegeben hat, wollen wir durch Vergleichung der Verzerrungsformeln für das Soldnersche und für das Gausssche System näher untersuchen. Wir nennen dabei die Soldnerschen Coordinaten *kongruente* Coordinaten, weil die Ordinaten y ebenso wie die Abscissen x in geodätischem Sinne kongruent abgebildet werden, d. h. ein Landmesser, welcher längs einer abgesteckten Ordinate y mässe, ohne zu wissen, dass er sich auf einer *krummen* Fläche befindet, und dann seine Messung in einer Zeichnungsebene auftrüge, würde für y eine Gerade erhalten, welche dem Bogen y auf der Kugel an linearer Ausdehnung gleich ist.



Zuerst betrachten wir die beiden Formeln für die lineare Projektionsverzerrung, nämlich (10) § 48. S. 271 und (12) § 50. S. 282, und indem wir beidemal die Bezeichnungen der Landesaufnahme anwenden, nämlich S für die wahre (sphärische) Entfernung und s für die Projektions-Entfernung, haben wir zur Vergleichung:

$$\text{Soldner, kongruent} \quad \frac{s}{S} = 1 + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6 r^2} \cos^2 t \tag{1}$$

$$\text{Gauss, konform} \quad \frac{s}{S} = 1 + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6 r^2} \tag{2}$$

Lässt man die y alle einander gleich werden, so bekommt man daraus wieder das Vergrösserungsverhältnis in differentialem Sinne:

$$\text{kongruent} \quad m_1 = 1 + \frac{y^2}{2 r^2} \cos^2 t \tag{3}$$

$$\text{konform} \quad m_2 = 1 + \frac{y^2}{2 r^2} \tag{4}$$

Von diesen beiden Werten ist m_2 in einem Punkte nach allen Richtungen hin konstant, dagegen m_1 veränderlich zwischen den äussersten Werten $1 + \frac{y^2}{2 r^2}$ und 1, deren Zwischenwert $= 1 + \frac{y^2}{4 r^2}$ ist; und dieser Zwischenwert ist auch gleich dem durch Integration zu findenden Mittelwert, weil $\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t \, d t = \pi$.

Man kann auch leicht die Flächen vergleichen: Ein Streifen $\Delta x \, d y$ im Urbild wird abgebildet werden:

$$\text{kongruent} \quad d F_1 = \Delta x \left(1 + \frac{y^2}{2 r^2}\right) d y$$

$$\text{konform} \quad d F_2 = \Delta x \left(1 + \frac{y^2}{2 r^2}\right) d y \left(1 + \frac{y^2}{2 r^2}\right) = \Delta x \left(1 + \frac{y^2}{r^2}\right) d y$$

Als Integral zwischen den Grenzen 0 und y giebt dieses, wenn $y \Delta x = F$ gesetzt wird:

$$\text{kongruent} \quad F_1 = F \left(1 + \frac{y^2}{6 r^2}\right)$$

$$\text{konform} \quad F_2 = F \left(1 + \frac{y^2}{3 r^2}\right)$$

und das Verhältnis beider:

$$\frac{F_2}{F_1} = 1 + \frac{y^2}{2 r^2} \tag{5}$$

Einige Zahlenwerte von $\frac{y^2}{2 r^2}$ haben wir bereits in (8) § 49. S. 276 ausgerechnet, man sieht daraus, dass z. B. für $y = 30\,000^m$ die lineare Verzerrung $\frac{y^2}{2 r^2} = 0{,}0000\,11$ oder 11 Milliontel oder 11^{mm} auf 1^{km} ist, und dass auch die konforme Flächenverzerrung um 11 Milliontel grösser ist als die kongruente Flächenverzerrung.

Man kann in diesen Betrachtungen auch noch weiter gehen, und so habe ich in der „Zeitschr. f. Verm. 1875“, S. 27—34 eine theoretische Betrachtung angestellt

über die *Quadrat*summen der linearen Projektions-Verzerrungen in beiden Fällen, und gefunden, dass die konforme Projektion eine solche Quadratsumme Ω giebt, welche bei konstantem Grenzwert Y sich zu der entsprechenden Quadratsumme ω der kongruenten Projektion verhält $\Omega : \omega = 8 : 3$, und dass für $\Omega = \omega$ die Grenzordinate Y des konformen Systems sich zu der entsprechenden Grenzordinate y des kongruenten Systems verhält $Y : y = 0{,}82 : 1$; und hiernach dürfte die konforme Projektion nur auf 82 % der Fläche ausgedehnt werden, welche der kongruenten (Soldnerschen) Projektion zugänglich ist.

Alle Messungsfehler sind hiebei gleich Null gesetzt.

Diese Verzerrungs-Vergleichungen Ω und ω, welche von der „Zeitschr. f. Verm. 1875", S. 27—34 auch noch in unserem „Handbuch d. Verm., 2. Aufl. 1878", S. 276 bis 278 abgedruckt waren, haben wir vor kurzem in der „Zeitschr. f. Verm. 1896", S. 249 einer neuen Bearbeitung unterzogen, auf welche wir zurückkommen werden.

Solche Integrationen für die linearen Verzerrungselemente in verschiedenen Formen, z. B. auch nach den neueren Theorieen von Tissot 1881 (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1896", S. 210—213) geben aber ein *einseitiges* theoretisches Kriterium, welches in der Praxis nicht Stand hält, und namentlich für Landesvermessungen mit Triangulierungen zu vollständigen Fehlschlüssen führt.

Die Theorie jener Ω und ω erscheint sofort in ganz anderem Lichte, wenn man auch die bisher gleich Null gesetzten Messungsfehler zuzieht, d. h. wenn man von der Theorie zur Praxis übergeht.

Z. B. in Preussen wurde festgesetzt, dass die linearen Fehler, die durch die Benützung der rechtwinkligen sphärischen Coordinaten als ebene Coordinaten entstehen, nicht grösser als $\frac{1}{20\,000}$ oder 5^{cm} auf 1^{km} sein sollen (F. G. Gauss, „die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst, 1. Aufl. 1876", S. 299 und „Zeitschr. f. Verm. 1896", S. 196 und 200) und schon damit wird jener Theorie der Ω und ω u. s. w. der praktische Boden entzogen, denn jene Fehler werden bei Einhaltung der Grenze $y = 64^{km}$ nicht grösser als 5^{cm} auf 1^{km}; mag man die Benützung in der Ebene nach Soldner kongruent oder nach Gauss konform machen.

Die Flächenprojektionsfehler sind verschwindend klein im Vergleiche mit den Fehlern, welche beim wirklichen Feldmessen mit Messlatten, Winkelspiegel u. s. w. entstehen; und *grössere* Flächen, welche polygonometrisch an das System angeschlossen werden, nehmen von den Projektionsverzerrungsfehlern den unschädlichen Anteil in sich auf.

Der lineare Projektionsfehler von 0,005 % oder 5^{cm} auf 1000^{m} oder $0{,}05^{mm}$ auf 1^{m} oder auch $0{,}25^{mm}$ auf 5^{m}, kann auch verglichen werden mit dem metronomisch zulässigen Fehler von $1{,}6^{mm}$ an einer hölzernen Messlatte, welcher immer noch das Sechsfache des Projektionsfehlers ist.

Die oben berichtete Theorie der $\Omega : \omega$ hat ein rein *lineares* Messungsverfahren vorausgesetzt:

Wenn man in jedem Punkt nach allen Richtungen kleine Linien gezogen und dadurch die ganze Aufnahme bewirkt denkt ... d. h. es ist ein spekulatives Messungsverfahren vorausgesetzt, welches es praktisch nicht giebt. Der Schwerpunkt unserer modernen Vermessungen liegt nicht in den linearen Messungen, sondern in den *Winkel-*

messungen, von denen wir nachher (bei den Gleichungen (6) und (7) unten zu handeln haben werden).

Es ist auch der Gedanke ausgesprochen worden, bei konformen Coordinaten, mit grossen Gebieten, z. B. mit Ordinaten y, die grösser als 70 000^m sind, für alle weiter von der Coordinatenaxe abliegenden Gemarkungen besondere Reduktionen der Strecken oder Flächenangaben einzuführen.

Wenn die Projektions-Verzerrungsfehler praktisch zu gross werden, so müsste man nicht bloss bei *konformen* Coordinaten besondere Reduktionen der Strecken und der Flächen einführen, sondern bei den Soldnerschen Coordinaten wäre das noch viel mehr nötig — ja man müsste im Soldnerschen System nicht bloss gemarkungsweise Reduktionen anbringen, sondern, wie ein Kollege sich ausdrückte, man müsste eine ganze *Windrose* von Massstäben anbringen, nach jeder Richtung einen besonderen.

Wenn man ausnahmsweise mit den Verzerrungsfehlern an die Messungsfehler herankommt, was bei feinen Stadtvermessungen oder auch z. B. in Bayern wegen der grossen Ordinaten eintreten kann, dann bringt die Soldnersche ungleiche Verzerrung ganz ungeheuerliche Widerwärtigkeiten, welche zu ersehen sind aus der „Instruktion für neue Katastermessungen in Bayern,“ 1885 § 23. und noch deutlicher in technische Anleitung etc. Dr. J. H. Franke, München 1889, S. 121. Alles was dort im Interesse der Rechnungserleichterung etc. gesagt ist, wird mit einem Schlage überflüssig, wenn die Projektion konform ist.

Der Schwerpunkt unserer modernen Vermessungen liegt nicht in den linearen Messungen, sondern in den *Winkel*messungen, und während für erstere der Satz gilt „Es ist darnach zu trachten, die vernachlässigten Grössen möglichst klein zu machen, nicht aber nach allen Richtungen möglichst gleich —“, gilt für Triangulierungen gerade das Gegenteil, hier ist darnach zu trachten, die Verzerrungen nach allen Richtungen möglichst gleich zu machen, damit die Dreiecke ähnlich bleiben. In der Triangulierung III. Ordnung gestattet die konforme Projektion auf viel weitere Gebiete ohne alle sphärische Korrektionen von der Ordnung $1:r^2$ auszudehnen, als die Soldnersche, weil die schlimmsten Glieder der Soldnerschen Methode bei der konformen Projektion fortfallen.

Um dieses zu zeigen, machen wir die Vergleichung der Richtungsreduktionen, nämlich nach (20)—(21) § 48. S. 272 und (31) § 50. S. 284 beidemal mit den Bezeichnungen der Landesaufnahme, T für sphärischen und t für ebenen Richtungswinkel:

Soldner, kongr. $$T_1 - t_1 = \frac{\varrho}{6\,r^2}(x_2 - x_1)(2y_1 + y_2) + \frac{\varrho}{6\,r^2}\sin t_1 \cos t_1 (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \quad (6)$$

Gauss, konform $$T_1 - t_1 = \frac{\varrho}{6\,r^2}(x_2 - x_1)(2\,y_1 + y_2) \quad (7)$$

Das schlimmste Glied $\frac{x_2 - x_1}{6\,r^2\,s^2}(y_2^3 - y_1^3)$ von Soldner fällt bei Gauss rundweg fort. Wir wollen dieses Glied noch besonders betrachten:

$$\varrho\,\frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{6\,r^2\,s^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) = \varrho\,\frac{\sin t \cos t}{6\,r^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

Bei einer Kleintriangulierung entfernt von der Hauptaxe sind die $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$ verhältnismässig klein gegen die y selbst, sie gelten als von nächst kleinerer Ordnung, und damit haben wir den wichtigen Satz:



Die trigonometrischen Verzerrungsfehler der Gauss schen Kleintriangulierung entfernt von der Axe sind nur von nächst kleinerer Ordnung als bei der schwerfälligen Soldner schen Triangulierung.

Zu näherer Ausführung wollen wir die sämtlichen $y_1 \, y_2 \ldots$ kurz mit y und die $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ mit dx und dy bezeichnen, dann wird:

Soldner, kongruent	Gauss, konform	
$T - t = \varrho \frac{y}{2 r^2} (dx + y \sin t \cos t)$	$T - t = \varrho \frac{y \, dx}{2 r^2}$	(8)

Setzt man in runden Zahlen für Triangulierung III. Ordnung $dx = 5000^m$, dagegen y als sehr gross $= 100\,000^m$ und $t = 45°$, so wird:

Soldner, kongruent	Gauss, konform
$T - t = 1{,}3'' + 12{,}7'' = 14{,}0''$	$T - t = 1{,}3''$

also bei Gauss rund 1″, was in III. Ordnung leicht zu verschmerzen ist, aber bei Soldner 14″.

Das ist die Richtungsverzerrung. Die lineare Verzerrung giebt bei Soldner in diesem Fall ein Schwanken im Logarithmus zwischen 0.00005 und 0.00000, d. h. **Unmöglichkeit auch nur mit 5 stelligen Logarithmen glatt eben zu rechnen, während bei Gauss das lineare Element als Mittelwert bereits in den Anschluss-Coordinaten II. Ordnung steckt und dem Rechner in III. Ordnung gar nicht mehr zu Gesicht kommt.**

Hiebei ist auch die Höhenreduktion in Vergleichung zu ziehen, welche wir früher bei der Basismessung in § 9. S. 67 erwähnt haben. Wenn in der Höhe h über dem Meere eine Strecke s unmittelbar, z. B. mit Messlatten, gemessen ist, so kann sie nicht unmittelbar mit einer Triangulierungsseite verglichen werden, sondern sie muss auf den Meereshorizont reduziert werden $s\left(1 - \frac{h}{r}\right)$. Die Reduktion $\frac{s\,h}{r}$ hat nach S. 67 für $h = 100^m$ den Betrag $15{,}7^{mm}$ auf 1000^m oder 15,7 Milliontel.

Diese Höhenreduktion wirkt der Netzverzerrung günstig entgegen, denn eine Strecke s geht infolge der Höhenreduktion und der Netzreduktion über in:

$$s\left(1 - \frac{h}{r} + \frac{y^2}{2 r^2}\right)$$

Eine Übersichtstafel dazu haben wir auf Seite [45] des Anhangs berechnet. Man entnimmt daraus z. B., dass bei 400^m Höhe und Ordinaten $y = 70^{km}$ die Gesamtreduktion allgemein nahezu gleich Null ist, wenn die Projektion konform ist, dagegen schwankend zwischen Null und 6^{cm} auf 1^{km}, wenn die Projektion kongruent (nach Soldner) ist. (Auch dieses wollen wir später noch näher behandeln.)

Für die Höhenreduktion haben wir bisher vorausgesetzt, dass die Triangulierung selbst mit ihrer Basis auf den Meereshorizont reduziert sei, was die Regel ist. Es giebt aber auch Ausnahmen, z. B. in Württemberg ist der Triangulierungshorizont 844 Pariser Fuss $= 274{,}16^m$ über dem Meere, was eine logarithmische Reduktion 186·6 oder 43^{mm} auf 1^{km} bringt, welche zwar der Soldner schen Netzreduktion $\frac{y^2}{2 r^2} \cos^2 t$ entgegen wirkt, aber nicht nach allen Richtungen wirksam, weil die Projektion nicht konform ist.



Eine Gesamtreduktion ist auch in Mecklenburg eingeführt. Die Netzreduktion ist dort $1+\frac{x^2}{2r^2}$, weil die Hauptaxe nicht meridional, sondern westöstlich liegt. Der Maximalwert $1+\frac{x^2}{2r^2}$ ist logarithmisch $= 357{\cdot}0$, und deswegen wurde eine Gesamtreduktion $= 178{\cdot}5$ eingeführt, oder $= 41{,}1^{mm}$ für 1^{km}, welche einer Höhenreduktion für $h = 262{,}4^m$ gleichkommt, d. h. die Mecklenburgische Triangulierungsergebnisse sind mit einer solchen Gesamtmassstabs-Veränderung versehen, als ob der Horizont der Basis und die Triangulierung im Ganzen $262{,}4^m$ über dem Meere wäre.

Dadurch wurde erreicht, dass die Gesamt-Netzreduktion in dem ganzen Bereiche von rund 80^{km} südlich und 80^{km} nördlich von dem Normalparallel nur zwischen den Grenzen von rund $+4^{cm}$ auf 1^{km} und -4^{cm} auf 1^{km} sich bewegt, während sie sonst auf 8^{cm} für 1^{km} gestiegen wäre.

Nach all diesem ist an den grossen Vorteilen der Konformität für Triangulierung und Katastervermessungen nicht zu zweifeln.

Mit Zurückgreifen auf 1875 haben wir daher zwei Sätze:

I. Satz 1875. Wenn man eine Landesvermessung durch unendlich viele kleine Streckenmessungen machen würde und dabei auch alle Messungsfehler, selbst = Null setzte und wenn man die Quadratsumme aller Strecken-Verzerrungs-Fehler als einziges Kriterium annähme, so *würde* die Soldner sche Projektion mit etwa ein Fünftel der Fläche im Vorteil sein.

II. Satz 1896. Wenn man eine Landesvermessung nach moderner Art mit Triangulierung und Polygonzügen macht, so ist die konforme Projektion unbedingt weit im Vorteil: man kann dann mit dem Messungsgebiet so weit gehen (ohne andere Rücksichten und alles in III. Ordnung als eben behandeln) als es die praktischen Erwägungen der linearen Fehler gestatten, d. h. wenn man in letzterer Hinsicht den preussischen Bestimmungen folgen will, bis zu einer Ordinatenlänge $y =$ rund 100^{km}.

Zum Schlusse wollen wir noch die beiden Triangulierungs-Abrisse von § 47. S. 265 und § 51. S. 289 in dem Sinn vergleichen, dass wir die Mittelwerte der Richtungs-Reduktionen und der logarithmischen Seiten-Reduktionen bilden. Dieses giebt:

		durchschnittliche Richtungs-Reduktion	durchschnittliche logarithmische Seiten-Reduktion
kongruent	S. 265	$\pm 0{,}70''$	$\pm 7{\cdot}5$
konform	S. 289	$\pm 0{,}64$	$\pm 13{\cdot}6$

In der kongruenten Projektion sind die linearen Reduktionen im Vorteil und in der konformen Projektion sind die Richtungen im Vorteil; d. h. was wir allgemein erkannt haben, zeigt sich auch in den Zahlenbeispielen bestätigt. Doch ist der vorliegende Fall des Netzes Fig. 1. S. 287 zum Veranschaulichen der Vorteile der Konformität wenig geeignet, weil die Axe durch das Netz selbst hindurch geht und keine grossen Ordinaten vorkommen.

Wir wollen auch noch einen Blick auf das Hannover sche Stadttriangulierungsnetz III. Ordnung werfen, welches in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 204 in konformen Coordinaten der Landesaufnahme und S. 207 in kongruenten Kataster-Coordinaten berechnet ist. Obgleich die konformen Ordinaten im Mittel $y = 245000^m$



und die kongruenten Ordinaten nur $y = 23000^m$ lang sind, war doch die konforme Berechnung bequemer als die Soldner sche kongruente, weil bei ersterer die Reduktionen sich viel bequemer in Richtungs-Reduktionen und Entfernungs-Reduktionen trennen, von denen ausserdem die letzteren sich leicht tabellarisch erledigen lassen. (Vgl. die Hilfstafel für $\log \frac{\mu}{2 A^2} y^2$ auf S. [46] des Anhangs.)

Noch in anderem Sinne wollen wir die beiden Stadtnetz-Triangulierungs-Coordinaten vergleichen: In dem vorgeschriebenen Kataster-System Celle ist im Mittel $y = 23000^m$ und dazu nehmen wir im Mittel $x_2 - x_1 = 3000^m = d\,x$, und damit rechnen wir nach der Formel (8):

$$\begin{array}{ll} \text{kongruent} & T - t = 0{,}17'' + 0{,}67 = 0{,}84'' \\ \text{konform} & T - t = \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 0{,}17'' \end{array}$$

Die konforme Reduktion 0,17″ ist gerade an der Grenze der Vernachlässigkeitszulassung für das grundlegende Netz einer feinen Stadtvermessung, während 0,84″ schon zu gross ist. Wegen dieser Beträge von 0,84″ etc. haben wir uns damals entschlossen, die auf 0,1″ ausgeglichene Triangulierung noch in den 6 Hauptpunkten sphärisch zu rechnen; mit 0,17″ hätten wir das wohl auch schon ersparen können.

Alle diese Vergleichungen gestatten bereits ein Urteil zu fällen, das zu Gunsten der konformen Projektion, und zu Ungunsten der kongruenten Soldner schen Projektion sich stellen wird; wir werden jedoch in einem späteren Kapitel nochmals auf diese Sache zurückkommen.

§ 53. Sphärische geographische Coordinaten φ, λ und rechtwinklige Coordinaten x, y.

Die geographischen Breiten und Längen φ und λ lediglich auf die Erde als Kugel bezogen, haben wenig praktischen Wert, denn die Abplattung der Erde ist bei diesen Coordinaten viel einflussreicher als bei den rechtwinkligen Coordinaten x, y.

Trotzdem haben wir die Aufgabe, φ und λ aus x und y zu berechnen, und nachher umgekehrt, hier in dem Kapitel über *sphärische* Coordinaten mit aufgenommen, weil es möglich sein wird, durch kleine Kunstgriffe den Übergang von der Kugel zum Ellipsoid noch soweit klar zu machen (in dem nachfolgenden § 54.), als zum ersten Verständnis unserer heutigen Landesvermessungen und Katastervermessungen und zur Einsicht in die Feld- und Landmesser-Anweisungen der deutschen Staaten nötig ist.

Die verschiedenen Beziehungen zwischen geographischen Coordinaten φ, λ und rechtwinkligen Coordinaten x, y werden wir in zwei Aufgaben darstellen, und zwar zuerst:

I. Gegeben x und y. Gesucht φ und λ.

Nach Fig. 1. und Fig. 2. S. 298 nehmen wir folgende Aufgabe:

Gegeben ist die Breite φ_0 eines angenommenen Coordinaten-Ursprungs O und dazu die rechtwinkligen Coordinaten x, y eines Punktes P.

Gesucht ist die Breite φ_2 des Punktes P, der Längen-Unterschied λ zwischen O und P und die Meridian-Konvergenz γ für P und P_1.

Die Abscissen x sollen nach Norden positiv, die Ordinaten y nach Osten positiv, und die Längen λ ebenfalls nach Osten positiv gezählt werden.

Aus Fig. 1. entnehmen wir sofort die Beziehung zwischen der Ursprungsbreite φ_0, der Fusspunktsbreite φ_1 und der Abscisse x, nämlich:

Fig. 1.

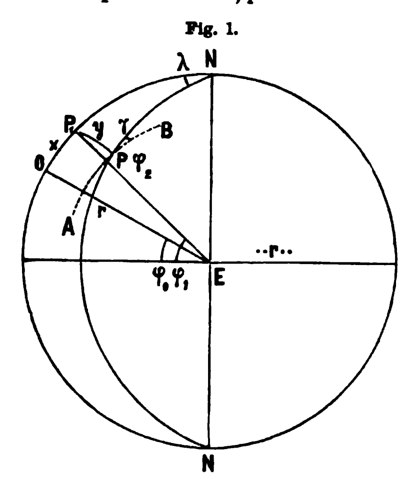
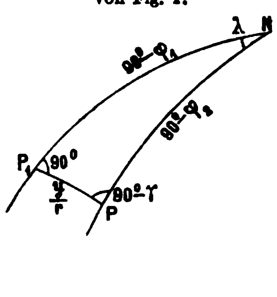


Fig. 2.
Rechtwinkliges Dreieck $N P_1 P$ von Fig. 1.



$$\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{x}{r} \text{ bezw. } = \frac{x}{r} \varrho \tag{1}$$

Alles weitere wird durch das rechtwinklige sphärische Dreieck $N P_1 P$ geliefert, weshalb wir dieses Dreieck in Fig. 2. nochmals besonders herausgezeichnet haben. Dieses Dreieck giebt zuerst die Cosinus-Gleichung:

$$\cos(90° - \varphi_2) = \cos(90° - \varphi_1) \cos\frac{y}{r}$$

oder ohne 90°:

$$\sin\varphi_2 = \sin\varphi_1 \left(1 - \frac{y^2}{2 r^2}\right)$$

umgekehrt:

$$\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2 = \frac{y^2}{2 r^2} \sin\varphi_1$$

Nun ist aber in erster Näherung (z. B. nach S. 179):

$$\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2 = (\varphi_1 - \varphi_2) \cos\varphi_1$$

also:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{y^2}{2 r^2} \operatorname{tang}\varphi_1 \tag{2}$$

Zweitens giebt das rechtwinklige Dreieck Fig. 2. zur Bestimmung von λ:

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{\operatorname{tang}\frac{y}{r}}{\sin(90° - \varphi_1)} = \frac{\operatorname{tang}\frac{y}{r}}{\cos\varphi_1} = \frac{1}{\cos\varphi_1}\left(\frac{y}{r} + \frac{y^3}{3 r^3}\right)$$

Die *arc tang*-Reihe, S. 172, giebt:

$$\lambda = \operatorname{arc\,tang}\lambda = \operatorname{tang}\lambda - \frac{(\operatorname{tang}\lambda)^3}{3}$$

$$\lambda = \frac{1}{\cos\varphi_1}\left(\frac{y}{r} + \frac{y^3}{3 r^3}\right) - \frac{y^3}{3 r^3 \cos^3\varphi_1}$$

Wenn man die Glieder mit y^3 zusammenordnet, so bekommt man:

$$\lambda = \frac{y}{r \cos\varphi_1} - \frac{y^3}{3 r^3} \frac{\operatorname{tang}^2\varphi_1}{\cos\varphi_1} \tag{3}$$

Drittens giebt das rechtwinklige Dreieck Fig. 2. zur Bestimmung von γ:

$$tang\,(90^\circ - \gamma) = \frac{tang\,(90^\circ - \varphi_1)}{sin\,\frac{y}{r}} \quad \text{oder} \quad tang\,\gamma = sin\,\frac{y}{r}\,tang\,\varphi_1$$

$$tang\,\gamma = \left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6\,r^3}\right) tang\,\varphi_1$$

$$\gamma = \left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6\,r^3}\right) tang\,\varphi_1 - \frac{y^3}{3\,r^3}\,tang^3\,\varphi_1$$

$$\gamma = \frac{y}{r}\,tang\,\varphi_1 - \frac{y^3}{6\,r^3}\,tang\,\varphi_1\,(1 + 2\,tang^2\,\varphi_1) \tag{4}$$

Durch diese Gleichungen (1) — (4) ist unsere Aufgabe gelöst, wir wollen aber noch zwei neue Gleichungen bilden, welche (3), (4) entsprechen, aber überall statt der Fusspunkts-Breite φ_1 die Breite φ_2 enthalten sollen. Zur Bestimmung von λ nimmt man dann:

$$sin\,\lambda = \frac{sin\,\frac{y}{r}}{sin\,(90^\circ - \varphi_2)} = \frac{sin\,\frac{y}{r}}{cos\,\varphi_2} = \frac{1}{cos\,\varphi_2}\left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6\,r^3}\right)$$

Die *arc sin*-Reihe, S. 172, giebt:

$$\lambda = arc\,sin\,\lambda = sin\,\lambda + \frac{(sin\,\lambda)^3}{6}$$

$$\lambda = \frac{1}{cos\,\varphi_2}\left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6\,r^3}\right) + \frac{y^3}{6\,r^3\,cos^3\,\varphi_2}$$

$$\lambda = \frac{y}{r\,cos\,\varphi_2} + \frac{y^3}{6\,r^3}\,\frac{tang^2\,\varphi_2}{cos\,\varphi_2} \tag{5}$$

Ferner zu einer zweiten Formel für γ aus Fig. 2.:

$$cos\,(90^\circ - \gamma) = \frac{tang\,\frac{y}{r}}{tang\,(90^\circ - \varphi_2)}\,, \quad sin\,\gamma = tang\,\frac{y}{r}\,tang\,\varphi_2$$

$$sin\,\gamma = \left(\frac{y}{r} + \frac{y^3}{3\,r^3}\right) tang\,\varphi_2$$

$$\gamma = \left(\frac{y}{r} + \frac{y^3}{3\,r^3}\right) tang\,\varphi_2 + \frac{y^3}{6\,r^3}\,tang^3\,\varphi_2$$

$$\gamma = \frac{y}{r}\,tang\,\varphi_2 + \frac{y^3}{6\,r^3}\,tang\,\varphi_2\,(2 + tang^2\,\varphi_2) \tag{6}$$

Mit diesen Formeln (1)—(6) haben wir den zu Anfang vorgesetzten Zweck erreicht, und zwar bei λ und γ sogar doppelt.

Ohne zwingenden Grund fürs folgende wollen wir auch noch für λ statt der beiden zweigliederigen Formeln (3) und (5) eine *ein*gliederige Formel bilden, nämlich:

$$\lambda = \frac{y}{r}\,sec\,\frac{\varphi_1 + 2\,\varphi_2}{3} = \frac{y}{r}\,sec\left(\varphi_2 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{3}\right) \tag{7}$$

Man kann diese bequeme Formel (7) leicht rückwärts begründen, indem man setzt:

$$\frac{\varphi_1 + 2\,\varphi_2}{3} = \varphi_1 - \frac{2}{3}\,(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$cos\,\frac{\varphi_1 + 2\,\varphi_2}{3} = cos\,\varphi_1 + \frac{2}{3}\,(\varphi_1 - \varphi_2)\,sin\,\varphi_1 = cos\,\varphi_1\left(1 + \frac{2}{3}\,(\varphi_1 - \varphi_2)\,tang\,\varphi_1\right)$$

$$sec\,\frac{\varphi_1 + 2\,\varphi_2}{3} = \frac{1}{cos\,\varphi_1}\left(1 - \frac{2}{3}\,(\varphi_1 - \varphi_1)\,tang\,\varphi_1\right)$$

Wegen (2) giebt dieses:

$$sec\,\frac{\varphi_1 + 2\,\varphi_2}{3} = \frac{1}{cos\,\varphi_1}\left(1 - \frac{1}{3}\,\frac{y^2}{r^2}\,tang^2\,\varphi_1\right)$$

Dieses in (7) gesetzt, führt zurück auf (3), womit (7) bewiesen ist.

Man kann eine Umformung ähnlicher Art auch für die Meridian-Konvergenz machen, denn (4) oder (6) lässt sich auf diese Form bringen:

$$\gamma = \frac{y}{r}\,sin\,\frac{2\,\varphi_1 + \varphi_2}{3}\,sec\,\frac{\varphi_1 + 2\,\varphi_2}{3} \tag{8}$$

II. Gegeben φ, λ. Gesucht x, y.

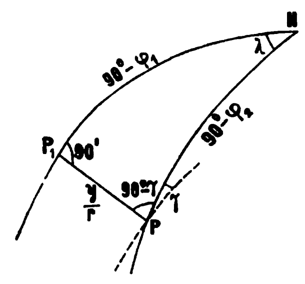


Fig. 1.

Die Umkehrung der vorigen Aufgabe heisst:

Gegeben sind die geographischen Coordinaten φ_2, λ eines Punktes P, und zwar die Länge λ bezogen auf den Meridian eines gegebenen Coordinaten-Systems, dessen Ursprungs-Breite φ_0 ebenfalls gegeben ist.

Gesucht sind die rechtwinkligen Coordinaten x, y des Punktes P, und die Meridian-Konvergenz γ.

Auch diese Aufgabe lässt sich mittelst des rechtwinkligen Dreiecks, das wir in Fig. 1. wieder haben, leicht lösen.

Zur Bestimmung von $\varphi_1 - \varphi_2$ hat man:

$$cos\,\lambda = \frac{tang\,(90° - \varphi_1)}{tang\,(90° - \varphi_2)} = \frac{tang\,\varphi_2}{tang\,\varphi_1}$$

$$\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) tang\,\varphi_1 = tang\,\varphi_2 \quad \text{oder} \quad tang\,\varphi_1 - tang\,\varphi_2 = \frac{\lambda^2}{2}\,tang\,\varphi_1$$

Andererseits ist in erster Näherung

$$tang\,\varphi_1 - tang\,\varphi_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{cos^2\,\varphi_1}$$

also:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\lambda^2}{2}\,sin\,\varphi_1\,cos\,\varphi_2 \tag{9}$$

Bei den Entwicklungen für λ und γ kann man wieder wie im ersten Teil entweder alles auf φ_1 oder auf φ_2 beziehen, wir wollen die *beiden* Entwicklungen nebeneinander hersetzen, ohne Erläuterungen durch Worte, welche nach dem vorhergehenden nicht mehr nötig sein werden.

$tang\,\lambda = \dfrac{tang\,\dfrac{y}{r}}{cos\,\varphi_1} = \left(\lambda + \dfrac{\lambda^3}{3}\right) cos\,\varphi_1$	$sin\,\lambda = \dfrac{sin\,\dfrac{y}{r}}{cos\,\varphi_2} = \left(\lambda - \dfrac{\lambda^3}{6}\right) cos\,\varphi_2$
$y = r\,\lambda\,cos\,\varphi_1 + \dfrac{r\,\lambda^3}{3}\,cos\,\varphi_1\,sin^2\,\varphi_1$	$y = r\,\lambda\,cos\,\varphi_2 - \dfrac{r\,\lambda^3}{6}\,cos\,\varphi_2\,sin^2\,\varphi_2$ (10)
$cos\,(90° - \gamma) = sin\,\lambda\,cos\,(90° - \varphi_1)$	$cos\,(90° - \varphi_2) = cotg\,\lambda\,cotg\,(90° - \gamma)$
$sin\,\gamma = \left(\lambda - \dfrac{\lambda^3}{6}\right) sin\,\varphi_1$	$tang\,\gamma = tang\,\lambda\,sin\,\varphi_2 = \left(\lambda + \dfrac{\lambda^3}{3}\right) sin\,\varphi_2$
$\gamma = \lambda\,sin\,\varphi_1 - \dfrac{\lambda^3}{6}\,sin\,\varphi_1\,cos^2\,\varphi_1$	$\gamma = \lambda\,sin\,\varphi_2 + \dfrac{\lambda^3}{3}\,sin\,\varphi_2\,cos^2\,\varphi_2$ (11)

Der Gang der Auflösung würde nun so sein, dass man zuerst nach (9) aus der gegebenen Breite φ_2 die Fusspunkts-Breite φ_1 ableitet, und daraus, durch die Differenz gegen die Ursprungs-Breite φ_0, die Abscisse x berechnet, nämlich:

$$x = (\varphi_1 - \varphi_0)\, r \quad \text{bezw.} \quad = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\varrho}\, r \tag{12}$$

Darauf hat man für y und γ je zwei Formeln, nämlich (10) für y, und (11) für γ, woraus man nach Umständen die eine oder andere auswählen kann, um y und γ zu berechnen. Oder man kann auch zur Probe Doppelrechnung anwenden.

Die Doppel-Formeln (10) und (11), welche zweigliederig sind, kann man auch in je *eine* eingliederige Formel überführen, in ähnlicher Weise wie dieses früher bei (7) und (8) gezeigt wurde. Man findet:

$$\text{Umwandlung von (10):} \quad y = r\,\lambda \cos \frac{\varphi_1 + 2\,\varphi_2}{3} \tag{13}$$

$$\text{" \quad " (11):} \quad \gamma = \lambda \sin \frac{2\,\varphi_1 + \varphi_2}{3} \tag{14}$$

§ 54. Übergang zum Ellipsoid.

Nachdem wir die rein *sphärischen* Beziehungen zwischen den geographischen Coordinaten und den rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im vorigen § 53. kennen gelernt haben, müssen wir auch die *sphäroidischen* Beziehungen hiefür, wenigstens in erster Näherung herstellen.

Zuerst behandeln wir die Rektifikation des Meridian-Bogens x zwischen den Breiten φ_0 und φ_1, wofür in (1) § 53. S. 298 die Gleichung gefunden wurde:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = x\,\frac{\varrho}{r} \quad \text{oder} \quad x = (\varphi_1 - \varphi_0)\,\frac{r}{\varrho} \tag{1}$$

Wenn die Abscisse x nicht auf einem Kreisbogen vom Halbmesser r, sondern auf dem Bogen einer Meridian-Ellipse abgewickelt wird, so kann man doch, wenn x nicht sehr gross ist, die Rechnung mit einem Kreisbogen führen, dessen Halbmesser aber dann gleich dem Meridian-Krümmungshalbmesser M für die Mittelbreite $\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2}$ zu nehmen ist, wie wir bereits in § 35. ausführlich gezeigt haben (nämlich bei (11) S. 210 und dann nochmals besonders bei (43) S. 218—219).

Wir haben dabei gefunden, dass der Fehler dieses Näherungs-Verfahrens in unseren Breiten nur etwa 5mm auf 1° beträgt (vgl. die Hilfstafel für g, S. 219), so dass namentlich bei den kleinen Geltungsbereichen, welche z. B. die 40 Preussischen Kataster-Coordinatensysteme haben, jenes Verfahren ganz zulässig und zugleich sehr bequem ist.

Ausserdem kann man auch eine Hilfstafel von der Art Seite [38] des Anhangs benützen, über welche auf S. 216 das Nötige gesagt wurde.

Dieses war rasch erledigt, etwas mehr Überlegung ist nötig, um für die Kugel, welche im vorigen § 53. mit dem unbestimmten Halbmesser r algebraisch eingeführt wurde, einen greifbaren Halbmesser in Zahlen zu finden.

In dieser Beziehung finden wir, dass die Übertragung auf das Ellipsoid wesentlich erleichtert wird durch den Umstand, dass der Ordinaten-Bogen y, weil er rechtwinklig zum Ursprungs-Meridian ist, mit seinen Endpunkten in nicht wesentlich ver-



schiedenen Breiten liegt, weshalb wir uns erlauben dürfen, die Ordinate y zu betrachten als liegend auf einem Kreisbogen, dessen Halbmesser der *Quer-Krümmungshalbmesser* N_1 der Fusspunkts-Breite φ_1 ist.

Wir machen also die Annahme

$$r = N_1 = \frac{c}{V_1} = \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi_1}} \tag{2}$$

gültig für die Fusspunkts-Breite φ_1. Die Formel für N_1 wurde früher in § 32. (22) S. 197 entwickelt und statt der Ausrechnung in Zahlen für den einzelnen Fall können wir uns kurzer Hand der Hilfstafel auf Seite [8]—[29] des Anhangs bedienen.

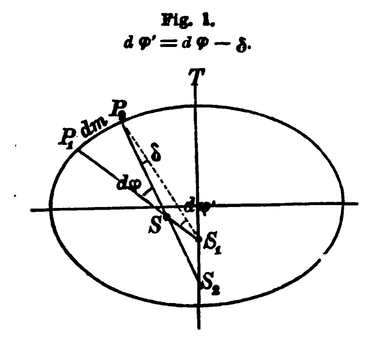
Diese Annahme reicht aus zur Berechnung von λ und γ aus gegebenen φ_1 und y oder umgekehrt, aber zur Berechnung von φ_2 oder φ, d. h. der Breite des Endpunktes einer Ordinate y müssen wir noch eine dritte Überlegung machen, zu welcher wir einen neuen Begriff einführen:

Der verkürzte Breiten-Unterschied.

Von allen Wirkungen der Elliptizität der Erdoberfläche ist die bedeutendste und niemals zu vernachlässigende, wenn überhaupt von der Elliptizität die Rede ist, die Abweichung zweier aufeinander folgender Normalen in einem Meridian, wodurch der kleine Winkel δ entsteht, der in der nachstehenden Fig. 1. eingezeichnet ist.

Wir werden diesen Winkel δ näher untersuchen.

Fig. 1.
$d\varphi' = d\varphi - \delta$.



In Fig. 1. seien $P_1 S_1$ und $P_2 S_2$ zwei Normalen einer Meridian-Ellipse, welche sich nicht in einem Punkte der Umdrehungsaxe sondern in einem anderen Punkte S schneiden, und zwar unter einem Winkel $d\varphi$, welcher gleich der Differenz der Breiten φ_1 und φ_2 beider Punkte P_1 und P_2 ist, d. h.:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = d\varphi \tag{1}$$

Wenn ferner der Meridianbogen $P_1 P_2 = dm$ gesetzt wird, und der Meridian-Krümmungshalbmesser für die Mittelbreite $= M$ (d. h. nahezu $M = P_1 S = P_2 S$), so hat man für Differentialbetrachtung:

$$dm = M\,d\varphi \tag{2}$$

Andererseits kann man in erster Näherung auch setzen:

$$dm = N\,d\varphi' \quad (\text{wo } P_1 S_1 = N) \tag{3}$$

Es ist also das Verhältnis von (2) und (3):

$$\frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{N}{M} \tag{4}$$

und daraus ergiebt sich die Differenz:

$$\delta = d\varphi - d\varphi' = d\varphi\left(1 - \frac{d\varphi'}{d\varphi}\right) = d\varphi\left(1 - \frac{M}{N}\right) \text{ oder } = d\varphi \frac{M}{N}\left(\frac{N}{M} - 1\right) \tag{5}$$

früh
dungen
n sind
gegnem

ber 188

dung de
Feld- und
tige Ver
hiefür ein

IX. nicht
polygono
Aufl. 1892.
Anleitung

Dabei ist

§ 55. Sphäroidische Coordinaten φ, λ und x, y.

Um die sphärischen Formeln von § 53. mit Hilfe von § 54. auf das Ellipsoid zu übertragen, nehmen wir zuerst die Formel (2) S. 298 zur Hand, nämlich:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{y^2}{2\,r^2} \, tang \, \varphi_1 \tag{1}$$

Zuerst ist für r der Quer-Krümmungs-Halbmesser N_1 der Fusspunkts-Breite φ_1 zu setzen, also:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{y^2}{2\,N_1^2} \, tang \, \varphi_1 \tag{2}$$

Diese Differenz $\varphi_1 - \varphi_2$ ist sphärisch berechnet, d. h. *„verkürzt"* in dem früher in § 54. erörterten Sinne; die wirkliche Breiten-Differenz $\varphi_1 - \varphi$ wird daher nach (4) § 54. S. 302:

$$\frac{\varphi_1 - \varphi}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{N}{M} = V^2 \tag{3}$$

also:

$$\varphi_1 - \varphi = \frac{V^2}{2} \frac{y^2}{N_1^2} \, tang \, \varphi_1 \tag{4}$$

Fig. 1.

Dabei wird V^2 als zur Breite φ_1 gehörig genommen, weil unter der Breite φ_1 Berührung des y-Bogens mit dem Parallelkreis stattfindet.

Da wir nun nichts mehr weiter zu thun haben, als in den sphärischen Formeln von § 53. S. 298—300 überall N_1 statt r und φ statt φ_2 zu schreiben und die nötigen ϱ zuzusetzen, erhalten wir mit Benützung der vorstehenden (1) und (4) und im Anschluss an nebenstehende Fig. 1. folgendes:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{Gegeben} & \varphi_0 \;, & x \;, & y & \\ \text{Gesucht} & \varphi_1 \;, & \varphi \;, & \lambda \text{ und } \gamma & \end{array}\right\} \tag{5}$$

Auflösung:
$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{x}{M} \varrho \tag{6}$$

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{V^2}{2} \frac{y^2}{N_1^2} \varrho \, tang \, \varphi_1 \tag{7}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{x}{M} \varrho - \frac{V^2}{2} \frac{y^2}{N_1^2} \varrho \, tang \, \varphi_1 \tag{8}$$

(3) S. 298:
$$\lambda = \frac{y}{N_1} \frac{\varrho}{\cos \varphi_1} - \frac{y^3}{3\,N_1^3} \frac{\varrho}{\cos \varphi_1} tang^2 \varphi_1 \tag{9}$$

(5) S. 299 oder:
$$\lambda = \frac{y}{N_1} \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{y^3}{6\,N_1^3} \frac{\varrho}{\cos \varphi} tang^2 \varphi \tag{10}$$

(4) S. 299:
$$\gamma = \frac{y}{N_1} \varrho \, tang \, \varphi_1 - \frac{y^3}{6\,N_1^3} \varrho \, tang \, \varphi_1 (1 + 2 \, tang^2 \varphi_1) \tag{11}$$

(6) S. 299 oder:
$$\gamma = \frac{y}{N_1} \varrho \, tang \, \varphi + \frac{y^3}{6\,N_1^3} \varrho \, tang \, \varphi (2 + tang^2 \varphi) \tag{12}$$

Nun wollen wir noch die Haupt-Coëfficienten [1] und [2] unserer Hilfstafel von S. [8]—[29] des Anhangs einführen, nämlich:

$$\frac{\varrho}{M} = [1] \text{ für die Mittelbreite } \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \tag{13}$$

$$\frac{\varrho}{N_1} = [2] \text{ für die Fusspunkts-Breite } \varphi_1 \tag{14}$$

Damit werden die vorstehenden Formeln:

$$\varphi_1 = \varphi_0 + [1]\,x \tag{6*}$$

$$\varphi \;= \varphi_1 - \frac{([2]\,y)^2\,V^2}{2\,\varrho}\,tang\,\varphi_1 \tag{7*}$$

$$\varphi = \varphi_0 + [1]\,x - \frac{([2]\,y)^2}{2\,\varrho}\,V^2\,tang\,\varphi_1 \tag{8*}$$

$$\lambda = \frac{[2]\,y}{\cos\varphi_1} - \left(\frac{[2]\,y}{\cos\varphi_1}\right)^3 \frac{1}{3\,\varrho^2}\sin^2\varphi_1 \tag{9*}$$

$$\text{oder } \lambda = \frac{[2]\,y}{\cos\varphi} + \left(\frac{[2]\,y}{\cos\varphi}\right)^3 \frac{1}{6\,\varrho^2}\sin^2\varphi \tag{10*}$$

$$\lambda = [2]\,y\,tang\,\varphi_1 - \frac{([2]\,y)^3}{6\,\varrho^2}\,tang\,\varphi_1\,(1 + 2\,tang^2\,\varphi_1) \tag{11*}$$

$$\text{oder } \lambda = [2]\,y\,tang\,\varphi + \frac{([2]\,y)^3}{6\,\varrho^2}\,tang\,\varphi\,(2 + tang^2\,\varphi) \tag{12*}$$

Nachdem wir den ersten Teil der Formeln von § 53. von der Kugel auf das Ellipsoid übertragen haben, kann keine Schwierigkeit bestehen, auch den zweiten Teil jener Formeln von § 53. S. 300—301 so zu übertragen. Wir schreiben hiefür sofort die Ergebnisse:

Gegeben φ, λ nebst φ_0 (15)

Gesucht x, y, γ (16)

(9) S. 300:
$$\varphi_1 = \varphi + \frac{V^2}{2\,\varrho}\,\lambda^2 \sin\varphi\cos\varphi \tag{17}$$

(12) S. 301:
$$x = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{[1]} \tag{18}$$

(10) S. 300:
$$y = \frac{\lambda}{[2]}\cos\varphi_1 + \frac{\lambda^3}{[2]}\,\frac{1}{3\,\varrho^2}\cos\varphi_1\sin^2\varphi_1 \tag{19}$$

oder
$$y = \frac{\lambda}{[2]}\cos\varphi - \frac{\lambda^3}{[2]}\,\frac{1}{6\,\varrho^2}\cos\varphi\sin^2\varphi \tag{20}$$

(11) S. 300:
$$\gamma = \lambda\sin\varphi_1 - \lambda^3\,\frac{1}{6\,\varrho^2}\sin\varphi_1\cos^2\varphi_1 \tag{21}$$

oder
$$\gamma = \lambda\sin\varphi + \lambda^3\,\frac{1}{3\,\varrho^2}\sin\varphi\cos^2\varphi \tag{22}$$

Nun geben wir auf S. 308—309 ein Zahlen-Beispiel sowohl für die Formeln (7*)—(12*), als auch für deren Umkehrung (17)—(22). Da die ganze Rechnung mit allen Einzelzahlen angegeben ist, wird zur Erklärung nichts weiter nötig sein; auch einige vorübergehend eingeführte Zwischen-Bezeichnungen (*a*), (*b*) u. dgl. erklären sich selbst als kleine Übergangshilfen, mit Rücksicht auf Raummangel.

Die Coëfficienten-Logarithmen $log\,[1]$, $log\,[2]$, $log\,V^2$, $log\,(1+2\,t^2)$, $log\,(2+t^2)$, sind aus den verschiedenen Hilfstafeln unseres Anhanges entnommen.

Im Übrigen sei nur noch bemerkt, dass man das Vorzeichen von y oder λ nicht in der ganzen Rechnung durchführen muss, wie bei uns theoretisch nötig war, man braucht nur am Schlusse zu merken, dass y, λ und γ immer gleiche Zeichen haben.

Der im nachstehenden Beispiele S. 308 und 309 benützte Coordinaten-Nullpunkt Celle ist einer der 40 preussischen Kataster-Nullpunkte, welche im Jahre 1879 eingeführt worden sind.

Meridianbögen und Breiten-Differenzen.

Bei den kleinen Geltungsbereichen der Preussischen Kataster-Coordinaten-Systeme wird die Beziehung zwischen der Abscisse x und der Breiten-Differenz $\varphi_1 - \varphi_0$ hinreichend genau durch den Meridian-Krümmungs-Halbmesser M der Mittelbreite gegeben, nämlich:

$$x = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\varrho} M \quad \text{oder} \quad = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{[1]}$$

wobei M der Meridian-Krümmungs-Halbmesser für die Mittelbreite $\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2}$ ist, oder [1] der entsprechende Coëfficient nach (13) S. 304.

Indessen bei grösserer Ausdehnung empfiehlt sich andererseits eine allgemeine Tafel der Meridianbögen, z. B. diejenige, welche auf S. 216 erwähnt wurde, welche auch in unserem Anhange Seite [38] von 10′ zu 10′ gegeben ist, oder besser in neuer Berechnung Seite [55]—[57] von 1′ zu 1′.

Bei Benützung einer solchen Tafel braucht man für den Coordinaten-Nullpunkt mit gegebener Breite φ_0 nur ein für allemal den Meridianbogen-Wert B_0 zu bestimmen, um dann für jede andere Breite φ_1 den zugehörigen Wert B_1 und dann $x = B_1 - B_0$ zu finden.

Für den Wert $\varphi_0 = 52° 37' 32{,}6709''$, welcher zu dem Coordinaten-Nullpunkt Celle gehört, haben wir die fragliche Interpolation schon beispielshalber aus anderer Veranlassung behandelt, nämlich am Schluss von § 35. S. 220 wurde gefunden $B_0 = 5\,832\,371{,}046^m$ als Meridianbogen vom Äquator bis zu dem Punkte Celle.

Hat man längere Zeit mit Punkten eines Geltungsbereiches zu thun, so kann man auch noch weiteres allgemein tabellarisch vorbereiten, man kann z. B. eine Tafel anlegen, welche für gegebene Fusspunkts-Breite φ_1 sofort die Abscisse x giebt oder umgekehrt. Z. B. in der Gegend von Hannover-Linden, im Geltungsbereiche Celle, benützen wir folgende Hilfstafel:

	Geographische Breite $= \varphi$	Meridianbogen $= B$	$B - B_0 = x$	Δx
Celle	52° 37′ 32,6709″	5 832 371,046^m	0,000^m	
	. . . . . .			
	52° 30′	5 818 380,341	— 13 990,705^m	
				1854,399^m
	52 29	5 816 525,942	— 15 845,104	
				1854,393
	52 28	5 814 671,549	— 17 699,497	
				1854,388
	52 27	5 812 817,162	— 19 553,885	
				1854,382
	52 26	5 810 962,779	— 21 408,267	
				1854,378
	52 25	5 809 108,401	— 23 262,645	
				1854,372
	52 24	5 807 254,029	— 25 117,017	
				1854,367
	52 23	5 805 399,662	— 26 971,384	
				1854,361
	52 22	5 803 545,301	— 28 825,745	
				1854,357
	52 21	5 801 690,944	— 30 680,102	
				1854,351
	52 20	5 799 836,593	— 32 534,453	

Man sieht übrigens aus dem Zusammenhang dieser Zahlenwerte, dass wenn man den Meridian von Celle als x-Axe benützen will, damit der *Punkt* Celle als Nullpunkt für die Berechnung gar keine Rolle spielt; man könnte gerade so gut z. B. $\varphi_0 = 52° 30'$ als Nullpunktsbreite nehmen, dann würden alle x um 13 990,705^m grösser; alle Differenzen der x und alles Übrige blieben aber gleich.

Die Abscissen x eines solchen Coordinaten-Systems können beliebig lang sein, sie könnten z. B. vom Äquator bis zum Nordpol hingehen, wenn man eine Tafel der durchgehenden Meridianbögen benützt.

Das führt auf den Gedanken, dass man z. B. den Meridian von Celle auch so benützen könnte, dass die x schlechthin $= B$ gesetzt würden, mit Weglassung einer runden Zahl, etwa 5000 000; dann bekäme Celle als Zufallspunkt die Abscisse $x = 832\,371{,}046^m$ und die Ordinate $y = 0{,}000^m$.

In diesem Sinne, d. h. mit Zählung der x vom Äquator der Erde an, wollen wir auch noch die beiden Formeln (17) und (18) zusammen so schreiben:

$$x = \frac{\varphi - \varphi_0}{[1]} + \frac{V^2}{2\,\varrho}\frac{\lambda^2}{[1]} \sin\varphi \cos\varphi \tag{23}$$

Setzt man hier $\varphi_0 = 0$, d. h. zählt man vom Äquator an, so nimmt das erste Glied von (23) den Wert B an, d. h. den Meridianbogen vom Äquator bis zur Breite φ, und da im zweiten Gliede $[1] = \frac{\varrho}{M}$ und $V^2 = \frac{N}{M}$ ist, so hat man:

$$x = B + \frac{\lambda^2}{2\,\varrho^2} N \sin\varphi \cos\varphi = B + \frac{\lambda^2}{2\,\varrho}\,\frac{\sin\varphi \cos\varphi}{[2]} \tag{24}$$

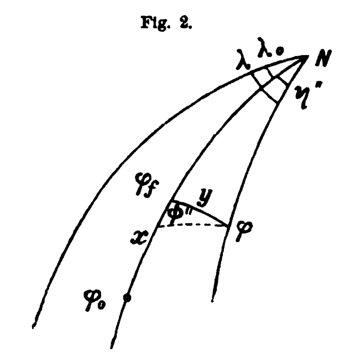
Dabei wird N oder [2] zur Breite φ gehörig genommen, während wir es früher zur Fusspunkts-Breite φ_1 genommen haben. Solche und ähnliche Unterscheidungen würden sich erst in den höheren Gliedern, die hier nicht mehr mit genommen sind, ausdrücken. Wir werden der Formel (24) oder ähnlichen, auch später wieder begegnen.

Rechnungs-Formular der preussischen Kataster-Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881.

Da in Preussen die Veröffentlichungen der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme in Form von geographischen Coordinaten geschehen, der Feld- und Landmesser aber rechtwinklige Coordinaten haben muss, kommt die gegenseitige Verwandlung solcher Coordinaten so oft vor, dass die Kataster-Anweisung hiefür ein „Trig. Form. 6.“ gegeben hat.

Die dazu nötigen Hilfstafeln sind aber in der amtlichen Anweisung IX. nicht enthalten, sondern es wird hiefür verwiesen auf die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst von F. G. Gauss 1876 und 2. Aufl. 1892. Als Quellenschrift für die Methode des Form. 6. wird angegeben: „Börsch, Anleitung zur Berechnung der rechtw. sphär. Coordinaten u. s. w. 1868, 1869, S. 19 und 1885, S. 91“. Namentlich die Rechnung mit Additamenten, welche unseren Gliedern dritter Ordnung $\frac{\lambda^3 \cos\varphi \sin^2\varphi}{6}$ u. s. w. entspricht, ist aus Börsch in das preussische Kataster übergegangen.

Fig. 2.



Das erwähnte Form. 6. betrifft nur die Verwandlung der geographischen Coordinaten in rechtwinklige Coordinaten, und nicht umgekehrt; auch ist die Berechnung der Meridian-Konvergenz nicht mit aufgenommen.

Geographische Coordinaten φ, λ aus rechtwinkligen Coordinaten x, y.

Coordinaten-Nullpunkt Celle mit $\varphi_0 = 52° \, 37' \, 32{,}6709''$ — $L_0 = 27° \, 44' \, 54{,}8477''$

Gegeben Ägidius $x = -28\,308{,}394^m$ — $y = -23\,271{,}813^m$

Genäherte Berechnung von $\varphi_1 - \varphi_0$ aus x nach der Hilfstafel Seite [39] des Anhangs; mit rund $\varphi = 52^1/_2{}°$

$20\,000^m$	giebt	$10' \, 47{,}1''$
$8\,000$	„	$4' \, 18{,}85$
300	„	$9{,}70$
8	„	$0{,}24$
		$-15' \, 15{,}89''$
	$\varphi_0 =$	$52° \, 37' \, 32{,}67''$
Genähert	$\varphi_1 =$	$52° \, 22' \, 16{,}78''$

$$\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2} = 52° \, 29' \, 54{,}72''$$

Damit geben die Hilfstafeln des Anhangs:

mit φ_m
Seite [33], $\log [1] = 8.509\,9477{\cdot}2$

mit φ_1
Seite [33], $\log [2] = 8.508\,8706{\cdot}9$
„ [21], $\log V^2 = 0.001\,086$

$$\varphi_1 = \varphi_0 + [1]\,x$$

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{([2]\,y)^2}{2\,\varrho} V^2 \operatorname{tang} \varphi_1$$

$$\lambda = \frac{[2]\,y}{\cos \varphi_1} - \left(\frac{[2]\,y}{\cos \varphi_1}\right)^3 \frac{1}{3\,\varrho^2} \sin^2 \varphi_1$$

oder:

$$\lambda = \frac{[2]\,y}{\cos \varphi} + \left(\frac{[2]\,y}{\cos \varphi}\right)^3 \frac{1}{6\,\varrho^2} \sin^2 \varphi$$

$$\gamma = [2]\,y \operatorname{tang} \varphi_1 - \frac{([2]\,y)^3}{6\,\varrho^2} t_1 (1 + 2\,t_1^2)$$

oder:

$$\gamma = [2]\,y \operatorname{tang} \varphi + \frac{([2]\,y)^3}{6\,\varrho^3} t\,(2 + t^2)$$

$\log [1]$	$8.509\,9477{\cdot}2$
$\log x$	$4.451\,9152{\cdot}3_n$
$\log [1]\,x$	$2.961\,8629{\cdot}5_n$

$[1]\,x = -915{,}9314''$

$\log ([2]\,y)^2$	$5.751\,402$
$\log \operatorname{tang} \varphi_1$	$0.113\,001$
$\log V^2$	$0.001\,086$
$-(1:2\,\varrho)$	$4.384\,545_n$
$\log (a)$	$0.250\,034_n$

$(a) = -1{,}7784''$

Celle $\varphi_0 =$	$52° \, 37' \, 32{,}6709''$
$+[1]\,x = -$	$0° \, 15' \, 15{,}9314$
$\varphi_1 =$	$52° \, 22' \, 16{,}7395''$
$(a) = -$	$1{,}7784$
$\varphi =$	$52° \, 22' \, 14{,}9611''$

Ägidius (Hannover).

$\log [2]$	$8.508\,8706{\cdot}9$
$\log y$	$4.366\,8302{\cdot}2_n$
$\log [2]\,y$	$2.875\,7009{\cdot}1_n$
$\log \cos \varphi_1$	$9.785\,7153{\cdot}5$
$\log (b)$	$3.089\,9855{\cdot}6_n$

$(b) = -1230{,}2278''$

$(b)^3$	9.2700_n	$(b')^3$	9.2699_n
$\sin^2 \varphi_1$	9.7974	$\sin^2 \varphi$	9.7974
$-(1:3\,\varrho^2)$	8.8940_n	$(1:6\,\varrho^2)$	8.5930
(c)	7.9614	$+(c')$	7.6603_n
	$+0{,}0091''$		$-0{,}0046''$

$\log [2]\,y$	$2.875\,7009{\cdot}1_n$
$\log \cos \varphi$	$9.785\,7202{\cdot}1$
$\log (b')$	$3.089\,9807{\cdot}0_n$

$(b') = -1230{,}2141''$

$(b) - (c)$	$(b') + (c')$
$-1230{,}2278''$	$-1230{,}2141''$
$+\quad 0{,}0091$	$-\quad 0{,}0046$
$-1230{,}2187''$	$-1230{,}2187''$

	$\lambda =$	$-0° \, 20' \, 30{,}2187''$
Celle	$L_0 =$	$27° \, 44' \, 54{,}8477$
Ägidius	$L =$	$27° \, 24' \, 24{,}6290''$

$\log [2]\,y$	$2.875\,7009{\cdot}1_n$
$\log \operatorname{tang} \varphi_1$	$0.113\,0011{\cdot}1$
$\log (c)$	$2.988\,7020{\cdot}2_n$

$(c) = -974{,}3209''$

Hilfstafel Seite [49]

$([2]\,y)^3$	8.6271_n	$([2]\,y)^3$	8.6271_n
t_1	0.1130	t	0.1130
$(1+2\,t^2)$	0.6399	$(2+t^2)$	0.5661
$-(1:6\,\varrho^2)$	8.5930_n	$(1:6\,\varrho^2)$	8.5930
(d)	7.9730	$+(d')$	7.8992_n
	$+0{,}0094''$		$-0{,}0079''$

$\log [2]\,y$	$2.875\,7009{\cdot}1_n$
$\log \operatorname{tang} \varphi$	$0.112\,9933{\cdot}7$
(c')	$2.988\,6942{\cdot}8_n$

$(c') = -974{,}3035''$

$(c) - (d)$	$(c') + (d')$
$-974{,}3209''$	$-974{,}3035''$
$+\quad 0{,}0094$	$-\quad 0{,}0079$
$-974{,}3115$	$-974{,}3114$

Meridian-Convergenz
$\gamma = -16' \, 14{,}311''$.

Rechtwinklige Coordinaten x, y aus geographischen Coordinaten φ, λ.

Coordinaten-Nullpunkt Celle $\varphi_0 = 52°\ 37'\ 32{,}6709''$ $\quad L_0 = 27°\ 44'\ 54{,}8477''$

Gegeben Ägidius $\varphi = 52°\ 22'\ 14{,}9611''$ $\quad L = 27°\ 24'\ 24{,}6290''$

Differenzen $\varphi - \varphi_0 = -\ 15'\ 17{,}7098''$ $\quad \lambda = -0°\ 20'\ 30{,}2187''$

$\lambda = -\ 1230{,}2187''$

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{V^2}{2\varrho} \lambda^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{[1]} = x$$

Anhang Seite [21] giebt . . .

$\log \lambda$	3.089 9823·2
$\log \lambda^2$	6.179 965
$\log \sin\varphi$	9.898 714
$\log \cos\varphi$	9.785 720
$\log V^2$	0.001 086
$\log (1:2\varrho)$	4.384 545
$\log (a)$	0.250 030

$(a) = 1{,}7784''$

$\varphi = 52°\ 22'\ 14{,}9611''$

$+ (a) \quad + 1{,}7784$

$\varphi_1 = 52°\ 22'\ 16{,}7395''$

Celle $\varphi_0 = 52°\ 37'\ 32{,}6709''$

$\varphi_1 - \varphi_0 = -\ 15'\ 15{,}9314''$

$= -\ 915{,}9314$

$$\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2} = 52°\ 29'\ 54{,}7052''$$

Mit φ_1 giebt die Hilfstafel Seite [33] des Anhangs:

$\log [2] = 8.508\ 8706{\cdot}9$

und mit φ_m giebt dieselbe Hilfstafel Seite [33]:

$\log [1]$	8.509 9477·2
hiezu $\log (\varphi_1 - \varphi_0)$	2.961 8629·5
$\log x$	4.451 9152·3

$x = -\ 28308{,}394^m$

$$y = \frac{\lambda}{[2]} \cos\varphi_1 + \frac{\lambda^3}{[2]} \frac{1}{3\varrho^2} \cos\varphi_1 \sin^2\varphi_1 \quad \text{oder} \quad y = \frac{\lambda}{[2]} \cos\varphi - \frac{\lambda^3}{[2]} \frac{1}{6\varrho^2} \cos\varphi \sin^2\varphi$$

$1:[2]$	1.491 1293·1	(b)	4.3668$_n$
λ	3.089 9823·2$_n$	λ^2	6.1800
$\cos\varphi_1$	9.785 7153·5	$\sin^2\varphi_1$	9.7974
(b)	4.366 8269·8$_n$	$(1:3\varrho^2)$	8·8940
		(c)	9.2382$_n$

$1:[2]$	1.491 1293·1	(b')	4.3668$_n$
λ	3.089 9823·2$_n$	λ	6.1800
$\cos\varphi$	9.785 7202·1	$\sin^2\varphi$	9.7974
(b')	4.366 8318·4$_n$	$-(1:6\varrho^2)$	8.5930$_n$
		(c')	8.9372

$(b) = -\ 23\ 271{,}639$

$(c) = \quad -\ 0{,}173$

$y = -\ 23\ 271{,}812$

$(b') = -\ 23\ 271{,}900$

$(c') = \quad +\ 0{,}087$

$y = -\ 23\ 271{,}813$

$$\gamma = \lambda \sin\varphi_1 - \frac{\lambda^3}{6\varrho^2} \sin\varphi_1 \cos^2\varphi_1 \quad \text{oder} \quad \gamma = \lambda \sin\varphi + \frac{\lambda^3}{3\varrho^2} \sin\varphi \cos^2\varphi$$

λ	3.089 9823·2$_n$	$\lambda \sin\varphi_1$	2.9887$_n$
$\sin\varphi_1$	9.898 7164·6	λ^2	6.1800
$\lambda \sin\varphi_1$	2.988 6987·8$_n$	$\cos^2\varphi_1$	9.5714
		$-(1:6\varrho^2)$	8.5930$_n$
		(d)	7.3331

λ	3.089 9823·2$_n$	$\sin\lambda\varphi$	2.9887$_n$
$\sin\varphi$	9.898 7135·7	λ^2	6.1800
$\lambda \sin\varphi$	2.988 6958·9$_n$	$\cos^2\varphi$	9.5714
		$(1:3\varrho^2)$	8.8940
		(d')	7.6341$_n$

$\lambda \sin\varphi_1 = -\ 974{,}3136''$

$(d) = \quad +\ 0{,}0022''$

$\gamma = -\ 974{,}3114''$ $\qquad \gamma = -\ 16'\ 14{,}3114''$

$\lambda \sin\varphi = -\ 974{,}3072''$

$(d') = \quad -\ 0{,}0043''$

$\gamma = -\ 974{,}3115''$

Schluss-Ergebnis: Ägidius $y = -\ 23\ 271{,}813^m$ $\quad x = -\ 28\ 308{,}394^m$

Meridian-Konvergenz $\gamma = -\ 16'\ 14{,}311''$.

In Fig. 2. S. 307 sind die Bezeichnungen dieses Formulars eingeschrieben, es ist nämlich:

φ_0 die Breite des Coordinaten-Ursprungs,
$\varphi_{\prime}$ die Breite des Ordinaten-Fusspunktes,
φ die Breite des gesuchten Punktes,
λ_0 die Länge des Coordinaten-Ursprungs,
λ die Länge des gesuchten Punktes,
x und y die gesuchten Coordinaten.

Dabei ist x von φ_0 bis $\varphi_{\prime}$ auf dem Meridian nördlich positiv, südlich negativ gezählt und y rechtwinklig zum Meridian östlich positiv, westlich negativ gezählt.

Die Aufgabe lautet: Aus gegebenen φ_0, φ, λ_0, λ die Coordinaten x, y zu berechnen.

Die Differenz $\lambda - \lambda_0$ wird in Sekunden verwandelt, mit η'' bezeichnet, und weiter kommt die Breiten-Differenz $\varphi_{\prime} - \varphi = \psi''$ in Betracht, welche aus η'' berechnet wird nach der Formel

$$\psi'' = \eta''^2 q \tag{25}$$

Dieses entspricht unserer Formel (17) S. 305 für $\varphi_1 - \varphi$, d. h.:

$$\varphi_1 - \varphi = \lambda^2 \frac{V^2}{2\varrho} \sin\varphi \cos\varphi \tag{26}$$

Daraus ergiebt sich, dass der Faktor q in der Formel (25), umgesetzt in unsere Bezeichnungen der Formel (26), diese Bedeutung hat:

$$q = \frac{V^2}{2\varrho} \sin\varphi \cos\varphi \tag{27}$$

Bei dieser Gelegenheit bemerken wir, dass das hier gebrauchte $\frac{V^2}{2\varrho}$ auch in den Formeln und Tafeln der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme vorkommt mit der Bezeichnung (3), wie wir in § 39. S. 228 schon angegeben haben. In einem Formular kann man den konstanten Logarithmus $\log(1 : 2\varrho) = 4.384\,545$ gedruckt aufnehmen, so dass also eine Tafel für $\log V^2$, welche man zu sehr vielen anderen Zwecken ohnehin braucht, genügt; auch $\log\sin\varphi$ und $\log\cos\varphi$ nehmen wir lieber besonders, als vereinigt in der Tafel für $\log q$, weil es hier angezeigt ist, mindestens 6 stellig scharf zu rechnen.

Nachdem man in dem genannten Formular 6. ψ'' zu φ addiert, und damit $\varphi_{\prime}$ erhalten hat, kann man aus der Differenz $\varphi_{\prime} - \varphi_0$ die Abscisse x berechnen. Das Formular bedient sich hiezu der schon oben (S. 306) von uns citierten und beschriebenen Hilfstafel von F. G. Gauss, wobei aber zu bemerken ist, dass die Interpolation eine Rechnung mit 7 stelligen Logarithmen verlangt. Auch unsere Rechnung auf S. 309 mit der Mittelbreite φ_m ist hier noch nicht die beste; auf ein bequemeres Rechnungsverfahren, nach der Formel (37) § 35. S. 218 werden wir später zurückkommen; auch ist hier die neue Tafel Seite [55]—[57] zuzuziehen.

Um vollends die Ordinate y zu erhalten, rechnet jenes Formular 6. mit Längen-Sekunden L und mit Additamenten, wodurch in anderer Form dasselbe erhalten wird, wie durch die Reihen-Entwicklung (19) S. 305.

Wenn man unser Beispiel Ägidius von S. 309 nach dem fraglichen Formular 6. behandelt, so bekommt man in dem Teile für y:

$\varphi_{\prime} = 52^\circ\, 22'\, 16{,}7395''$ $\quad \eta = 0^\circ\, 20'\, 30{,}2187''$

			log
$\log \eta'' = \log 1230{,}2187''$	3.089 9823	43,2605	1.6361
Addit.-Tafel für 3.089 $+ 2\,\Delta\,\eta''$	51	$\Delta\,1''$	1.4354
Tafel der $\log L$ für $\varphi = 52^\circ\, 23'$ $\log L_1$	1.276 7268		
Interpolation für $-43{,}2605''$, $\Delta \log L$	1179		3.0815
$\log tang\,(y:r)$	4.366 8321		
Addit.-Tafel für 4.367 $- 2\,\Delta_y$	-19		
$\log y$	4.366 8302		

$y = 23271{,}81^{m}$

Diesem entspricht bei unserer Rechnung S. 309:

Hilfstafel Seite [33] für $52^\circ\, 22'\, 15''$, $\log\,[2]$	8.508 8707·0	(b')	4.3668
$\log\,(1:[2])$	1.491 1293·0	λ^2	6.1800
$\lambda = 0^\circ\, 20'\, 30{,}2187'' = 1230{,}2187$, $\log \lambda$	3.089 9823·2	$\sin^2 \varphi$	9.7974
$\varphi = 52^\circ\, 22'\, 14{,}9611''$ $\quad \log \cos \varphi$	9.785 7202·1	$-(1:6\,\varrho^2)$	8.5930_n
(oder Formel (13) S. 301 $\quad \log\,(b')$	4.366 8318·3	$\log\,(c')$	8.9372_n
mit $\cos 52^\circ\, 22'\, 15{,}5539''$) $\quad (b') =$	23271,900	$(c') =$	$-0{,}087$

$y = 23271{,}813^{m}$

Es mag unentschieden bleiben, welche der verschiedenen Rechnungen die bessere ist, wir haben aber die Vergleichung hier hergesetzt, weil die Landmesser oft den Wunsch haben, ausser der ihnen durch amtliches Formular vorgeschriebenen Rechnung eine unabhängige Kontrollrechnung nebenher zu haben.

Bemerkung über die geographischen Längen und Breiten.

Die geographischen Längenunterschiede λ werden teils in Bogenmass teils in Zeitmass angegeben, zu deren gegenseitiger Verwandlung unsere Hilfstafel auf Seite [42] des Anhangs benützt werden kann.

Als Beispiel wollen wir im System der Preussischen Landesaufnahme nehmen:

Berlin, Rauenberg	$\lambda_0 = 31^\circ\, 2'\, 4{,}9280'' =$	$2^h\, 4^m\, 8{,}328533^s$
Celle	$\lambda = 27^\circ\, 44'\, 54{,}8477'' =$	$1^h\, 50^m\, 59{,}656514^s$
Differenz	$\lambda_0 - \lambda = 3^\circ\, 17'\, 10{,}0808'' =$	$0^h\, 13^m\, 8{,}672019^s$

Bei der Benützung der Hilfstafel Seite [42] kann man beliebig viele Dezimalen schreiben, obgleich nur $0{,}0001^s$ angegeben ist. Z. B. für vorstehendes $\lambda_0 - \lambda$ hat man:

3°	$0^h\, 12^m\, 0^s$	$0^h\, 13^m =$	$3^\circ\, 15'\, 0''$
$17' =$	$1^m\, 8^s$	$8^s =$	$2'\, 0''$
$10'' =$	$0{,}666\,667^s$	$0{,}6^s =$	$9{,}0''$
$0{,}08'' =$	$0{,}005\,333^s$	$0{,}07^s =$	$1{,}05''$
$0{,}0008'' =$	$0{,}000\,020^s$	$0{,}002^s =$	$0{,}030''$
Summe	$0^h\, 13^m\, 8{,}672\,020^s$	$0{,}00002^s =$	$0{,}00030''$
		Summe	$3^\circ\, 17'\, 10{,}08030''$

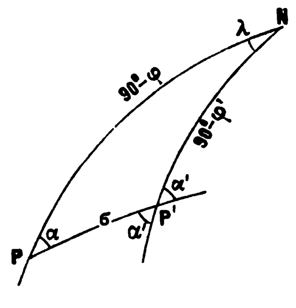
Was die Zahlenschärfe solcher Angaben, ebenso wie auch für geographische Breiten, betrifft, so kommt die etwaige astronomische Messung dabei für uns nicht in Betracht (vgl. § 26. S. 162 bis 163). In geodätischer Beziehung gelten Längen und Breiten nur als Mass-Bestimmungen auf der Oberfläche des Ellipsoids; und da z. B. 1″ in Breite rund = 30 Meter ist, so bringt 0,001″ immer noch $0{,}03^m$ oder 3 Centimeter, und man muss daher geographische Coordinaten auf 0,0001″ oder gar auf 0,00001″ genau angeben, wenn man die Genauigkeit geodätischer Messungen, mit der immer formell etwas übertrieben nötigen Schärfe, durch geographische Längen und Breiten ausdrücken will.

§ 56. Entfernung und Azimute aus geographischen Coordinaten.

Die Einführung des verkürzten Breiten-Unterschiedes nach § 54. S. 302 genügt bereits, um auf mässige Ausdehnung von Dreiecken III. Ordnung mit geographischen Coordinaten Entfernungen und Azimute zu berechnen.

Indem wir zunächst die Aufgabe rein sphärisch betrachten, haben wir im Anschluss an Fig. 1. folgendes:

Fig. 1.
Sphärisches Polardreieck.



Wenn zwei Punkte P und P' durch ihre geographischen Breiten φ und φ' nebst ihrem geographischen Längen-Unterschied λ gegeben sind, so wird dadurch ein sphärisches Dreieck NPP' bestimmt, dessen Seite $NP = 90° - \varphi$, dessen Seite $NP' = 90° - \varphi'$ und dessen Winkel bei $N = \lambda$ ist.

Man kennt also von dem Dreieck zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, und daher ist auch die dritte Seite σ und die beiden anderen Dreiecks-Winkel α und $180° - \alpha'$ bestimmt, d. h. man kann dann die Entfernung beider Punkte $PP' = \sigma$ und die beiden Azimute in P und in P', bezw. $= \alpha$ und $= \alpha'$ berechnen.

Wenn man die Gaussschen (bzw. Neperschen) Gleichungen von § 27. S. 165 auf unseren Fall anwendet, so bekommt man:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\alpha'+\alpha}{2} &= \cos\frac{\varphi'+\varphi}{2}\sin\frac{\lambda}{2}\\
\sin\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\alpha'+\alpha}{2} &= \sin\frac{\varphi'+\varphi}{2}\cos\frac{\lambda}{2}\\
\cos\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2} &= \sin\frac{\varphi'+\varphi}{2}\sin\frac{\lambda}{2}\\
\cos\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2} &= \cos\frac{\varphi'-\varphi}{2}\cos\frac{\lambda}{2}
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Wir wollen die Mittelwerte besonders bezeichnen:

$$\frac{\varphi'+\varphi}{2} = \varphi_0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\alpha'+\alpha}{2} = \alpha_0 \tag{2}$$

Wenn σ und λ klein sind, so werden auch $\varphi' - \varphi$ und $\alpha' - \alpha$ klein und dann hat man genähert aus (1):

$$\left.\begin{aligned}
\sigma \sin\alpha_0 &= \cos\varphi_0\,\lambda\\
\sigma \cos\alpha_0 &= \varphi' - \varphi
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\alpha' - \alpha = \sin\varphi_0\,\lambda \tag{3}$$

Die beiden ersten Gleichungen (2) geben:

$$\tang\alpha_0 = \frac{\lambda\cos\varphi_0}{\varphi'-\varphi} \tag{4}$$

$$\sigma = \frac{\lambda\cos\varphi_0}{\sin\alpha_0} = \frac{\varphi'-\varphi}{\cos\alpha_0} \qquad \text{oder} \qquad = \sqrt{(\varphi'-\varphi)^2 + (\lambda\cos\varphi_0)^2} \tag{5}$$

Diese sphärischen Formeln kann man auf das Ellipsoid übertragen, wenn man nur überall nach (9) § 54. S. 303 den verkürzten Breiten-Unterschied $\frac{\varphi'-\varphi}{V^2} = (\varphi'-\varphi)\frac{M}{N}$

an Stelle des sphärischen Breiten-Unterschiedes setzt, und im übrigen den Quer-Krümmungs-Halbmesser N der Mittelbreite $\frac{\varphi + \varphi'}{2}$ als Kugelhalbmesser r zu Grunde legt.

Die Aufgabe sei mit Bezugnahme auf Fig. 2. so gefasst:

Gegeben sind zwei Punkte auf dem Ellipsoid, mit den Breiten φ und φ' und mit dem Längen-Unterschied λ; es soll die Entfernung beider Punkte $= s$, linear auf dem Ellipsoid, und die beiden Azimute α und α' berechnet werden.

Fig. 2.

Die Gleichungen (3), (4) und (5) geben:

$$\alpha' - \alpha = \lambda \sin \varphi_0 = \lambda \sin \frac{\varphi + \varphi'}{2} \tag{6}$$

$$tang\, \alpha_0 = tang \frac{\alpha' + \alpha}{2} = \frac{\lambda \cos \varphi_0}{(\varphi' - \varphi)\frac{M}{N}}$$

$$\sigma = \frac{s}{N} = \frac{\lambda \cos \varphi_0}{\sin \alpha_0} = \frac{(\varphi' - \varphi)\frac{M}{N}}{\cos \alpha_0}$$

oder

$$\sigma = \frac{s}{N} = \sqrt{\left((\varphi' - \varphi)\frac{M}{N}\right)^2 + (\lambda \cos \varphi_0)^2}$$

Wir wollen diese Formeln etwas umstellen, und auch die nötigen ϱ zusetzen, wodurch wir erhalten:

$$tang\, \alpha_0 = \frac{N \lambda \cos \varphi_0}{M(\varphi' - \varphi)} = V^2 \frac{\lambda \cos \varphi_0}{\varphi' - \varphi} \tag{7}$$

$$s = \frac{\frac{N}{\varrho} \lambda \cos \varphi_0}{\sin \alpha_0} = \frac{\frac{M}{\varrho}(\varphi' - \varphi)}{\cos \alpha_0} \tag{8}$$

oder

$$s = \sqrt{\left(\frac{N}{\varrho} \lambda \cos \varphi_0\right)^2 + \left(\frac{M}{\varrho}(\varphi' - \varphi)\right)^2} \tag{9}$$

Oder endlich wenn man $\frac{\varrho}{M} = [1]$ und $\frac{\varrho}{N} = [2]$ setzt, wie in unseren Hilfstafeln angenommen ist, (vgl. § 40. S. 230) kann man die Formeln auch so schreiben:

$$tang\, \alpha_0 = tang \frac{\alpha' + \alpha}{2} = \frac{\frac{\lambda}{[2]} \cos \varphi_0}{\frac{\varphi' - \varphi}{[1]}} \tag{10}$$

$$s = \frac{\frac{\lambda}{[2]} \cos \varphi_0}{\sin \alpha_0} = \frac{\frac{\varphi' - \varphi}{[1]}}{\cos \alpha_0} \tag{11}$$

oder

$$s = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{[2]} \cos \varphi_0\right)^2 + \left(\frac{\varphi' - \varphi}{[1]}\right)^2} \tag{12}$$

Zu einem Zahlen-Beispiel nehmen wir die zwei trigonometrischen Hauptpunkte der Stadt Hannover, welche nach Mitteilung der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme von 1887 folgende geographische Coordinaten haben:

$$\begin{array}{llll} \text{Ägidius} \ . \ . \ . & \varphi' = 52^\circ\,22'\,14{,}9611'' & L' = 27^\circ\,24'\,24{,}6290'' & \\ \text{Wasserturm} \ . & \varphi = 52^\circ\,21'\,49{,}9080'' & L = 27^\circ\,22'\,25{,}0168'' & \end{array} \Bigg\} \quad (13)$$

$$\begin{array}{lll} \text{Differenzen } \varphi' - \varphi & = +0^\circ\,0'\,25{,}0531'' & \lambda = \ 0^\circ\ 1'\,59{,}6122'' \\ & = \qquad 25{,}0531'' & \ = \qquad 119{,}6122'' \\ \text{Mittel } \varphi_0 & = 52^\circ\,22'\ 2{,}43455'' & \end{array}$$

Mit dieser Mittelbreite geht man in die Hilfstafel des Anhangs Seite [22] ein, und entnimmt durch leichte Interpolation:

$$log\,[1] = 8.509\,9574 \qquad log\,[2] = 8.508\,8708$$

und die weitere Rechnung nach den Formeln (6) und (10)—(12) giebt:

$$\alpha_0 = \frac{\alpha' + \alpha}{2} = 71^\circ\,6'\,37{,}69''$$

$$\frac{\alpha' - \alpha}{2} = \ 0^\circ\,0'\,47{,}36''$$

$$\begin{array}{ll} \alpha' = 71^\circ\,7'\,25{,}05'' & log\ s = 3.378\,7016 \\ \alpha\ = 71^\circ\,5'\,50{,}33'' & s = 2391{,}672^m \end{array} \Bigg\} \quad (14)$$

Azimute und Richtungswinkel.

Während die verschiedenen Coordinaten φ, λ und x, y in ihrer Bedeutung für die Kartenzeichnung sofort verständlich sind, bedürfen oft die Begriffe von Azimut und Richtungswinkel und ihrer Differenz-Meridiankonvergenz, noch anderer Klarlegung, wozu unser mehrfach benütztes Beispiel Wasserturm-Ägidius, das in Fig. 3. S. 315 dargestellt ist, dienen soll.

In Fig. 3. ist Celle, (Stadtkirche, Helmstange) nordöstlich von Hannover, der Nullpunkt, auf welchen sich die rechtwinkligen Coordinaten von W und A beziehen; es sind also die Geraden $A\,A'$ und $W\,W'$ Parallelen zu dem Meridian von Celle, folglich $W'\,W\,A = a$ und $W\,A\,A'' = a'$ die Richtungswinkel (Preuss. Katasterbezeichnung „Neigungen") der Geraden WA in W und A.

Das sind dieselben Winkel, welche in Fig. 2. S. 259 mit α und α' bezeichnet waren, während wir jetzt, mit Änderung der Buchstaben-Bezeichnungen, die Richtungswinkel mit a, dagegen die Azimute mit α bezeichnen, so dass die Meridian-Konvergenzen in W und A diese sind:

$$-\gamma = \alpha - a \quad , \quad -\gamma' = \alpha' - a' \qquad (15)$$

Wir bemerken, dass hier γ und γ' negativ sind, weil in unserem Falle Fig. 3. die Ordinaten y negativ sind, und γ stets das Vorzeichen von y hat.

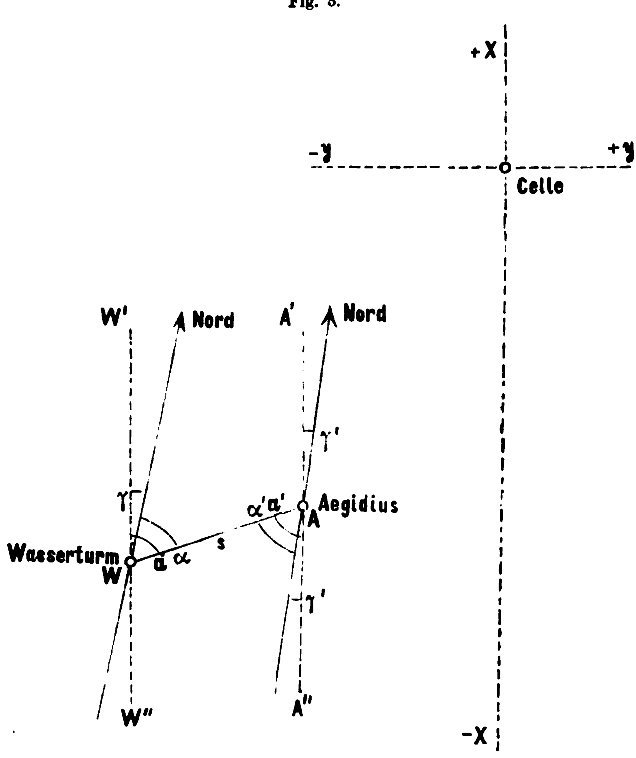
Der Gang unserer Berechnungen ist dieser:

Punkt	Geogr. Breite	Geogr. Länge	
Celle, Stadtkirche . . .	52° 37′ 32,6709″	27° 44′ 54,8477″	
Ägidius (Hannover) . . .	52° 22′ 14,9611″	27° 24′ 24,6290″	(16)
Wasserturm (Linden) . .	52° 21′ 49,9080″	27° 22′ 25,0168″	

Wie man hieraus, unter Annahme des Punktes Celle als Coordinaten-Nullpunkt, die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes Ägidius berechnet, haben wir auf S. 309 ausführlichst gezeigt, und da man für den zweiten Punkt Wasserturm dieselbe Berechnung machen kann, ist nachgewiesen, auf welche Weise man zu den rechtwinkligen Coordinaten von Ägidius und Wasserturm gelangt, nämlich:



Fig. 3.



Ägidius . .	$y' = -23\,271{,}813^m$	$x' = -28\,308{,}894^m$	
Wasserturm	$y = -25\,538{,}489^m$	$x = -29\,071{,}472^m$	(17)
Differenzen	$y' - y = +\ 2\,266{,}676$	$x' - x = +\ 763{,}078$	

Dadurch ist die Linie Wasserturm-Ägidius nach Entfernung und Richtung festgelegt im ebenen rechtwinkligen (Soldnerschen) Coordinatensystem:

$$\log WA = 3.378\,7020 \qquad WA = s = 23\,91{,}674^m \tag{18}$$

$$a = (WA) = 71^\circ\,23'\,39{,}0'' \qquad a' = (AW) \pm 180^\circ = 251^\circ\,23'\,39{,}0'' \tag{19}$$

Andererseits haben wir oben bei (14) gefunden:

$$s = 2391{,}672^m \qquad \alpha = 71^\circ\,5'\,50{,}3'' \qquad \alpha' = 71^\circ\,7'\,25{,}0'' \tag{20}$$

Die Vergleichung von (19) und (20) giebt:

$$a - \alpha = 17'\,48{,}7'' \qquad a' - \alpha' = 16'\,14{,}0'' \tag{21}$$

Dieses muss stimmen mit der Berechnung von γ auf S. 309 für Ägidius und mit der entsprechenden Berechnung für Wasserturm, nämlich:

$$\gamma = -17'\,48{,}9'' \qquad \gamma' = -16'\,14{,}3'' \tag{22}$$

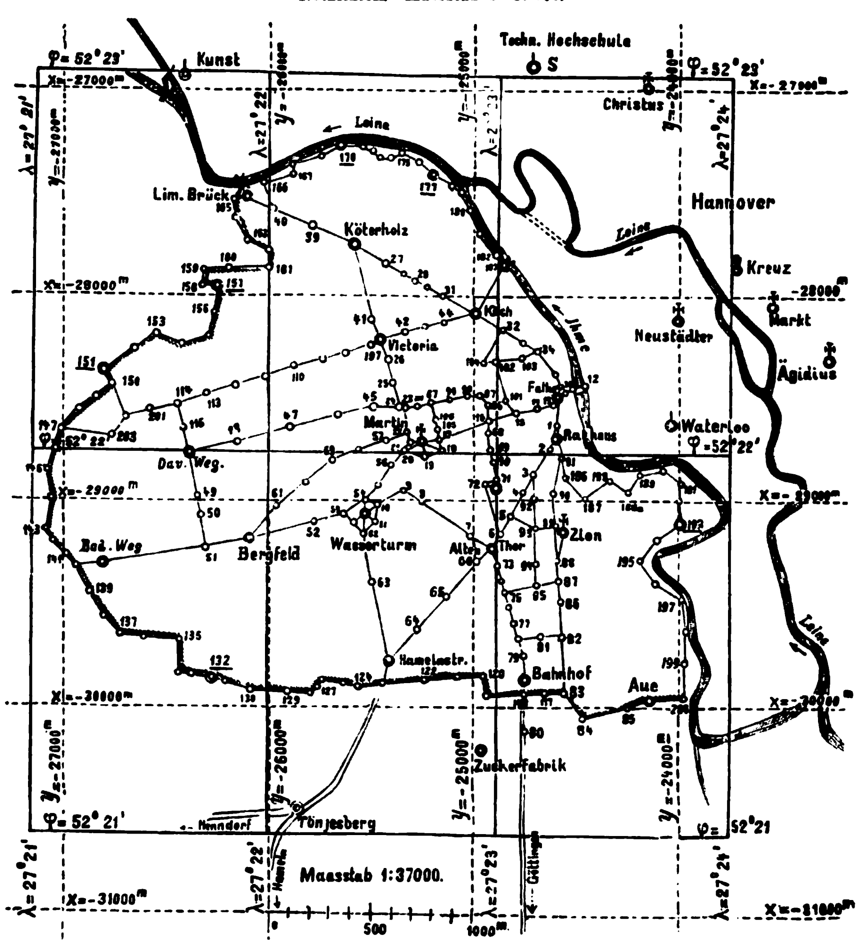
Dass hier zwischen (20) und (22) noch kleine Differenzen bis zu 0,3″ vorkommen, hängt damit zusammen, dass schon die Rechnung von S. 309 nicht unbedingt auf 1^{mm} sicher ist, weshalb auch (18) und (20) um 2^{mm} differieren.

Wenn man bedenkt, dass bei solchen Verhältnissen die letzten Stellen 0,001^m und 0,1″ gar keinen inneren Sinn mehr haben, sondern nur als überschüssige Kontrollstellen für die vorhergehenden 0,01^m und 1″ mitgeführt werden, so wird man sagen: die Proben (18) und (20), sowie (21) und (22) stimmen innerhalb der beabsichtigten Rechenschärfe.

§ 57. Karten mit geographischen Netzlinien.

Wenn der Plan einer Stadt oder einer Feldmark in rechtwinkligen sphärischen Coordinaten bearbeitet ist, was gewöhnlich in grossem Masstab geschieht, so dass viele Einzelblätter entstehen, so kann man daraus auch Übersichtskarten und topo-

Fig. 1.
Stadt und Feldmark Linden bei Hannover mit Coordinaten-Netzlinien und mit geographischen Netzlinien. Massstab 1 : 37 000.



graphische Karten kleinen Massstabes herstellen, in welchen immer wieder das quadratische Netz der rechtwinkligen Coordinaten den festen Rahmen für die Zeichnung und Vervielfältigung bietet.

Bei topographischen Karten in 1 : 25 000 und wohl auch schon bei Stadt-Übersichtskarten in 1 : 5 000 bis 1 : 10 000 verlangt man aber wegen des Anschlusses an die allgemeine Landes-Topographie, und zur allgemeinen geographischen Orientierung, die Einzeichnung von Meridianen und Parallelkreisen für runde Werte der geographischen Längen und der geographischen Breiten, oder kurz, die Einzeichnung von geographischen Netzlinien, welche die Karte in geographische Trapeze einteilen.

Die Bestimmungsstücke hiefür bekommt man durch die Formeln, welche wir in § 55. entwickelt und durch die Rechenschemate S. 308 und S. 309 erläutert haben. Insbesondere das zweite Schema S. 309 wird hier gebraucht, indem man für gegebene runde Werte der Längen und Breiten L und φ die zugehörigen rechtwinkligen Coordinaten y und x berechnet, und darnach die Trapez-Ecken in das rechtwinklige Coordinaten-System einträgt.

Als Beispiel hiefür nehmen wir die Karte der Stadt und Gemarkung Linden bei Hannover, deren Aufnahme wir in den Jahren 1887—1889 gemacht haben (vgl. hiezu II. Band, 4. Aufl. 1893, S. 353).

Die rechtwinkligen Coordinaten beziehen sich auf das Preussische Katastersystem 27. Celle.

Die Gemarkung liegt etwa zwischen den geographischen Längen 27° 21′ und 27° 24′ und zwischen den geographischen Breiten 52° 21′ und 52° 23′, sie umfasst also 6 Minuten-Abteilungen; und wir haben für die 12 Ecken des entsprechenden Minuten-Netzes die rechtwinkligen Coordinaten y und x nach dem Schema von S. 309 berechnet, wie in folgender Übersicht angegeben ist.

	$\lambda = 27°\ 21'$	$\lambda = 27°\ 22'$	$\lambda = 27°\ 23'$	$\lambda = 27°\ 24'$
$\varphi = 52°\ 23'$	$y = -27\,135{,}04^m$ $x = -26\,896{,}63^m$	$y = -26\,000{,}36^m$ $x = -26\,902{,}74^m$	$y = -24\,865{,}68^m$ $x = -26\,908{,}61^m$	$y = -23\,731{,}00^m$ $x = -26\,914{,}22^m$
$\varphi = 52°\ 22'$	$y = -27\,145{,}25^m$ $x = -28\,750{,}98^m$	$y = -26\,010{,}14^m$ $x = -28\,757{,}09^m$	$y = -24\,875{,}04^m$ $x = -28\,762{,}96^m$	$y = -23\,739{,}94^m$ $x = -28\,768{,}56^m$
$\varphi = 52°\ 21'$	$y = -27\,155{,}47^m$ $x = -30\,605{,}30^m$	$y = -26\,019{,}93^m$ $x = -30\,611{,}45^m$	$y = -24\,884{,}40^m$ $x = -30\,617{,}32^m$	$y = -23\,748{,}87^m$ $x = -30\,622{,}90^m$

Man kann diese Coordinaten in ihren Differenzen durch die Meridianbögen und Parallelbögen der Tafeln auf Seite [38]—[41] unseres Anhanges kontrollieren, z. B. in dem Meridian von $\lambda = 27°\ 21'$ haben wir aus dem vorstehenden:

$$\begin{array}{lll} \varphi = 52°\ 23' & x = -26\,896{,}63^m & \\ & & \Delta x = 1854{,}35^m \\ \varphi = 52°\ 22' & x = -28\,750{,}98^m & \\ & & \Delta x = 1854{,}32^m \\ \varphi = 52°\ 21' & x = -30\,605{,}30^m & \end{array}$$

Nach der Tafel Seite [38] des Anhangs ist zwischen 52° 20′ und 52° 30′ der Meridianbogen = 18 543,748^m, also für 1 Minute $m = 1\,854{,}37^m$, was mit den vorstehenden Werten Δx insofern genügend stimmt, als für genauere Rechnung schärfere Interpolation in der Tafel Seite [38] nötig wäre, und eine kleine Abweichung zwischen m und Δx auch in der Soldnerschen Projektion begründet ist.



Um auch die Ordinaten-Differenzen zu kontrollieren, könnte man die Längen-Grade der Tafel Seite [36]—[37] oder Seite [41] des Anhangs benützen, wobei aber viel zu interpolieren wäre; sicherer geht man zu Wege durch die unmittelbare Berechnung von 1 Längenminute nach § 36. S. 220, nämlich:

$$l' = \frac{N \cos \varphi}{\varrho'} = \frac{60 \cos \varphi}{[2]}$$

wo $\log \varrho' = 3.536\,2739$ ist, und $\log N$ aus der Hilfstafel Seite [20] oder $\log [2]$ auf Seite [33] des Anhangs gefunden wird, z. B. für $\varphi = 52^\circ\, 23'$ findet man $\log N = 6.805\,5547$ oder sofort $\log [2] = 8.508\,8704$ und damit nach vorstehender Formel $l' = 1\,134{,}69^m$, während die Ordinaten auf dem Parallel von $\varphi = 52^\circ\, 23'$ nach der obigen Tabelle geben:

$$\begin{array}{lll} \lambda = 27^\circ\, 21' & y = -27\,135{,}04^m & \\ & & \Delta y = 1134{,}68^m \\ \lambda = 27^\circ\, 22' & y = -26\,000{,}36^m & \\ & & \Delta y = 1134{,}68^m \\ \lambda = 27^\circ\, 23' & y = -24\,865{,}68^m & \\ & & \Delta y = 1134{,}68^m \\ \lambda = 27^\circ\, 24' & y = -23\,731{,}00^m & \end{array}$$

Diese Δy stimmen hinreichend mit dem vorhin berechneten $l' = 1134{,}69^m$.

Als zweites Beispiel dieser Art nehmen wir das in Preussen eingeführte Gradnetz für topographische Karten.

Das Netz der Meridiane und Parallelkreise für eine topographische Karte kann man auf zweierlei Art herstellen, entweder unmittelbar durch Konstruktion der Trapeze aus den Meridianbögen und den Parallelbögen, oder durch Einrechnen der Trapez-Eckpunkte in ein rechtwinkliges Coordinatensystem, das man zu Katastervermessungen, Stadtvermessungen und dergl. ohnehin hat.

Wir wollen dieses an dem Beispiele der zwei Messtischblätter der topographischen Abteilung der Landesaufnahme zeigen, auf welche die Stadt- und Feldmark von Hannover mit Linden fällt, wie in Fig. 2. S. 319 gezeichnet ist.

Die zwei Trapeze $ABCD$ und $CDEF$ liegen zwischen den Breiten $52^\circ\, 30'$, $52^\circ\, 24'$, $52^\circ\, 18'$ und zwischen den Längen $27^\circ\, 20'$ und $27^\circ\, 30'$ und haben Seitenlängen, welche in Tabellen verfügbar sind, auf Seite [41] des Anhangs, woraus wir entnehmen:

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi = 52^\circ\, 30' \; AB = 11\,316{,}99^m & \\ 52^\circ\, 24' \; CD = 11\,342{,}65^m & AC = BD = 11\,126{,}31^m \\ 52^\circ\, 18' \; EF = 11\,368{,}27^m & CE = DF = 11\,126.12^m \end{array}\right\} \quad (1)$$

Dazu auch die Flächen:

$$ABCD = 126{,}0591^{qkm} \text{ und } CDEF = 126{,}3423^{qkm}$$

Wenn man etwa diese Masse nicht vorrätig hat, aber wenigstens die Krümmungs-Halbmesser M für den Meridian und N für den Querbogen, so kann man die Trapezseiten ebenfalls berechnen, z. B.:

$$AC = \frac{M}{\varrho}\, 6' = \frac{360}{[1]} \quad (2)$$

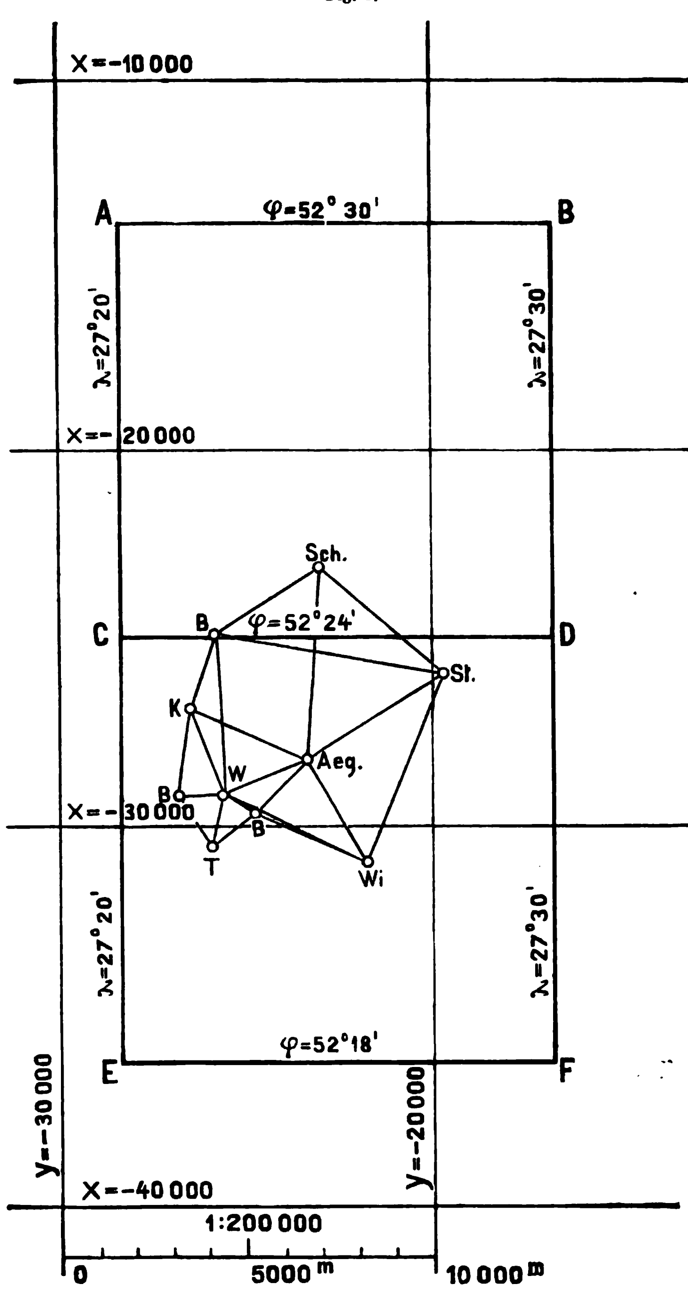
$$AB = \frac{N}{\varrho}\, 10' \cos \varphi = \frac{600}{[2]} \quad (3)$$

wobei M oder [1] zur Mittelbreite von A und C, und N oder [2] zu der Breite von A und B selbst gehört.

Die Linien AB, CD, EF sind streng genommen ein wenig gekrümmt zu zeichnen, doch macht das im Massstab 1 : 25 000 für die preussischen Messtischblätter



Fig. 2.



X=-10 000
A
φ=52° 30'
B
λ=27°20'
λ=27°30'
X=- 20 000
Sch.
B
φ=52°24'
C
D
St.
K
Aeg.
W
B
X=-30 000
B
T
Wi
λ=27°20'
λ=27°30'
φ=52°18'
E
F
y=-30000
y=-20000
X=-40 000
1:200 000
0
5000 m
10 000 m

so wenig aus, nämlich höchstens 0,1^{mm} als Querabweichung in der Mitte zwischen dem Bogen *A B* und der Sehne *A B*, dass es neben der Unsicherheit des Papiereinganges u. s. w. vernachlässigt werden kann. Wir werden dieses später behandeln.

Jedenfalls kann man mit den bei (1) angegebenen Trapezseiten die Trapeze scharf auftragen und dann versieht man noch die obere und untere Seite jedes Trapezes mit einer gleichförmigen Teilung von $10' = 600''$, ebenso die linke und rechte Seite mit einer Teilung von $6' = 360''$, worauf man jeden Punkt scharf in das Blatt eintragen kann, dessen geographische Coordinaten vorhanden sind.

So kann man z. B. die 6 Hauptpunkte von Hannover, welche in Fig. 2. eingezeichnet sind, eintragen nach den geographischen Coordinaten, welche wir früher mitgeteilt haben in „Handb. d. Verm." I. Band, 4. Aufl., 1895, S. 324.

Dieses ist das Verfahren der topographischen Abteilung der preussischen Landesaufnahme.

Ein zweites Verfahren bietet sich dar, wenn man über eine Aufnahme in rechtwinkligen Coordinaten verfügt, etwa in einem der 40 preussischen Katastersysteme, wie wir an dem Beispiele von Hannover zeigen wollen, unter Zugrundlegung des vorgeschriebenen Coordinatensystems mit dem Nullpunkt Celle.

Es handelt sich darum, die rechtwinkligen Coordinaten x, y zu berechnen für diejenigen Punkte $A, B \ldots$, welche als Eckpunkte der geographischen Trapeze auftreten.

Man kann sich dazu der Rechnung nach dem Schema von § 55. S. 309 bedienen. Wir haben etwas schärfer nach anderer Formel gerechnet, die erst später mitgeteilt werden kann. Jedenfalls muss auch die Rechnung nach dem Schema von S. 309 auf 1^{cm} genau Folgendes geben:

			y	x	
Eckpunkt	*A*	(N.W.)	— 28195,133^{m}	— 13909,649^{m}	(4)
„	*B*	(N.O.)	— 16878,268	— 13961,659	
„	*C*	(W.)	— 28259,063	— 25035,885	
„	*D*	(O.)	— 16916,537	— 25087,943	
„	*E*	(S.W.)	— 28322,905	— 36161,934	
„	*F*	(S.O.)	— 16954,754	— 36214,040	

Mit diesen rechtwinkligen Coordinaten trägt man die Trapez-Eckpunkte in das rechtwinklige Coordinatennetz ebenso ein wie alle anderen Punkte der Vermessung, und die Trapeze ergeben sich dann ganz von selbst, allerdings mit ganz kleinen Änderungen, welche von der Projektionsverzerrung herrühren. Folgendes ist die Berechnung der Trapezseiten aus den Coordinaten:

Seite	Δy	Δx	$\sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2}$	
A B	11316,865^{m}	52,010	11316,985^{m}	(5)
C D	11342,526	52,058	11342,645	
E F	11368,151	52,106	11368,270	
A C	63,930	11126,236	11126,420	
C E	63,842	11126,049	11126,232	
B D	38,269	11126,284	11126,350	
D F	38,217	11126,097	11126,163	

Dann ist die Vergleichung zwischen den wahren Seiten nach (1) und deren Projektionen in (5):



Trapezseite	wahr	Projektion	Differenz	
AB	11316,99^m	11136,99^m	0,0^m	
CD	11342,65	11142,65	0,0	
EF	11368,27	11368,27	0,0	
AC	11126,31	11126,42	+ 0,11	(6)
CE	11126,12	11126,23	+ 0,11	
BD	11126,31	11126,35	+ 0,04	
DF	11126,12	11126,16	+ 0,04	

Die Süd- und Nord-Seiten werden in der Projektion richtig dargestellt, wie es sein muss, dagegen die West- und Ost-Seiten sind in der Projektion zu gross um 0,11^m und um 0,04^m, was von der Projektionsverzerrung herrührt, nämlich:

$$\frac{y^2}{2r^2} AC \text{ oder } \frac{y^2}{2r^2} CE$$

Mit $y = 28200$ und $y = 16900$, und $\log r = 6.8040$ giebt dieses gerade die oben bei (6) erhaltenen Abweichungen 0,11^m und 0,04^m, womit alles rechnerisch sichergestellt ist.

Die Projektionsverzerrungen, welche nach (6) höchstens 1 : 100 000 betragen, sind in der topographischen Kartenzeichnung ganz unmerklich, es sind dieselben, welche auch in der viel feineren Katasterzeichnung schon vernachlässigt werden.

Wenn man den Trapezrahmen nach den rechtwinkligen Coordinaten (4) aufgetragen hat, bekommt man also innerhalb der äussersten Zeichenschärfe von 0,05^{mm} genau dasselbe wie bei der Behandlung mit den unmittelbaren Trapezseiten von (1), und im übrigen giebt sich auch die Vergleichung der beiden Verfahrungsarten aus dem bisherigen leicht:

I. Auftragen des Trapezes nach den Massen (1) giebt einen Rahmen für geographische Coordinaten.

II. Auftragen des Trapezes in dem Rahmen eines rechtwinkligen (Kataster-) Systemes giebt die Möglichkeit, alle Kataster- oder Stadtvermessungs-Coordinaten (z. B. die 114 Punkte in unserem I. Bande, „Handb. d. Verm. 4. Aufl. 1895“, S. 400 bis 401) unmittelbar auch in die topographische Karte zu übertragen, oder kurz alles Kataster- und Stadtvermessungs-Material in seinem eigenen Coordinatensystem auch für die Topographie lediglich durch geometrische Verkleinerung zu verwerten.

Ausser den 6 Eckpunkten von Fig. 2. haben wir auch noch drei andere Trapezecken nach Coordinaten berechnet, wie schon im I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 407 zu dem Netzbild S. 411 jenes Bandes angegeben wurde, nämlich, mit Wiederholung von NW:

		Katastersystem Celle		
L	φ	y	x	
$L = 27° 20'$	$\varphi = 52° 30'$	$y = -28195,13^m$	$x = -13909,65^m$	
27 40	52 30	$-$ 5561,31	$-$13987,55	(7)
27 20	52 12	$-$28386,66	$-$47287,79	
27 40	52 12	$-$ 5599,09	$-$47365,11	

Wenn man trigonometrische Kataster-Aufnahmen zur Topographie benützen will, so ist es das erste, die geographischen Netzlinien in solcher Weise einzurechnen, nicht bloss die eigentlichen Trapez-Ecken der topographischen Abteilung

der Landesaufnahme, sondern wie wir es bei Linden gethan haben, enger, etwa von Minute zu Minute.

Wenn die Flurkarten gar nicht mathematisch orientiert sind, (wie z. B. in einem grossen Teile der Provinz Hannover), ist es immer noch rationeller, durch einige rasch und rauh eingemessene und eingerechnete Rückwärtsschnitte zuvor das $x\,y$-System in die Flurkarten hinein zu interpolieren, und dann nach der vorher genannten Methode zu verfahren, als sich nur auf das empirische Zusammenstimmen nach Wegecken u. s. w. auf dem Messtische zu verlassen.

§ 58. Geographische Coordinaten φ, λ und konforme rechtwinklige Coordinaten $x\ Y$.

Zwischen den kongruenten Coordinaten x, y und den konformen Coordinaten x, Y bestehen nach § 50. die einfachen Beziehungen:

$$x = x \qquad y = Y - \frac{Y^3}{6\,r^2} \tag{1}$$

Wenn man daher φ und λ in x und y umwandeln kann und umgekehrt, so hat man auch φ und λ als Funktion von x und Y und umgekehrt; sei es, dass man nur die y und Y vermöge (1) zahlenmässig verwandelt, etwa mit einer Hilfstafel S. [45] des Anhangs, oder auch indem man die Einsetzung von Y statt y analytisch durchführt.

Wir wollen dieses thun und dazu die Formeln von § 55. nochmals hersetzen, aber um den Coordinaten-Nullpunkt ganz aus dem Spiele zu lassen mit der Annahme, dass die Abscissen x stets vom Äquator an gezählt werden. Bezeichnet man dann mit B den Meridianbogen vom Äquator bis zur Breite φ und mit x den Meridianbogen vom Äquator bis zur Fusspunktsbreite φ_1, so hat man aus § 55. folgende Formeln (S. 304):

kongruent

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{\varrho\, y^2}{2\,N_1^2}\,V_1^2\, tang\,\varphi_1 \tag{2}$$

$$\lambda = \frac{\varrho\, y}{N_1 \cos\varphi_1} - \frac{\varrho\, y^3}{3\,N_1^3}\,\frac{\sin^2\varphi_1}{\cos^3\varphi_1} \tag{3}$$

$$\gamma = \frac{\varrho\, y}{N_1}\,tang\,\varphi_1 - \frac{\varrho\, y^3}{6\,N_1^3}\,tang\,\varphi_1\,(1 + 2\,tang^2\varphi_1) \tag{4}$$

und die Umkehrung (S. 307 und S. 305):

kongruent

$$x = B + \frac{\lambda^2\, N}{2\,\varrho^2}\sin\varphi\cos\varphi \tag{5}$$

$$y = \frac{N\lambda}{\varrho}\cos\varphi - \frac{N\,\lambda^3}{6\,\varrho^3}\sin^2\varphi\cos\varphi \tag{6}$$

$$\gamma = \lambda\sin\varphi + \frac{\lambda^3}{3\,\varrho^2}\sin\varphi\cos^2\varphi \tag{7}$$

Wenn man hier y durch Y nach (1) ersetzt, so giebt das bei (2) keine Änderung innerhalb der hier eingehaltenen Grössenordnung, und bei (3) und (4) gestaltet sich die Umformung leicht, so dass man im ganzen hat:

konform

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{\varrho\, Y^2}{2\, N_1^2} V_1^2 \, tang\, \varphi_1 \tag{8}$$

$$\lambda = \frac{\varrho\, Y}{N_1 \cos\varphi_1} - \frac{\varrho\, Y^3}{6\, N_1^3 \cos\varphi_1}(1 + 2\, tang^2\varphi_1) \tag{9}$$

$$\gamma = \frac{\varrho\, Y}{N_1} tang\, \varphi_1 - \frac{\varrho\, Y^3}{3\, N_1^3} \frac{tang\, \varphi_1}{\cos^2\varphi_1} \tag{10}$$

Bei der Umwandlung der zweiten Gruppe (5)—(7) bleibt auch wieder x und ausserdem γ unverändert, und bei (6) verfährt man in üblicher Weise genähert, wodurch man rasch erhält:

konform

$$x = B + \frac{\lambda^2 N}{2\, \varrho^2} \sin\varphi \cos\varphi \tag{11}$$

$$Y = \frac{N\, \lambda}{\varrho} \cos\varphi + \frac{N\, \lambda^3}{6\, \varrho^3} \cos\varphi \cos 2\varphi \tag{12}$$

$$\gamma = \lambda \sin\varphi + \frac{\lambda^3}{3\, \varrho^2} \sin\varphi \cos^2\varphi \tag{13}$$

Diese Formeln (8)—(10) und (11)—(13) stimmen in erster Näherung überein mit den Gaussschen Formeln nach Wittstein und Schreiber; die letzteren genaueren Formeln haben noch höhere Glieder, welche wir erst in einem späteren Kapitel finden werden.

Es ist in dem Gange der Rechnung begründet, dass bei λ und γ alles in der Fusspunktsbreite φ_1 ausgedrückt ist und bei y und γ alles in der Breite φ des Punktes selbst; aber wenn mit φ begonnen wird, kann man es auch zu λ und γ benützen, und andererseits, wenn $x - B$ berechnet ist, hat man auch φ_1, und deshalb mögen zur Kontrolle auch noch folgende Formel-Gruppen erwünscht sein, zuerst zu der Gruppe (8)—(10):

konform

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{\varrho\, Y^2}{2\, N_1^2} V_1^2 \, tang\, \varphi_1 \tag{14}$$

$$\lambda = \frac{\varrho}{N_1} \frac{Y}{\cos\varphi} - \frac{\varrho}{6} \frac{Y^3}{N_1^3} \frac{\cos 2\varphi}{\cos^3\varphi} \tag{15}$$

$$\gamma = \frac{\varrho}{N_1} Y\, tang\, \varphi + \frac{\varrho\, Y^3}{6\, N_1^3} \frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi} \tag{16}$$

und andererseits zu der Gruppe (11)—(13):

konform

$$\left.\begin{aligned} x &= B + \frac{\lambda^2 N}{2\, \varrho^2} \sin\varphi \cos\varphi \\ \varphi_1 &= \varphi + \frac{V^2 \lambda^2}{2\, \varrho} \sin\varphi \cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$Y = \frac{N\lambda}{\varrho} \cos\varphi_1 + \frac{N\, \lambda^3}{6\, \varrho^3} \cos^3\varphi_1 (1 + 2\, tang^2\varphi_1) \tag{18}$$

$$\gamma = \frac{\lambda}{\varrho} \sin\varphi_1 - \frac{\lambda^3}{6\, \varrho^2} \sin\varphi_1 \cos^2\varphi_1 \tag{19}$$

Nach den vorstehenden Formeln (11) und (12) bezw. (17) und (18) haben wir für die Übungsmessungen in der Gegend von Hannover und namentlich Hildesheim, Salzdetfurt, ein Coordinatensystem angelegt, dessen x-Axe der 28te Längengrad ist,

mit Zählung der x vom Äquator der Erde an, aber mit Abkürzung um rund 5000000ᵐ. Die Längen λ stehen daher zu den Längen L der Landesaufnahme in der Beziehung $\lambda = L - 28°$.

Wir wollen die Rechnung für einen Punkt nach den Formeln (11) und (12) hier hersetzen:

$$\begin{array}{ll} \text{Ägidius } L = 27° \, 24' \, 24{,}6290'' & \varphi = 52° \, 22' \, 14{,}9611'' \\ L_0 = 28° & \varphi_0 = 52° \, 20' \\ \hline \lambda = -\,0° \, 35' \, 35{,}3710'' & \Delta\varphi = + \quad 2' \, 14{,}9611'' \\ \lambda = - \quad 2135{,}3710'' & \Delta\varphi = \quad 134{,}9611'' \end{array}$$

Aus dem Anhang Seite [33] entnimmt man für $\varphi = 52° \, 22' \, 15''$ den Wert $\log[2] = \log(\varrho : N) = 8.508\,8707$, und für die Mittelbreite $52° \, 21' \, 7''$ den Wert $\log[1] = 8.509\,9585$,

$$\begin{array}{lrr} \text{aus Seite [38] für } \varphi = 52° \, 22' \, \ldots\ldots & B_0 = & 5\,799\,836{,}593 \\ \text{logarithmisch auszurechnen } \Delta\varphi : [1] \ldots & = & 4\,171{,}095 \\ \quad " \qquad\qquad " \qquad \dfrac{\lambda^2}{2\varrho} \dfrac{\sin\varphi \cos\varphi}{[2]} \;. & = & 165{,}598 \\ \hline & X = & 5\,804\,173{,}286 \end{array} \qquad (20)$$

Weiter wird logarithmisch ausgerechnet nach der Formel (12):

$$\begin{array}{lr} \dfrac{N\lambda\cos\varphi}{\varrho} = \dfrac{\lambda\cos\varphi}{[2]} = \;\ldots\ldots & -\,403\,94{,}557^{m} \\ +\dfrac{\lambda\cos\varphi}{[2]} \dfrac{\lambda^2}{6\varrho^2} \cos 2\varphi \;\ldots\ldots & +\qquad 0{,}184^{m} \\ \hline \text{konform } Y = & -\,403\,94{,}373^{m} \end{array} \qquad (21)$$

Konforme Coordinaten Y und x in dem System mit $L = 28°$ und $\varphi = 0°$.

Punkt	Geographische Coordinaten		Rechtw. konf. Coordinaten		Höhe über N. N.
	L	φ	Y	x	
				5 000 000ᵐ	
Ägidius	27° 24′ 24,6290″	52° 22′ 14,9611″	— 40 394,87ᵐ	+ 804 173,29	125,87ᵐ Kn.
Wasserturm	27 22 25,0168	52 21 49,9080	— 42 663,69	+ 808 418,07	111,96 R.
Wehrstedt, Kirchturm	27 40 45,8901	52 2 40,8188	— 21 992,64	+ 767 758,55	143,98 Kn.
Sauberg, Pyramide .	27 42 30,8539	52 3 31,0969	— 19 995,69	+ 769 814,59	317,19 Pf.
Detfurth, Kirchturm .	27 41 16,75	52 4 29,21	— 21 390,13	+ 771 116,35	123,40 Unt.
Wesseln, Pyramide .	27 43 56,5389	52 4 37,5592	— 18 846,32	+ 771 362,23	293,27 Pf.
Wesseln, Kirchturm .	27 42 0,37	52 5 4,64	— 20 554,95	+ 772 207,79	111,50 Kn.
Gross-Düngen, Pyr. .	27 41 4,4376	52 5 8,8156	— 21 619,28	+ 772 341,35	195,01 Pf.
Gross-Düngen, Kircht.	27 41 15,03	52 5 46,53	— 21 412,60	+ 773 505,02	121,84 Kn.
Klein-Düngen, Pyr. .	27 42 44,6860	52 5 22,8490	— 19 708,97	+ 772 767,11	142,35 Pf.
Heinde, Pyramide . .	27 43 34,8237	52 6 40,5926	— 18 745,39	+ 775 166,06	146,97 Pf.
Heinde, Kirchturm .	27 42 24,25	52 6 2,78	— 20 093,05	+ 774 002,68	
Lechstedt, Kirchturm .	27 41 39,3608	52 6 54,7459	— 20 940,62	+ 775 612,21	168,04 Kn.
Breinum, Pyramide .	27 38 41,4808	52 2 39,6577	— 24 363,44	+ 767 744,30	228,90 Pf.
Almstedt, Pyramide .	27 37 43,8101	52 3 47,2945	— 25 461,30	+ 769 840,10	359,15 Pf.
Welfenhöhe, Pyramide	27 39 35,04	52 4 1,98	— 23 330,93	+ 770 283,52	292,54 Ob.
Hammberg, Pyramide .	27 38 58,3354	52 4 44,5595	— 24 023,68	+ 771 602,73	306,83 Pf.
Eggenstedt, Kirchturm	27 39 42,7418	52 6 11,6524	— 23 165,55	+ 774 290,28	117,22 Kn.
Bodenburg, Schlosst. .	27 40 33,2205	52 1 41,2544	— 22 242,21	+ 765 929,45	186,91 Kn.

Bei den Höhenangaben bedeutet Kn. = Knopfmitte, R. = Rand des Turmes, Pf. = Pfeileroberfläche (= Oberfläche des trigonometrischen Signalsteins), Unt. = Unterer Dachrand, Ob. = Oberer Rand = höchster Punkt.

Die Coordinatenrechnung ist nur auf Centimeter geführt, also mit $\pm 0{,}01^m$, was für den vorliegenden Zweck genügte.

Rechnet man zur Kontrolle von (21) auch noch nach den Formeln (17) und (18), so findet man $\varphi_1 = 52° \, 22' \, 20{,}3192''$ und dann $Y = -403\,93{,}196 - 1{,}174 = -403\,94{,}370^m$, was mit dem früheren (21) hinreichend stimmt.

Dieses ist konformes Y, und wenn man kongruentes y haben will, so hat man noch zu rechnen $\frac{Y^3}{6\,r^2} = 0{,}270^m$, was zu dem Vorigen giebt kongruent $y = -403\,94{,}100^m$.

Also in Zusammenfassung, zugleich für Wasserturm:

	kongruent y	konform Y	$X - 5000\,000 = x$
Ägidius	$-40394{,}10^m$	$-40394{,}37^m$	$+804173{,}29^m$
Wasserturm	$-42663{,}42$	$-42663{,}69$	$+803418{,}07$

Diese Y und x sind in der Tabelle S. 324 eingesetzt.

Auf beschränktem Gebiete kann man die x noch weiter kürzen, etwa durch konstantes Weglassen von $700\,000^m$.

§ 59. Die rechtwinkligen Coordinaten-Systeme des Deutschen Reiches.

Eine Übersicht der Deutschen rechtwinkligen Coordinaten-Systeme, welche zugleich ein gutes Stück Geschichte der Deutschen Vermessungen überhaupt vor Augen führt, haben wir in Fig. 1. S. 326 gebildet.

Im Folgenden haben wir die aus verschiedenen Quellen gesammelten geschichtlichen Angaben über die verschiedenen Landes- und Provinzial-Coordinaten-Systeme zusammengestellt, obgleich unsere Theorieen teilweise noch nicht soweit gediehen sind, um alles im Einzelnen zu verstehen. In einem späteren Kapitel wird weiter darüber zu handeln sein, inzwischen genügt die Kenntnis der rechtwinkligen kongruenten (Soldnerschen) Coordinaten (§ 46.) und der rechtwinkligen konformen Coordinaten (§ 50.) zum allgemeinen Verständnis, jedenfalls in geschichtlicher Beziehung.

Es ist hier auch nochmals an die geschichtlichen Abrisse zu erinnern, die wir schon im I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 479—551 gegeben haben. Auch sind die geschichtlichen Abschnitte in Jordan-Steppes, „Deutsches Vermessungswesen, 1881", zuzuziehen.

Über die rechtwinkligen geodätischen Coordinaten im Allgemeinen ist vorauszuschicken, dass dieselben ohne Zweifel französischen Ursprungs sind, sie wurden schon 1734 von Cassini angewendet, zuerst wohl lediglich als zusammengesetzte rechtwinklige ebene Coordinaten und schrittweise auf kurze Entfernungen geradezu in der Form von ebenen Coordinaten behandelt, und Clairaut erkannte darin den unwillkürlich betretenen Weg zur geodätischen Linie (Helmert, höhere Geodäsie I, S. 240).

Soldner hat in der monatlichen Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde 11. Band 1805, S. 7—23 eine Abhandlung über die kürzeste Linie auf dem Sphäroide geschrieben, in welcher er auf S. 15—17 auch auf die rechtwinkligen Coordinaten kommt, und als „*gewöhnliche* Methode den Perpendikel und

Abstand zu finden", die ebene Rechnung mit $a \sin \alpha$ und $a \cos \alpha$ anführt, so dass also anzunehmen ist, dass Soldners spätere Behandlung der Sache in Bayern sich hieraus entwickelt hat.

Fig. 1.
Die rechtwinkligen Coordinaten-Systeme des Deutschen Reichs.

Bayern.

Das Bayerische Coordinaten-System wurde im Jahr 1810 von Soldner angelegt, mit der Mitte des nördlichen Frauenturms in München als Coordinaten-Ursprung, und dem Meridian dieses Punktes als Abscissen-Axe. Weiteres hierüber giebt das amtliche Werk: „Die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, München 1873", S. 253.

Dieses System gilt nur für das eigentliche rechtsrheinische Bayern; für die bayerische Pfalz gilt derselbe Nullpunkt Mannheim wie für Baden.

Die *eine* Bayerische Meridian-x-Axe, welche durch den Münchener Frauenturm geht, war zur Zeit der Anlage dieses Systems, da es sich nur um Messtisch-Aufnahmen in 1 : 5000 handelte, genügend, und für die Übersichtlichkeit des ganzen nützlich.



Die grössten Ordinaten dieses Systems sind östlich bei Passau $y = 56\,000$ Ruten $= 163^{km}$ und nordwestlich bei Aschaffenburg $y = 64\,000$ Ruten $= 187^{km}$, was eine Verzerrung $\frac{y^2}{2\,r^2} = 0{,}00043$ oder $0{,}43^m$ auf 1^{km} giebt. Da diese Verzerrung in der Kleinmessung Schwierigkeiten bereitet, hat man sich bis jetzt geholfen durch Einführung von Lokal-Systemen mit schiefen x-Axen, d. h. mit solchen Axen, welche gegen den Meridian des Nullpunkts um die Meridian-Konvergenz verdreht sind.

Vergl. hierzu: „Technische Anleitung zu den trigonometrischen Netz- und Coordinaten-Rechnungen von Dr. J. H. Franke, München 1889", S. 14 und S. 99. Ferner „Transformation rechtw.-sphär. Coordinaten, Astr. Nachr., 126. Band 1890", S. 355, System I, und „Korrespondenz-Blatt des bayerischen Geometer-Vereins, Band IX, München Februar 1894", Nr. 1., „Betrachtungen über das Coordinaten- und Blatt-System der bayerischen Landesvermessung von Dr. J. H. Franke", S. 1—21.

Da Bayern durch den Übergang von der Messtischzeichnung zu der trigonometrischen Rechnung jetzt Veranlassung hat, zwei neue Axen westlich und östlich von München anzulegen, so wäre das die beste, vielleicht in 100 Jahren nicht so schön wiederkehrende Gelegenheit, unbeschadet der alten Messtischeinteilung, die neuen Axen meridional und mit *konformen* Coordinaten anzulegen.

Württemberg.

Die Sternwarte von Tübingen als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems, und der Meridian von Tübingen, als x-Axe, wurde von Bohnenberger schon im vorigen Jahrhundert für seine Karte von Schwaben angenommen, das dabei orientierende Azimut Tübingen-Kornbühl wurde schon 1792 gemessen, und auch bis heute beibehalten, obgleich die Messung von 1819 eine Änderung um 15″ ergab, so dass also das heutige Württembergische System um 15″ gegen den Meridian von Tübingen verdreht ist.

Am Anfang dieses Jahrhunderts rechnete Bohnenberger in Württemberg rechtwinklige geodätische Coordinaten schrittweise wie eben, was bei der damaligen Genauigkeit der Messungen auf Minuten genügte. Bohnenberger hat aber auch alsbald die wichtigste Aufgabe, welche sich hieran anschliesst, meisterhaft gelöst, nämlich die Umformung zwischen rechtwinkligen und geographischen Coordinaten und umgekehrt.

In dieser Sache scheint uns Bohnenbergers Verdienst höher zu stehen als Soldners; die wenigen *sin*- und *cos*-Entwicklungen Soldners waren viel leichter als die Formeln zwischen x, y und φ, λ, welche Bohnenberger im Jahre 1802 veröffentlicht und schon vor 100 Jahren angewendet hat, mindestens ebenso gut und teilweise besser als heute 1896 geschieht; und das System im Ganzen, mit rechtwinkligen *und* geographischen Coordinaten hat Bohnenberger schon *vor* Soldner gehabt, er berichtet 1826 in seiner Schrift De computandis dimensionibus etc. § 16. über seine Formeln für rechtwinklige Coordinaten: „conveniunt cum iis, quibus usus est cel. Soldner in computandis dimensionibus bavaricis".

Alles, was wir hierüber Geschichtliches finden konnten, haben wir gesammelt und veröffentlicht in Jordan-Steppes, „Deutsches Vermessungswesen, 1882", I. S. 244 bis 259.

Baden.

Die topographische Vermessung des Grossherzogtums Baden wurde schon frühe auf *ein* rechtwinkliges Coordinaten-System bezogen, mit der Sternwarte in



Mannheim als Nullpunkt und mit dem Meridian von Mannheim als x-Axe. Das zur Orientierung dienende Azimut Mannheim-Speyer (vgl. § 47. S. 264) ist schon im Jahre 1820 von Nicolai gemessen worden. Die Coordinaten waren früher als eben berechnet; das heutige sphärische rechtwinklige System der badischen Katastervermessung stammt etwa aus der Zeit von 1840; dasselbe wurde von dem Obergeometer Rheiner eingeführt.

Hessen-Darmstadt.

In dem „Gesetz, die Vollendung des Immobiliar-Katasters betreffend" und Instruktion vom 30. Juni 1824, wird in Art. 3. bestimmt: „Sphäroidische Coordinaten, der Meridian von Darmstadt soll hiebei als Hauptaxe angenommen werden". Über einige Eigentümlichkeiten der Hessischen rechtwinkligen Coordinaten haben wir in Jordan-Steppes, „Deutsches Vermessungswesen", S. 289, berichtet.

Hannover.

Für die Hannoversche Landesvermessung hat Gauss schon frühzeitig ein rechtwinkliges sphäroidisches konformes Coordinaten-System mit dem Ursprung Göttingen und dem Meridian von Göttingen als x-Axe angeordnet, dessen Theorie wir in erster Näherung in § 50. u. § 58. behandelt haben. Die vollständige Theorie dieses klassischen Coordinatensystems können wir erst in einem späteren Kapitel bringen.

Zur Geschichte dieser Coordinaten entlehnen wir aus dem Berichte von Gäde in der „Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 113, 145, 161, 177, 193, 225 Folgendes:

Im Anschluss an die dänische Gradmessung, welche 1816 von Schumacher begonnen wurde, führte Gauss die geodätischen Messungen des Gradbogens zwischen Göttingen und Altona in den Jahren 1821—1823 aus (Netzbild hiezu giebt unser I. Band, 4. Aufl. 1895, S. 493).

Eine weitere Ausdehnung gegen Westen zum Zweck eines neuen Anschlusses, der ursprünglich nicht projektiert war, erfuhren die Gauss schen Dreiecke 1824 und 1825. Dabei wurden ausser dem wissenschaftlichen Interesse der Gradmessung sehr frühe auch die Zwecke der Landesvermessung ins Auge gefasst. „Es ist jetzt allgemein anerkannt, dass eine genaue Landesvermessung ohne eine gehörige Triangulierung unmöglich ist" (Gauss 1824). Im Jahre 1823 hat Gauss eigens auf dem Ägidiusturm in Hannover, der nicht zu den Gradmessungspunkten gehörte, Winkelmessungen zu topographischen Aufnahmen angestellt. Aus solchen Nebenmessungen erzielte Gauss 1821—1825 über 400 gut bestimmte Punkte, im ganzen wurden es 2600. Diese Punkte wurden nach Coordinaten berechnet und auf die Messtische aufgetragen. „Die Angabe der Lage von einem beliebigen Anfangspunkt (der Göttinger Sternwarte) *bis auf wenige Fuss genau*, muss als die Hauptausbeute betrachtet werden."

Am 25. März 1828 wurde die Ausdehnung der Triangulierung über das ganze Königreich befohlen, sie fand ihren Abschluss 1844. (Das Netzbild der Hauptdreiecke mit 89 Punkten im Massstab 1 : 1 000 000 ist enthalten in „Papens Geogr. Karte des Königreichs Hannover und Herzogtums Braunschweig".)

Im Jahre 1830 schrieb Gauss: „Späterhin könnte es geraten sein, das Verzeichnis von 2600 Punkten durch den Druck zu veröffentlichen, für den Augenblick noch nicht, erstlich weil eine wissenschaftliche Entwicklung der Zahlen nur in Verbindung mit der Entwicklung der mir eigentümlichen mathematischen Theorieen gegeben werden kann, welche ich in etwa 3—4 Abhandlungen zu liefern beabsichtige." (Davon sind nur die „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie" 1845 und 1846 erschienen.) Der Abschluss der rechnerischen Bearbeitung der Landesvermessung hat sich bis 1848 verzögert. Im Jahre 1859, 4 Jahre nach Gauss' Tode, wünschte das Ministerium die Herausgabe durch den Druck, den aber der Generalstab ablehnte, „weil die Coordinaten nicht nur einen ausserordentlich relativen Wert haben und viele derselben unzuverlässig und gar falsch sind; von solchen müsste das Verzeichnis zuvor gesäubert werden".

Die Theorie dieser Coordinaten ist der Wissenschaft gerettet worden in dem Werke: „Theorie der Projektionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung von *Oskar Schreiber*, Hauptmann im Königl. Hannov. 1. Jäger-Bataillon Hannover, Hahnsche Hofbuchhandlung 1866".



Die Vorrede dieses Werkes von Wittstein (Mai 1866) sagt: Selbst in Hannover, wo auf Grundlage der Gauss schen Projektion fortwährend topographische Aufnahmen stattgefunden haben, war die Kenntnis der Fundamente dieser Projektion so gut wie verloren gegangen, und man arbeitete nur unter dem Einflusse einer Art von Tradition nach überlieferten Schablonen. Es kam darauf an, die vorhandenen Andeutungen und Bruchstücke aufzusuchen, mit Sorgfalt an dieselben anzuknüpfen, und so den Versuch zu wagen, die analytischen Entwicklungen, welche Gauss schon besessen haben muss, vollständig wieder ins Leben zu rufen.

Bald darauf erschien auch: „Allgemeines Coordinaten-Verzeichnis als Ergebnis der Hannoverschen Landesvermessung aus den Jahren 1821—1844, abgedruckt zum Zwecke der Benützung bei den Vermessungsarbeiten zur Vorbereitung der anderweitigen Regelung der Grundsteuer, Hannover 1868“, Druck von Wilh. Riemschneider, mit einer Einleitung von Wittstein, enthaltend die wichtigsten Coordinaten-Formeln mit Gliedern von der Ordnung $1:r^3$ einschliesslich.

Inzwischen war Hannover preussisch geworden, und man dachte daran, die Gauss schen Coordinaten auch zur Katastervermessung zu benützen, welche bisher gemarkungsweise mit Kette und Bussole u. dergl. gemacht worden war.

Dabei verfiel man aber auf den Gedanken, die Coordinaten nach der politischen Kreis-Einteilung des Landes in 31 Partialsysteme zu zerstückeln. Wittstein hatte für die 31 neuen Nullpunkte die Meridian-Konvergenzen und Vergrösserungs-Coëfficienten m zu berechnen, und darnach wurden die Partialsysteme umgerechnet. Die Stadt Hannover bekam den neuen Nullpunkt Osterwald, dessen Reduktionsformeln in unserem II. Bande, 3. Aufl. 1888, S. 196—197 mitgeteilt sind.

Katastersekretär Clotten in Hannover (gestorben etwa 1887), welcher über die Vermessungen im ehemaligen Königreich Hannover mehreres geschrieben hat (Zeitschr. f. Verm. 1881, S. 22, 292, 376, 425, 445 und 1882 S. 22, 256) hat uns früher manches über die Übergangszeit nach 1866 mitgeteilt. Da man in der konformen Projektion in jedem Punkte einen Vergrösserungsfaktor $m = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2}$ berechnen *kann*, scheint man geglaubt zu haben, dass man bezirksweise solche Reduktions-Coëfficienten rechnen und benützen *müsse*, und dieser Irrtum kann der Grund für jene Zerlegung des Gauss schen Systems in 31 Partialsysteme gewesen sein, indem man dann mit der Zerlegung soweit ging, bis man glaubte, jene $1 + \frac{y^2}{2\,r^2}$ hinreichend genau $= 1$ setzen zu können.

Die 31 konformen Partialsysteme wurden 1879 wieder abgeschafft, und durch neue Systeme nach süddeutscher (Soldner scher) Art ersetzt, mit den Nullpunkten 27. Celle, 28. Kaltenborn, 29. Silberberg, 30. Windberg u. s. w.

Als Hannoveraner hätten wir gewünscht, die alte klassische Göttinger Axe (schon aus Pietät gegen Gauss) zu erhalten und dadurch in der Übergangszeit 1880 bis 1890 viele Umrechnungsmühe zu ersparen, und später eine durchgreifende Kritik der alten Coordinaten zu ermöglichen. Östlich von dem Göttinger Meridian sind Ordinaten von nur etwa 70^{km} Länge, mit Ausnahme des Kreises Dannenberg in der nordöstlichen Ecke, der aber von dem 9^{km} nach Osten verschobenen System 27. Celle auch ausgeschieden und dem System 23. Magdeburg zugeteilt ist. (Vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1896“, S. 197—199.)

Kurhessen.

Die Triangulierung von Gerling hatte ursprünglich kein rechtwinkliges Coordinaten-System, dagegen wurden die Längen und Breiten aller 48 Hauptpunkte im Anschluss an Göttingen berechnet (Gerling, „Beiträge zur Geographie Kurhessens, Cassel 1839“, S. 200—204). An diese geographischen Coordinaten wurden dann von

den Kataster-Behörden rechtwinklige Partial-Systeme angeschlossen, mit dem Kirchturm der jeweiligen Gemarkung als Ursprung und dem Meridian des jeweiligen Kirchturms als x-Axe. Wo der Anschluss an die Haupt-Triangulierung fehlte, mass man eine kleine Basis mit Messlatten und ein Azimut durch korrespondierende Sonnenhöhen, für jede Gemarkung besonders.

Als um das Jahr 1853 die General-Katastervermessungen in den Provinzen Hanau und Fulda ausgeführt und auf das übrige Hessen ausgedehnt werden sollten, wurden die geographischen Coordinaten der für Kataster-Vermessungen brauchbaren trigonometrischen Punkte in rechtwinklige sphärische Coordinaten für den Indifferenzpunkt Cassel, Martinsturm, umgerechnet (mit Erddimensionen nach Walbeck, vgl. S. 334).

(Vorstehendes ist zusammengestellt aus gütiger Mitteilung von Herrn Landesvermessungsrat Kaupert, sowie Gehrmann, in Jordan-Steppes, „Deutsches Vermessungswesen II.", S. 105.)

Thüringen-Gotha.

In einer Schrift „Über die Ergänzung der topographischen Aufnahme und Kartierung von Deutschland in Bezug auf Thüringen, von C. Frhrn. von Gross, Kammerherrn etc., Weimar 1848" ist auf S. 33—72 eine von dem Astronomen und Geodäten Hansen in Gotha verfasste „Instruktion für die Ausführung der Triangulation" veröffentlicht, welche in mancher Beziehung interessant ist, und in Hinsicht auf Coordinaten eine Meridian-x-Axe annimmt, von welcher die geographischen Längen nach Osten $+10'$, $+20'$ u. s. w., nach Westen $-10'$, $-20'$ u. s. w. gezählt werden. Auf diesem Meridian ist die Polhöhe 50° 36′ als Nullpunkt für die Abscissen x bestimmt. Die rechtwinkligen Coordinaten werden zuerst genähert als *eben* berechnet, ξ, η, S. 51, worauf noch Korrektionen von der Ordnung $\frac{s^3}{2r^2}$ $\left(\text{S. } 53 \ \varrho' = \frac{1}{2r^2}\right)$ hinzukommen, wodurch Coordinaten x, y erhalten werden, „auf der krummen Oberfläche der Erde, jedoch in einem etwas anderen Sinne, wie man diese Coordinaten früher aufgefasst hat" (S. 53). Die Theorie dieser Coordinaten wird nicht mitgeteilt, die angegebenen Formeln (S. 53) sind in Bezug auf x und y symmetrisch (was bei den Soldnerschen und Gaussschen Formeln nicht der Fall ist) und können durch Zufügung weiterer einfacher Glieder ebenfalls von der Ordnung $\frac{s^3}{r^2}$ (S. 72) in die rechtwinkligen ebenen Coordinaten der stereographischen Projektion übergeführt werden.

Nach neuesten Mitteilungen über die Thüringischen Vermessungen ist diese Hansensche Instruktion von 1848 mit ihren eigenartigen Coordinaten xy nur Entwurf geblieben.

Nassau.

Das Herzogtum Nassau hat etwa um 1855 ein rechtwinkliges System mit dem Ursprung Schaumburg nach Soldners Theorie angenommen. (Weiteres s. „Zeitschr. f. Verm. 1882", S. 315—316 und I. Band, 4. Aufl. 1895, S. 535.)

Preussen, Landesaufnahme.

In Preussen sind sehr lange die Punkte nur nach geographischen Coordinaten berechnet worden.

Bessel hat sich mit der Frage der Coordinaten gelegentlich beschäftigt, aber in „astr. Nachr., 1. Band Nr. 3 vom Dezember 1821" nur die *ebenen* Coordinaten



„das Resultat der Formeln $x = s \sin \alpha + \ldots$ und $y = s \cos \alpha + \ldots$“ in Betracht gezogen, wie in der „Bayerischen Landesvermessung“ S. 253 bemerkt wird.

Eine lithographierte „Instruktion für die topographischen Arbeiten des Königl. Preussischen Generalstabes“ von dem Chef des Generalstabes der Armee von Müffling, Berlin den 15. Januar 1821, giebt für Berechnung geographischer Coordinaten die nötigen Gebrauchsformeln, welche entsprechend sind einer Abhandlung von Soldner „Über die kürzeste Linie auf dem Sphäroide“ in der monatlichen Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde 1805, S. 7—23.

Die Einführung rechtwinkliger Coordinaten in die Preussischen Generalstabsmessungen geschah erst nach 1870 durch General Schreiber, welcher die Sache auch in die Öffentlichkeit gebracht hat durch eine autographierte Schrift „Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme vom 8. September 1877“, welche er zur Verfügung stellte für das Werk Jordan-Steppes, „Deutsches Vermessungswesen, I. Band 1882“, S. 151—164. Dort findet sich auch auf S. 103 bis 121 eine nach Schreiberschen Angaben von uns bearbeitete Darstellung der Rechnungsvorschriften für geographische Coordinaten, deren Gebrauchsformeln und Tabellen schon in unserem Citate auf § 39. S. 228 erwähnt sind. Was die von Schreiber eingeführten rechtwinkligen Coordinaten betrifft, so beruhen sie auf einer konformen Doppelprojektion, nämlich zuerst konforme Projektion des Ellipsoids auf die Kugel nach Gauss' Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“, erste Abhandlung 1843, und dann konforme Projektion der Kugel auf die Ebene, deren erste Näherungen wir bereits in § 50.—52. behandelt haben. Alles weitere hierüber auf ein späteres Kapitel versparend, müssen wir hier nur noch zur allgemeinen Orientierung folgendes bemerken:

Die geographischen Längen und Breiten, welche die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme veröffentlicht, stützen sich alle auf *einen* Fundamentalpunkt, die Sternwarte Berlin, bzw. deren Übertragung auf den benachbarten Triangulierungspunkt Rauenberg, woselbst auch ein die ganze Landesaufnahme orientierendes Azimut Marienturm bestimmt wurde. Die hiefür noch heute benützten Annahmen wurden im Jahre 1859 gemacht, und insbesondere dabei die geographische Länge der Sternwarte $= 31° 3' 41{,}25''$ östlich von Ferro (d. h. $11° 3' 41{,}25''$ östlich von Paris) angenommen. Nach neueren telegraphischen Bestimmungen ist diese Länge erheblich anders, nämlich $31° 3' 28{,}30''$, oder um $12{,}95''$ kleiner als die Annahme von 1859.

Diesen Betrag $12{,}95''$ müsste man an allen Längenangaben der Landesaufnahme abziehen, wenn man dieselben mit neueren astronomischen Bestimmungen in Übereinstimmung bringen wollte. Indessen kämen dann noch viele andere Reduktionen für Lotabweichungen u. s. w. hinzu, und für die Feld- und Landmessung, wo es sich immer nur um Differenzen geographischer Längen handelt, kommt eine konstante Verschiebung überhaupt nicht in Betracht.

Die astronomischen Bestimmungen auf dem Fundamentalpunkt Rauenberg bei Berlin, insbesondere das für die Landesaufnahme massgebende Orientierungs-Azimut daselbst, sind in neuerer Zeit wiederholt worden, und es hat das Azimut gegen früher die Differenz $3{,}88''$ ergeben. („Veröffentlichung des K. Preuss. geodätischen Instituts, astronomisch-geodätische Arbeiten I. Ordnung“, Berlin 1889, S. 186.)

Hiezu ist auch noch anzuführen: von Schmidt, „Projektionsmethode der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landesaufnahme“, Zeitschr. f. Verm. 1894 S. 385—401 und 409—418, mit Fundamentalzahlen S. 386—387. Das konforme



System der Landesaufnahme hat als x-Axe den Meridian von 31° Länge (Berlin). Als Nullpunkt dient der Punkt mit der Breite 52° 42′ 2,53251″, entsprechend der Breite 52° 40′ auf der Gaussschen konformen Kugel, der mittlere Krümmungs-Halbmesser A dieser Breite ist gegeben durch $\log A = 6.805\,0274{\cdot}003$. Die Ordinaten gehen westlich bis $y = 540^{km}$ bei Metz und östlich bis $y = 622^{km}$ bei Lyck. Die Verzerrungsverhältnisse sind daher sehr bedeutend; wie aus der Hilfstafel Seite [46] des Anhangs zu sehen, geht $\log m$ bis 0.002 oder m selbst bis 1,0046 oder $4{,}6^{mm}$ auf 1^{m}, so dass schon die Excentricitäten bei excentrischen Theodolit-Aufstellungen und ähnliche örtliche Masse dem Verhältnis m entsprechend reduziert werden müssen. Aus diesem Grunde, d. h. seiner Grösse wegen, ist dieses System zur unmittelbaren praktischen Anwendung nicht geeignet, es findet seinen Hauptzweck in dem Zusammenhalt der Triangulierungen I.—II. Ordnung.

Innerhalb eines schmalen Streifens von etwa 100^{km} links und rechts vom Berliner Meridian könnten aber die konformen Coordinaten der Landesaufnahme unmittelbar praktisch benützt werden.

Preussen, Katastervermessung.

Auch in der Preussischen Katastervermessung haben die rechtwinkligen Coordinaten-Systeme grösserer Ausdehnung verhältnismässig spät Eingang gefunden.

In der Broschüre von General Baeyer „Mein Entwurf zur Anfertigung einer guten Karte u. s. w., Berlin 1868“, welche für die geschichtliche Entwicklung des Preussischen Vermessungswesens die beste Quelle ist, werden die rechtwinkligen Coordinaten-Systeme, welche damals schon seit einem halben Jahrhundert sich in Süddeutschland bewährt hatten, nicht erwähnt. (Auch eine Notiz in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 529 mag hier zugezogen werden.)

Die „Anweisung vom 7. Mai 1868 für das Verfahren bei den Vermessungs-Arbeiten in den Provinzen Schleswig-Holstein, Hannover und Hessen-Nassau, zweite Ausgabe, Berlin 1870“, sagt in § 40. S. 35: „Zum Zwecke des weiteren Gebrauches der trigonometrischen Messungen ist die Lage der Dreieckspunkte gegeneinander nach rechtwinkligen Coordinaten zu berechnen, welche auf die wirkliche Mittagslinie eines nach der Bestimmung des Katasterinspektors hiezu zu wählenden geeigneten Punktes zu beziehen sind.“

Über die rechtwinkligen Coordinaten-Systeme in den Preussischen Rheinlanden haben wir folgende Mitteilung von F. G. Gauss in Jordan-Steppes, „Deutsches Vermessungswesen 1881“, S. 165:

Durch die Instruktion vom 12. März 1822 wurde allgemein eingeführt, dass die Detailnetze durch Netze höherer Ordnung miteinander verbunden, sowie dass die Dreiecksseiten derselben aus Seiten I. Ordnung abgeleitet und nach diesen orientiert wurden.

Für sämtliche Punkte sollten rechtwinklige Coordinaten berechnet werden, welche sich für die Punkte I. Ordnung auf den Kölner Dom und dessen Meridian, für die Punkte II. bis IV. Ordnung auf einen passenden, in dem betreffenden Distrikt liegenden Punkt I. Ordnung und dessen Meridian beziehen sollten. Hiervon ist abgewichen worden, indem für die Punkte II. bis IV. Ordnung nicht der Meridian des als Ausgangspunkt für die Coordinaten benützten Punktes I. Ordnung, sondern die durch diesen gelegte Parallele zum Meridian von Köln als Abscissenaxe angenommen und die ohne Berücksichtigung der Erdkrümmung berechneten Coordinaten durch Addition derselben zu denen des Ausgangspunktes sämtlich *nominell* auf den Kölner Dom bezogen wurden. Thatsächlich bestand demnach aber auch ferner eine grössere Zahl von Coordinaten-Systemen. Der Umfang derselben richtete sich nach der Einteilung der Arbeitsbezirke und war sehr verschieden von einzelnen Gemeindebezirken bis zu einigen Kreisen. Für die Punkte, welche in mehreren



Systemen vorkamen, wurden in jedem System andere Abstände vom Meridian und Perpendikel des Kölner Doms berechnet, da die Berechnung der Coordinaten, als in der Ebene liegend, die gegenseitige Übereinstimmung der Bezifferung nicht ermöglichte.

In den östlichen Provinzen Brandenburg, Pommern, Sachsen, Schlesien, Posen, Preussen sind vor 1876 keine umfangreichen genauen Parzellaraufnahmen ausgeführt worden, allgemeine Coordinaten-Systeme waren nicht vorhanden.

In dem Werke F. G. Gauss, „die trig. und polygon. Rechnungen der Feldmesskunst 1876", S. 297—301 werden die Soldner schen Coordinaten nach süddeutschen Quellenschriften erwähnt und ein Zahlenbeispiel mit dem Nullpunkt Berlin Marienkirchturm gegeben.

Denselben Nullpunkt Marienkirche hatte auch die Stadtvermessung von Berlin vorläufig; die Coordinaten wurden aber transformiert auf den Nullpunkt Rathausturm, welcher für die Stadtvermessung beibehalten wurde. (Zeitschr. f. Verm. 1881, S. 14.)

Die „Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881, für die trigonometrischen und polygonometrischen Arbeiten bei Erneuerung der Karten und Bücher des Grundsteuerkatasters, Berlin 1881", giebt in dem Anhang S. 337—351 die „Bestimmungen vom 29. Dezember 1879 über den Anschluss der Spezial-Vermessungen an die trigonometrische Landes-Vermessung". Dadurch werden 40 Coordinaten-Nullpunkte festgestellt, die wir in unserer Übersichtskarte S. 326 aufgezeichnet haben.

Oldenburg.

Als Nullpunkt des rechtwinkligen Coordinaten-Systems dient der Schlossturm zu Oldenburg, der durch diesen Punkt gelegte Meridian dient als Abscissenaxe mit $+x$ nach Süden, $-x$ nach Norden, und entsprechend wird $+y$ nach Westen und $-y$ nach Osten gezählt.

Über die durch Güte der Herren Vermessungs-Inspektor Treiss und Vermessungs-Direktor Scheffler in Oldenburg erhaltenen geodätischen Schriften von 1836 und von 1838 haben wir bereits in Band I, 4. Aufl. 1895, S. 537—539 berichtet, und um nicht wiederholen zu müssen, verweisen wir auf jene erste Mitteilung, welche aber in Hinsicht auf die Art der rechtwinkligen Coordinaten noch nicht zu einem Schlussergebnis gelangen konnte.

Inzwischen haben wir auch noch die geographischen Coordinaten zugezogen mit Rücksicht auf die dabei benützten Erddimensionen. Es ist nämlich in dem Werke „Ergebnisse der 1835—1837 ausgeführten Triangulierung des Herzogtums Oldenburg, abgeleitet aus der Hannover schen Gradmessung" auf S. 1 angegeben: „Bei allen Rechnungen ist unterstellt worden, dass unsere Erde ein Ellipsoid, das Abplattungsverhältnis $= 1:302{,}78$, der mittlere Erdmeridiangrad $= 57009{,}76$ Toisen sei".

Dieses sind die bekannten Walbeck schen Erddimensionen, welche wir schon in der Einleitung § 1. S. 8—9 erwähnt haben, und es kam nun die Aufgabe, dieselben zur Coordinatenrechnung herzurichten. Dazu haben wir zuerst berechnet:

$$\text{Meridianquadrant } Q = 10\,000268{,}30^{m}\ ,\ log\ Q = 7.0000117,$$

dann nach § 35. S. 215, Gleichung (24 b) und Tabelle unten:

$$\text{mit } \alpha = 1:302{,}78\ ,\ log\ \alpha = 6.804\,6093.$$

$$\text{Dazu auch} \quad log\ b = 6.803\,1726\ ,\ log\ c = 6.806\,0460$$

$$e^2 = 2\,\alpha - \alpha^2\ ,\ log\ e^2 = 7.819\,1850\ ,\ log\ e'^2 = 7.822\,0585$$

$$log\,(1 - e^2) = log\,\frac{1}{1 + e'^2} = 9.997\,1265$$



Dann eine Tabelle der *log* [1] und *log* [2] nach S. 230:

Hülfstafel für Walbeck s Erddimensionen.

φ	$log \frac{\varrho}{M} = log$ [1]		$log \frac{\varrho}{N} = log$ [2]	
		—		—
52° 30′	8.509 9797	121	8.508 9126	40
52° 40′	509 9676	120	508 9086	40
52° 50′	509 9556	121	508 9046	40
53° 0′	509 9435	121	508 9006	41
53° 10′	509 9314	120	508 8965	40
53° 20′	509 9194	120	508 8925	40
53° 30′	509 9074	121	508 8885	40
53° 40′	500 8953		508 8845	

Damit berechneten wir ein Dreieck Crapendorf-Windberg-Quekenberg, dessen Lage auf unserem Netzbilde von § 21. S. 129 insofern angegeben ist, als die Punkte Windberg und Quekenberg dort im westlichen Teile geradezu vorkommen, und Crapendorf ungefähr in der Gegend von Cloppenburg angenommen werden kann.

Aus den geographischen Coordinaten dieser drei Punkte, welche bereits in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 538 angegeben sind, haben wir die Berechnung nach den sphäroidischen Mittelbreitenformeln unseres späteren § 77. (aber mit den [1] und [2] nach Walbeck s Erddimensionen) gemacht und folgende Entfernungen und Azimute gefunden:

	log S	Azimut	Winkel
1. Crapendorf			
Quekenberg	4.587 4672	209° 17′ 7,07″	67° 44′ 46,11″
Windberg	4.535 6446	277 1 53,18	
2. Windberg			
Crapendorf	4.535 6446	96° 37′ 40,47″	61° 12′ 1,88″
Quekenberg	4.611 1920	117 49 42,35	
3. Quekenberg			
Crapendorf	4.587 4672	29° 3′ 48,39″	51° 3′ 15,16″
Windberg	4.611 1930	338 0 33,23	
			180° 0′ 3,15″

Die Winkelsumme 180° 0′ 3,15″ stimmt auch, wenigstens innerhalb 0,1″ mit dem sphärischen Excess, und die *log S* stimmen mit den Sinus der Winkel wenigstens bis zur 6ten Stelle genau, die Rechnung mag also innerhalb der hier nötigen Genauigkeit als stimmend gelten. Nun haben wir aus den rechtwinkligen Coordinaten, die ebenfalls schon in Band I, 4. Aufl. 1895, S. 538 mitgeteilt sind, die Entfernungen zweifach berechnet, erstens unter der Annahme, dass die rechtwinkligen Coordinaten kongruent nach Soldner und zweitens dass dieselben konform nach Gauss seien; Folgendes ist die Vergleichung:

Dreiecksseite	$log\ S_0$ Oldenburg	$log\ S_1$ aus φ und λ	$log\ s$ eben	$log\ S'$ Soldner	$log\ S''$ konform
1. Windberg-Quekenberg	4.611 1937	4.611 1930	4.611 2004	4.611 1933	4.611 1922
2. Crapendorf-Quekenberg	4.587 4703	4.587 4672	4.587 4690	4.587 4668	4.587 4662
3. Windberg-Crapendorf	4.535 6451	4.535 6446	4.535 6443	4.535 6442	4.535 6401
		$= log\ S'$		$= log\ S_1$	

Die Oldenburgischen $log\ S_0$ sind entnommen aus dem Generalbericht für die mitteleuropäische Gradmessung für 1865, Seite 26, Dreieck Nr. VIII, mit dem Verwandlungslogarithmus 0.575 9082 zum Übergang von Preussischen Ruten in Meter. Dort sind auch die Dreieckswinkel angegeben, bis zu 1″ abweichend von unseren aus φ, λ rückwärts berechneten Winkeln.

Bleiben wir nun bei den vorstehenden Seitenvergleichungen stehen, so stimmen am besten $log\ S_1$ und $log\ S'$ unter sich, und — soweit aus diesen wenigen Vergleichungen Schlüsse gezogen werden dürfen — müsste man nun annehmen, dass die Oldenburgischen Coordinaten bereits in den Jahren 1835 und 1836 dieselben waren, wie die gleichzeitigen Bayerischen und Württembergischen Coordinaten von Soldner und Bohnenberger.

Mecklenburg.

Mecklenburg ist zur Zeit der einzige Staat in Deutschland, der die Vorteile der Konformität bis zu den Katasterkarten sich nutzbar gemacht hat. Dort ist das konforme Prinzip praktisch geodätisch in I.—III. Ordnung der Triangulierung erhalten geblieben durch den mecklenburgischen Geodäten Paschen, welcher als unmittelbarer Schüler von Gauss auf der Universität Göttingen in die feinen geodätischen Ideen des Meisters eingeweiht wurde und in sein Heimatland Mecklenburg zurückgekehrt, das Gelernte zur Anwendung gebracht hat, in einer von der hannoverschen abweichenden, der geographischen Erstreckung von West nach Ost angepassten Form.

Es ist die konforme Kegelprojektion mit Berührung nach dem Mittelparallel des Landes in der Breite $P = 53° 45'$, und entsprechend ist das Coordinatensystem so angelegt, dass die x-Axe in dem Meridian des Schlossturmes von Schwerin liegt und die y-Axe rechtwinklig dazu in der Breite 53° 45′. Allerdings wurde dazu noch eine Verschiebung der x um den konstanten Betrag 13919,812ᵐ vorgenommen, um den Nullpunkt in den Schweriner Schlossturm selbst zu verlegen, aber das hat nur formelle Bedeutung; denn in allen Fällen theoretischer Rechnung mit den Mecklenburgischen Coordinaten muss man die ursprünglichen von der Breite 53° 45′ aus gerechneten Abscissen x benützen. Die Linear-Verzerrung ist in erster Näherung übereinstimmend mit derjenigen des Gauss schen konformen Systems, nämlich in Mecklenburg $m = 1 + \frac{x^2}{2r^2}$ entsprechend dem Gauss schen $1 + \frac{y^2}{2r^2}$, weil die x an Stelle der y treten, und ebenso gehen auch die übrigen Formeln von § 50. in erster Näherung in die Mecklenburgischen Formeln über, wenn man überall x und y vertauscht.

In Hinsicht auf die Verzerrung $m = 1 + \frac{x^2}{2r^2}$ hat aber Mecklenburg durch einen kleinen Kunstgriff den Maximalwert auf die Hälfte reduziert, indem ein Zwischenwert



eingeschaltet wurde gleich der Hälfte des Maximalwertes, und da bei der Ausdehnung von 0° 45′ in der Breite oder 82,5^{km} von dem Normalparallel nach Süden und nach Norden der Maximalwert $log\, m = 0.0000371$ beträgt, was 85,4^{mm} auf 1^{km} entspricht, so ist die lineare Maximalverzerrung durch jene Verschiebung in ganz Mecklenburg auf den Maximalwert von rund 4^{cm} auf 1^{km} beschränkt worden.

Die Theorie der Mecklenburgischen Projektion können wir erst in einem späteren Kapitel dieses Bandes behandeln; das amtliche Werk hierüber ist:

Grossherzoglich Mecklenburgische Landes-Vermessung. V. Teil. Die konforme Kegelprojektion und ihre Anwendung auf das trigonometrische Netz I. Ordnung. Herausgegeben im Auftrage der Grossherzoglichen Ministerien des Innern und der Finanzen, Abteilung für Domänen und Forsten, von Dr. W. Jordan, Professor an der technischen Hochschule in Hannover, Karl Mauck, Kammeringenieur in Schwerin, R. Vogeler, Kammeringenieur in Schwerin. Mit einer lithographischen Netzkarte. Schwerin 1895. Zu beziehen durch die Stiller'sche Hofbuchhandlung (J. Ritter).

Vgl. hiezu auch „Zeitschr. f. Verm. 1896", S. 257—263.

Sachsen.

Im Bereiche des Königreichs Sachsen sind auf unserer Übersichtskarte zwei Punkte, Grossenhain und Leipzig eingetragen, und zwar nach einer Mitteilung von Nagel vom 5. Mai 1889, wornach als eigentlicher Nullpunkt für Sachsen der Pfeiler für den Basis-Zwischenpunkt ist, welcher den Namen Grossenhain führt. Der Pfeiler *B.* Leipzig auf der Pleissenburg in Leipzig gilt nur als Coordinatenanfang für die Leipziger Stadt-Vermessung.

Dabei hat man in Sachsen (nach Mitteilung von Fuhrmann in der „Zeitschr. f. Verm. 1894", S. 266—270) noch eine Art Lokal-Systeme angenommen, in welchen bezirksweise wie eben gerechnet werden kann, aber mit dem Opfer des Zusammenschlusses im Ganzen.

Elsass-Lothringen.

Für die Kataster-Vermessung von Elsass-Lothringen wurden zwei Coordinaten-Nullpunkte angenommen, Delme und Sausheim, worüber eine erste Mitteilung von Vermessungs-Kontroleur Rodenbusch gemacht wurde in der „Zeitschr. f. Verm. 1888", S. 545—552. Die amtlichen Angaben hiezu sind enthalten in dem Werke: „Anweisung vom 30. Januar 1889 für das Verfahren bei der Stück-Vermessung von Gemarkungen zum Zwecke der Errichtung von Kataster-Urkunden, Strassburg 1889", S. 9.

Schlussbetrachtung.

Die Übersichtskarte der deutschen Coordinaten-Systeme und der Rückblick auf ihre allmähliche Entstehung zeigen beide ein treues Abbild der ungleichen politischen Entwicklung der einzelnen Staaten unseres Vaterlandes.

In geodätischer Beziehung haben wir diese Ungleichheit in der Vergangenheit nicht zu beklagen. Aus der 100jährigen Arbeit der *Bohnenberger*, *Soldner*, *Rheiner*, *Schleiermacher*, *Gauss*, *Paschen*, *Schreiber*, und wie sie alle heissen, ist eine solche Fülle von Erfahrungen verfügbar geworden, dass wir heute, um das richtige zu treffen, fast keine eigene Arbeit mehr aufzuwenden, sondern nur noch richtig auszuwählen brauchen.

Die Coordinaten-Systeme unserer Landesvermessungen sind von grundlegender Bedeutung für die Vermessungen selbst, für die mathematische Festlegung und für



die zeichnerische Darstellung der Vermessungs-Ergebnisse, und aus diesem Grunde ist der Wert und die Dauer einer Landesvermessung zum grössten Teil durch die mehr oder weniger gute Wahl eines Coordinaten-Systems bedingt.

Eine für die ganze Erde zu Land und zu Wasser giltige Art der Punktbestimmung durch geographische Coordinaten (geogr. Breiten und Längen) ist auch bei den Landesvermessungen immer angewendet worden, und in manchen Vermessungen wurden die geographischen Netzlinien für Längen und Breiten als einziger mathematischer Zusammenhalt genommen.

Allein diese geographischen Netzlinien liegen dem Feld- und Landmesser, der im Kleinen misst, zu fern, sie passen nicht in sein tägliches Geschäft mit rechten Winkeln, denn die Meridiane eines Landes sind zwar für das Feldmessen als Gerade zu betrachten, aber sie sind unter sich nicht parallel, und die Parallelkreise sind nicht gerade.

Der Feldmesser muss *rechtwinklige* Coordinaten haben, und zwar solche, die auf die Erdkrümmung Rücksicht nehmen und den Übergang zwischen der Kleinvermessung und den höheren geodätischen Rechnungen mit geographischen Coordinaten vermitteln.

In dieser Beziehung haben die süddeutschen Landesvermessungen, namentlich Bayern und Württemberg unter Soldner und Bohnenberger am Anfang dieses Jahrhunderts bahnbrechend gewirkt, die Systeme jener Vermessungen waren nachahmungswert, so lange man nichts besseres hatte.

Das ist nun aber der Fall seit 1866, da die Gauss sche konforme Projektion durch Wittstein-Schreiber der Öffentlichkeit übergeben ist; und im nächsten Jahrhundert wird die konforme Projektion nach Gauss schem Prinzip ebenso unbestritten als zweckmässigste für Landesvermessungen und Katasteraufnahmen gelten, wie heute die vor kaum 2 Jahrzehnten noch für „unausführbar“ erklärte Gauss sche Ausgleichung der Kataster-Dreiecksmessungen.

Zwischenbemerkung.

Mit den geographischen Coordinaten sind wir so weit in der Theorie der Geodäsie gelangt, als zum praktischen Verständnis unserer deutschen Landesvermessungen im Ganzen nötig ist.

Für weitergehende Zwecke ist nun der richtige Weg zur geodätischen Linie vorgezeigt, welche in unserem nächsten Kapitel VI. behandelt werden wird.

Wenn nun trotzdem noch in diesem Kapitel V. eine Anzahl rein sphärischer Aufgaben abgehandelt wird, so hat das den Zweck der Vorbereitung von späteren sphäroidischen Aufgaben.

Eine Aufgabe spielt dabei eine durchlaufende Rolle, nämlich Herstellung der Beziehungen zwischen den geographischen Coordinaten zweier Punkte einerseits und der Entfernung nebst den Azimuten ihrer Verbindungslinie andererseits, oder umgekehrt, in verschiedenem Zusammenhang.

Wir haben dieses früher „Hauptaufgabe der höheren Geodäsie“ genannt, werden aber nun das mehr bezeichnende Wort „*Polardreieck*“ anwenden.

Das Polardreieck spielt in der Geodäsie eine gleich wichtige Rolle wie das astronomische oder nautische Dreieck (Pol-Zenit-Stern) in der praktischen Astronomie. Auch eine von Gauss gebrauchte Bezeichnung T oder t für das Azimut und dann auch für Richtungswinkel der Geodäsie scheint auf jene Verwandtschaft hinzudeuten, indem das Azimut in dem geodätischen Polardreieck dem Stundenwinkel t des astronomischen Dreiecks entspricht.

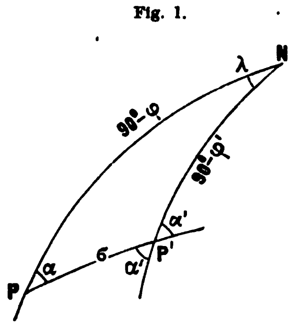
§ 60. Das sphärische Polar-Dreieck.

Wir knüpfen nochmals an den früheren § 56. an und setzen auch die Fig. 1. von S. 312 nochmals her.



Zwei Punkte P und P' haben die geographischen Breiten φ und φ' und zwischen sich den geographischen Längenunterschied λ. Der Verbindungsbogen PP' als grösster Kreisbogen hat den Wert σ als Centriwinkel am Erdmittelpunkt und die Azimute α und α' an seinen Endpunkten. Der Halbmesser der Kugel, auf welcher das Dreieck $PP'N$ liegend angenommen ist, kommt nicht in Betracht.

Fig. 1.



Unsere Aufgabe wird eine zweifache sein:

entweder ist φ , φ' , λ gegeben und σ , α , α' gesucht

oder es ist φ , σ , α gegeben und φ' , λ , α' gesucht.

Da wir uns hier nur mit der rein *sphärischen* Auflösung der fraglichen Aufgaben beschäftigen, und da wir einsehen, dass es sich in beiden Fällen nur darum handelt, ein sphärisches Dreieck aus zwei gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel aufzulösen, liegen im Grundsatz keine Schwierigkeiten vor, und es handelt sich also nur darum, die verschiedenen Auflösungs-Formen, welche die sphärische Trigonometrie für unsern Fall bietet, zu betrachten, und für unsere Zwecke zurecht zu legen (wozu Gauss in den „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie", erste Abhandlung, 1843, art. 16. und 17. die Wege gezeigt hat).

Ehe wir zu unseren Formel-Entwicklungen und zur numerischen Anwendung von sphärischen Formeln übergehen, wollen wir zwei scharf (mit 10 stelligen Logarithmen) berechnete Beispiele voraus schicken, welche in verschiedener Weise als Normal-Beispiele dienen können:

Kleines sphärisches Normal-Beispiel.
(Bezeichnungen nach Fig. 1.)

$$\left.\begin{array}{lll}
\varphi = 49^\circ\, 30'\, 0'' & \varphi' = 50^\circ\, 30'\, 0'' & \lambda = 1^\circ\; 0'\, 0'' \\
\varphi_0 = \dfrac{\varphi' + \varphi}{2} = 50^\circ\; 0'\, 0'' & \dfrac{\varphi' - \varphi}{2} = 0^\circ\, 30'\, 0'' & \dfrac{\lambda}{2} = 0^\circ\, 30'\, 0'' \\
\alpha_0 = \dfrac{\alpha' + \alpha}{2} = 32^\circ\, 44'\; 0{,}2384'' & & \alpha' - \alpha = 0^\circ\, 45'\, 57{,}89393'' \\
\dfrac{\alpha' - \alpha}{2} = \; 0^\circ\, 22'\, 58{,}9470'' & & \dfrac{\sigma}{2} = 0^\circ\, 35'\, 39{,}74093'' \\
\hline
\alpha' = 33^\circ\; 6'\, 59{,}1854'' & & \sigma = 1^\circ\, 11'\, 19{,}48186'' \\
\alpha = 32^\circ\, 21'\; 1{,}2914'' & & \sigma = 4279{,}48186''
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Grosses sphärisches Normal-Beispiel.
(Bezeichnungen nach Fig. 1.)

$$\left.\begin{array}{lll}
\varphi = 45^\circ\; 0'\, 0'' & \varphi' = 55^\circ\, 0'\, 0'' & \lambda = 10^\circ\, 0'\, 0'' \\
\varphi_0 = \dfrac{\varphi' + \varphi}{2} = 50^\circ\; 0'\, 0'' & \dfrac{\varphi' - \varphi}{2} = 5^\circ\, 0'\, 0'' & \dfrac{\lambda}{2} = 5^\circ\, 0'\, 0'' \\
\alpha_0 = \dfrac{\alpha' + \alpha}{2} = 32^\circ\, 49'\, 54{,}6437'' & & \alpha' - \alpha = 7^\circ\, 41'\, 51{,}67100'' \\
\dfrac{\alpha' - \alpha}{2} = 3^\circ\, 50'\, 55{,}8355'' & & \dfrac{\sigma}{2} = 5^\circ\, 55'\, 51{,}32153'' \\
\hline
\alpha' = 36^\circ\, 40'\, 50{,}4792'' & & \sigma = 11^\circ\, 51'\, 42{,}64306'' \\
\alpha = 28^\circ\, 58'\, 58{,}8082'' & & \sigma = 42702{,}64306''
\end{array}\right\} \quad (2)$$

I. Gegeben $\varphi, \varphi', \lambda$. Gesucht σ, α, α'.

Ia. Die Gauss schen Gleichungen der sphärischen Trigonometrie.

Wenn man die Gauss schen bzw. Neper schen Gleichungen von § 27. S. 165 auf unseren Fall anwendet, so bekommt man, ebenso wie schon bei (1) § 56. S. 312 mit den Abkürzungen φ_0 und α_0 für die Mittelwerte, folgendes:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{\sigma}{2}\sin\alpha_0 &= \cos\varphi_0 \quad \sin\frac{\lambda}{2}\\
\sin\frac{\sigma}{2}\cos\alpha_0 &= \sin\frac{\varphi'-\varphi}{2}\cos\frac{\lambda}{2}\\
\cos\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2} &= \sin\varphi_0 \quad \sin\frac{\lambda}{2}\\
\cos\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2} &= \cos\frac{\varphi'-\varphi}{2}\cos\frac{\lambda}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Wenn man die erste und zweite, dann die dritte und vierte dieser Gleichungen dividiert, und zur Abkürzung für das folgende, die Zeichen Z und N, Z' und N' für die Zähler und Nenner der entstehenden Brüche einführt, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\tang\alpha_0 &= \frac{\cos\varphi_0 \quad \sin\frac{\lambda}{2}}{\sin\frac{\varphi'-\varphi}{2}\cos\frac{\lambda}{2}} = \frac{Z}{N}\\
\sin\frac{\sigma}{2} &= \frac{Z}{\sin\alpha_0} = \frac{N}{\cos\alpha_0}
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}
\tang\frac{\alpha'-\alpha}{2} &= \frac{\sin\varphi_0 \quad \sin\frac{\lambda}{2}}{\cos\frac{\varphi'-\varphi}{2}\cos\frac{\lambda}{2}} = \frac{Z'}{N'}\\
\cos\frac{\sigma}{2} &= \frac{Z'}{\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}} = \frac{N'}{\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2}}
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Zu einem Zahlen-Beispiel nehmen wir nach (1):

$$\varphi = 49°\,30'\,0'' \qquad \varphi' = 50°\,30'\,0'' \qquad \lambda = 1°\;\;0'\,0'' \qquad (6)$$

also
$$\varphi_0 = 50°\;\;0'\,0''\;, \quad \frac{\varphi'-\varphi}{2} = 0°\,30'\,0''\;, \quad \frac{\lambda}{2} = 0°\,30'\,0''$$

Die logarithmische Rechnung giebt:

$\log Z$	7.748 9093·6	$\log Z'$	7.825 0958·3
$\log N$	7.940 8253·2	$\log N'$	9.999 9669·3
$\log \tang\alpha_0$	9.808 0840·4	$\log\tang\frac{\alpha'-\alpha}{2}$	7.825 1289·0
$\log\sin\frac{\sigma}{2}$	8.015 9282·7	$\log\cos\frac{\sigma}{2}$	9.999 9766·3

$$\alpha_0 = 32°\,44'\;\;0{,}238'' \qquad\qquad \left.\begin{aligned}\frac{\sigma}{2} &= 0°\,35'\,39{,}741''\\ \sigma &= 1°\,11'\,19{,}482''\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$\frac{\alpha'-\alpha}{2} = \;\;0°\,22'\,58{,}947''$$

$$\alpha' = 33°\;\;6'\,59{,}185''$$
$$\alpha = 32°\,21'\;\;1{,}291''$$

Von den beiden Bestimmungen für $\frac{\sigma}{2}$, nämlich aus $\sin\frac{\sigma}{2}$ und aus $\cos\frac{\sigma}{2}$ ist in diesem Falle, da σ klein ist, nur die erste scharf, während die zweite aus *cos*, nur als summarische Probe benützt werden kann.

Ib. Einzelformeln für σ, α und α'.

Zur Bestimmung von σ allein dient die Cosinusformel S. 164:

$$\cos\sigma = \sin\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi\cos\varphi'\cos\lambda \tag{8}$$

Da aber in unseren Fällen immer σ klein ist, kann man nicht geradezu nach $\cos\sigma$ rechnen; indessen kann man die vorstehende Formel leicht umformen, indem man setzt:

$$\cos\sigma = 1 - 2\sin^2\frac{\sigma}{2} \quad \text{und} \quad \cos\lambda = 1 - 2\frac{\sin^2\lambda}{2}$$

Damit findet man leicht:

$$\sin\frac{\sigma}{2} = \sqrt{\sin^2\frac{\varphi'-\varphi}{2} + \cos\varphi\cos\varphi'\sin^2\frac{\lambda}{2}} \tag{9}$$

Man rechnet dann mit einem Hilfswinkel μ ähnlich wie bei der Bestimmung einer Hypotenuse aus zwei Katheten:

$$\tang\mu = \frac{\sin\frac{\varphi'-\varphi}{2}}{\sin\frac{\lambda}{2}\sqrt{\cos\varphi\cos\varphi'}}$$

$$\sin\frac{\sigma}{2} = \frac{\sin\frac{\varphi'-\varphi}{2}}{\sin\mu} \quad \text{oder} \quad = \frac{\sin\frac{\lambda}{2}\sqrt{\cos\varphi\cos\varphi'}}{\cos\mu}$$

Unser kleines Normal-Beispiel (1) S. 338 giebt:

$\log\sin\frac{\varphi'-\varphi}{2}$	7.940 8418·6		
$\log\sin\frac{\lambda}{2}\sqrt{\ldots}$	7.748 8693·3		
$\log\tang\mu$	0.191 9725·3	$\mu = 57°\,16'\,11{,}981''$	(10)
$\log\sin\frac{\sigma}{2}$	8.015 9282·7	$\frac{\sigma}{2} = 0°\,35'\,39{,}741''$	
		$\sigma = 1°\,11'\,19{,}482''$	

Auch für die Azimute α und α' giebt die sphärische Trigonometrie unmittelbare Lösungen, nämlich nach den *cotg*-Formeln von S. 164:

$$\cotg\alpha = \frac{\tang\varphi'\cos\varphi}{\sin\lambda} - \sin\varphi\cotg\lambda \tag{11}$$

$$\cotg(\alpha' \pm 180°) = \frac{\tang\varphi\cos\varphi'}{\sin\lambda} - \sin\varphi'\cotg\lambda \tag{12}$$

Unser grosses Normal-Beispiel (2) giebt hiefür folgende Anwendung:

$\varphi = 45°\,0'$, $\quad\varphi' = 55°\,0'$, $\quad\lambda = 10°\,0'$

$\cotg\alpha = 5{,}815\,512\,455 - 4{,}010\,201\,831 = 1{,}805\,310\,624$

$$\log\cotg\alpha = 0.256\,5519{\cdot}4 \qquad \alpha = 28°\,58'\,58{,}808'' \tag{13}$$

Dagegen giebt das kleine Normal-Beispiel (1):

$$\varphi = 49° 30', \quad \varphi' = 50° 30', \quad \lambda = 1° 0'$$
$$cotg\, \alpha = 45{,}142\,3983 - 43{,}563\,6286 = 1{,}578\,7697$$
$$log\, cotg\, \alpha = 0.198\,3187{\cdot}8 \qquad \alpha = 32° 21' 1{,}290'' \tag{13 a}$$

Wenn φ und φ' nahezu gleich sind, und λ klein ist, so geben die Formeln (11) und (12) keine scharfen Bestimmungen, weil dabei eine Differenz zweier nicht sehr verschiedener Werte auszurechnen ist, wie (13 a) mit 45,14)... — 43,56... deutlich zeigt.

Man kann noch manche andere Auflösungs-Formen für die vorgelegte erste Aufgabe I. finden, wie sich aus der Analogie mit der zweiten Aufgabe II. ergeben wird, zu der wir nun übergehen.

II. Gegeben φ, σ, α. Gesucht $\varphi', \lambda, \alpha'$.

II a. Auflösung durch die Gauss schen Gleichungen.

Die Anwendung der Gauss schen bzw. Neper schen Gleichungen von S. 165 auf unseren Fall giebt:

$$\left.\begin{aligned} tang\,\frac{\alpha' + \lambda}{2} &= \frac{sin\,\dfrac{90° - \varphi + \sigma}{2}\, sin\,\dfrac{\alpha}{2}}{sin\,\dfrac{90° - \varphi - \sigma}{2}\, cos\,\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{Z}{N} \\ sin\,\frac{90° - \varphi'}{2} &= \frac{Z}{sin\,\dfrac{\alpha' + \lambda}{2}} = \frac{N}{cos\,\dfrac{\alpha' + \lambda}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} tang\,\frac{\alpha' - \lambda}{2} &= \frac{cos\,\dfrac{90° - \varphi + \sigma}{2}\, sin\,\dfrac{\alpha}{2}}{cos\,\dfrac{90° - \varphi - \sigma}{2}\, cos\,\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{Z'}{N'} \\ cos\,\frac{90° - \varphi'}{2} &= \frac{Z'}{sin\,\dfrac{\alpha' - \lambda}{2}} = \frac{N'}{cos\,\dfrac{\alpha' - \lambda}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Bei unserem kleinen Normal-Beispiel (1) ist:

Gegeben $\varphi = 49° 30' 0''$ $\quad \sigma = 1° 11' 19{,}482''$ $\quad \alpha = 32° 21' 1{,}291''$

Man hat also zur Anwendung von (14) und (15):

$$\frac{90° - \varphi + \sigma}{2} = 20° 50' 39{,}741'' \qquad \frac{\alpha}{2} = 16° 10' 30{,}646''$$

$$\frac{90° - \varphi - \sigma}{2} = 19° 39' 20{,}259''$$

$log\, Z$	8.996 1858·3	$log\, Z'$	9.415 5449·8
$log\, N$	9.509 2708·3	$log\, N'$	9.956 3857·0
$log\, tang\,\frac{\alpha' + \lambda}{2}$	9.486 9150·0	$log\, tang\,\frac{\alpha' - \lambda}{2}$	9.459 1592·8
$log\, sin\,\frac{90° - \varphi'}{2}$	9.528 8096·8	$log\, cos\,\frac{90° - \varphi'}{2}$	9.973 6708·5

$$\frac{\alpha' + \lambda}{2} = 17^\circ\, 3'\, 29{,}592''$$
$$\frac{\alpha' - \lambda}{2} = 16^\circ\, 3'\, 29{,}592''$$
$$\alpha' = 33^\circ\, 6'\, 59{,}184''$$
$$\lambda = 1^\circ\, 0'\, 0{,}000''$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{90^\circ - \varphi'}{2} &= 19^\circ\, 45'\, 0{,}000'' \\ 90^\circ - \varphi' &= 39^\circ\, 30'\, 0{,}000'' \\ \varphi' &= 50^\circ\, 30'\, 0{,}000'' \end{aligned}\right\} \qquad (15\,\text{a})$$

IIb. Einzel-Formeln für φ', α' und λ.

Zur Bestimmung von φ' aus φ, σ und α hat man die Cosinus-Formel S. 164 und für α' und λ hat man je eine der Cotangenten-Formeln (9) S. 164 anzuwenden. Man erhält auf diesem Wege folgende drei Auflösungen:

$$\sin\varphi' = \sin\varphi\cos\sigma + \cos\varphi\sin\sigma\cos\alpha \qquad (16)$$

$$\operatorname{cotg}\alpha' = \frac{\cos\sigma\cos\alpha - \sin\sigma\,\operatorname{tang}\varphi}{\sin\alpha} \qquad (17)$$

$$\operatorname{cotg}\lambda = \frac{\operatorname{cotg}\sigma\cos\varphi - \sin\varphi\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (18)$$

Zur Anwendung auf unser kleines Normal-Beispiel haben wir:

Gegeben $\varphi = 49^\circ\, 30'\, 0''$, $\sigma = 1^\circ\, 11'\, 19{,}482''$, $\alpha = 32^\circ\, 21'\, 1{,}291''$

Die Ausrechnung nach (16), (17) und (18) giebt:

$$\sin\varphi' = 0{,}760\,2423 + 0{,}011\,3823 = 0{,}771\,6246$$
$$\log\sin\varphi' = 9.887\,4061 \qquad \varphi' = 50^\circ\, 30'\, 0{,}00''$$
$$\operatorname{cotg}\alpha' = 1{,}578\,4299 - 0{,}045\,3947 = 1{,}533\,0352$$
$$\log\operatorname{cotg}\alpha' = 0.185\,5521 \qquad \alpha' = 33^\circ\, 6'\, 9{,}19''$$
$$\operatorname{cotg}\lambda = \frac{31{,}297\,9570 - 0{,}642\,3847}{\sin\alpha} = \frac{30{,}655\,5723}{\sin\alpha}$$
$$\log\operatorname{cotg}\lambda = 1.758\,0785 \qquad \lambda = 1^\circ\, 0'\, 0{,}00'' \qquad (19)$$

An diesen drei Auflösungs-Formeln ist nichts auszusetzen; sie geben φ' α' und λ einzeln mit gewöhnlicher Schärfe. Der von manchen Rechnern gescheute mehrfache Übergang von den Logarithmen zu den Zahlen und umgekehrt, kann nötigenfalls durch Benützung von Additions- und Subtraktions-Logarithmen vermieden werden.

IIc. Rechtwinklige Projektion des Nordpols auf die Seite σ.

Fig. 2.
Hilfswinkel M und m.

In Fig. 2., welche etwas anders gezogen ist als die frühere Fig. 1., aber im wesentlichen dasselbe darstellt, ist von dem Nordpol N eine Senkrechte NP_0 auf die verlängerte PP' gefällt, wodurch sowohl die Länge m dieser Senkrechten selbst, als auch die Länge PP_0 bestimmt ist, welche wir mit $90^\circ - M$ bezeichnen wollen.

Da nun das grosse rechtwinklige Dreieck PNP_0 durch unsere gegebenen φ und α vollständig bestimmt ist, und da durch Abtragen von $PP' = \sigma$ auf PP_0 auch der Punkt P', und damit das zweite kleinere rechtwinklige Dreieck $P'NP_0$, bestimmt ist, sowie auch damit das schiefwinklige Restdreieck $PP'N$, ist nun unsere ganze Aufgabe auf die Be-

handlung zweier rechtwinkliger sphärischer Dreiecke zurückgeführt, weshalb wir die nötigen Formeln (die man auch rein goniometrisch aus den Formeln (16), (17), (18) herleiten könnte) sofort in der zur Rechnung nötigen Aufeinanderfolge hier hersetzen.

Zur Bestimmung von M und m hat man:

$$\left.\begin{array}{l} tang\, M = \dfrac{\sin \varphi}{\cos \varphi \cos \alpha} \\ \cos m = \dfrac{\sin \varphi}{\sin M} \quad \text{oder} \quad \cos m = \dfrac{\cos \varphi \cos \alpha}{\cos M} \\ \sin m = \sin \alpha \cos \varphi \end{array}\right\} \tag{20}$$

Nachdem so M und m bestimmt und versichert sind, hat man weiter:

$$tang\, \alpha' = \frac{tang\, m}{\cos (M + \sigma)} \tag{21}$$

$$\sin \varphi' = \cos m \sin (M + \sigma) \qquad tang\, \varphi' = tang\, (M + \sigma) \cos \alpha' \tag{22}$$

$$\sin \lambda = \frac{\sin \sigma \sin \alpha'}{\cos \varphi} = \frac{\sin \sigma \sin \alpha}{\cos \varphi'} \tag{23}$$

Die Anwendung auf unser kleines Normal-Beispiel mit den gegebenen Werten φ, α und σ nach (1), führt auf die Hilfswinkel:

$$M = 54^\circ\, 11'\, 19{,}61'' \qquad m = 20^\circ\, 20'\, 7{,}75''$$

womit die Werte φ', α' und λ sich wie früher ergeben.

IId. Rechtwinklige Coordinaten x, y für den Punkt P'.

In Fig. 3. ist der Meridian PN gerade gezogen, und durch $P' P_1$ eine Senkrechte angedeutet, welche von P' auf den Meridian von P gefällt wurde, so dass die rechtwinkligen sphärischen Coordinaten $P P_1 = x$ und $P_1 P' = y$ zur Anschauung kommen. Diese Werte x und y sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$tang\, x = tang\, \sigma \cos \alpha \tag{24}$$

und $\sin y = \sin \sigma \sin \alpha$, $tang\, y = \sin x \, tang\, \alpha$ (25)

Mit x hat man auch $\varphi + x$ und $90^\circ - (\varphi + x)$ die Kathete $N P_1$ des grossen rechtwinkligen Dreiecks $N P_1 P'$, welches φ' und λ giebt, nämlich:

$$tang\, \lambda = \frac{tang\, y}{\cos (\varphi - \sigma)} \tag{26}$$

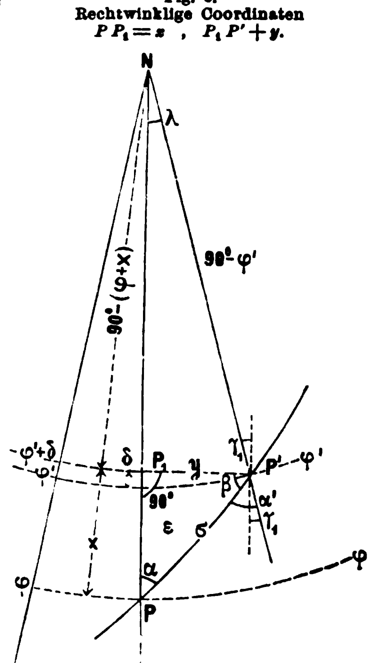
und
$$\left.\begin{array}{l} \sin \varphi' = \sin (\varphi + x) \cos y \\ tang\, \varphi' = tang\, (\varphi + x) \cos \lambda \end{array}\right\} \tag{27}$$

Endlich nach dem Sinussatze:

$$\sin \alpha' = \frac{\sin \alpha \cos \varphi}{\cos \varphi'} \tag{28}$$

Diese einfache und naheliegende Auflösung hat Gauss (in Art. 16. der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, erste Abteilung, Göttingen 1843") noch verfeinert, erstens

Fig. 3.
Rechtwinklige Coordinaten
$P P_1 = x$, $P_1 P' + y$.





dadurch, dass der kleine Breiten-Unterschied δ zwischen den Punkten P_1 und P' für sich dargestellt wurde, und zweitens dadurch, dass auch die Meridian-Konvergenz γ_1 zwischen P_1 und P' und ausserdem der sphärische Excess ε des rechtwinkligen Dreiecks $P P_1 P'$ beigezogen wurde.

Denkt man sich diese drei kleinen Werte δ, γ_1 und ε bestimmt, so ist die Breite bestimmt durch:

$$(90^\circ - \varphi') - \big(90^\circ - (\varphi + x)\big) = \delta$$

$$\varphi' = \varphi + x - \delta \tag{29}$$

ferner für die Azimute:

$$\alpha' - \gamma_1 + \beta = 90^\circ \quad \text{und} \quad \alpha + \beta = 90^\circ + \varepsilon$$

woraus:

$$\alpha' - \alpha = \gamma_1 - \varepsilon \tag{30}$$

Um den sphärischen Excess ε zu bestimmen, haben wir die schon in § 44. S. 245 benützte Entwicklung:

$$cotg\, \alpha\, cotg\, \beta = \cos \sigma = 1 - 2 \sin^2 \frac{\sigma}{2}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \sin \alpha \sin \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \sin^2 \frac{\sigma}{2}$$

$$\cos (\alpha + \beta) = - \sin \varepsilon = - 2 \sin \alpha \sin \beta \sin^2 \frac{\sigma}{2}$$

$$\sin \varepsilon = 2 \sin \alpha \frac{\sin x}{\sin \sigma} \sin^2 \frac{\sigma}{2}$$

$$\sin \varepsilon = tang \frac{\sigma}{2} \sin x \sin \alpha \tag{31}$$

Für γ_1 hat man aus dem rechtwinkligen Dreieck $N P_1 P'$:

$$tang\, (90^\circ - \gamma_1) = \frac{tang\, (90^\circ - (\varphi + x))}{\sin y}$$

$$tang\, \gamma_1 = tang\, (\varphi + x) \sin y = tang\, (\varphi + x) \sin \sigma \sin \alpha \tag{32}$$

Um auch noch δ zu bestimmen, hat man zunächst nach (29):

$$\sin \delta = \sin \big((\varphi + x) - \varphi'\big) = \sin (\varphi + x) \cos \varphi' - \cos (\varphi + x) \sin \varphi'$$

$$= \cos (\varphi + x) \cos \varphi' \big(tang\, (\varphi + x) - tang\, \varphi'\big)$$

Es ist aber in dem rechtwinkligen Dreieck $N P_1 P'$:

$$tang\, \varphi' = tang\, (\varphi + x) \cos \lambda = tang\, (\varphi + x) \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}\right)$$

und damit wird:

$$\sin \delta = 2 \sin (\varphi + x) \cos \varphi' \sin^2 \frac{\lambda}{2}$$

Wenn man hier noch γ_1 nach (32) zuzieht und $\cos \varphi' \sin \lambda = \sin y$ berücksichtigt, so erhält man:

$$\sin \delta = \cos (\varphi + x)\, tang \frac{\lambda}{2}\, tang\, \gamma_1 \tag{33}$$

Der Gang der Rechnung ist nun folgender:

Man bestimmt x und y sowie auch λ wie im einfachen Fall, nach (24), (25), (26), dann folgen ε und γ_1 nach (31) und (32) und δ nach (33), worauf man φ' und α' nach (29) und (30) zusammensetzen kann.

Die Anwendung auf unser kleines Normal-Beispiel gestaltet sich so:

Gegeben $\varphi = 49^\circ\, 30'\, 0''$ $\quad \sigma = 1^\circ\, 11'\, 19{,}482''$ $\quad \alpha = 32^\circ\, 21'\, 1{,}291''$

Nach (24), (25), (26) findet man:

$$x = 1^\circ\, 0'\, 15{,}420'' \qquad y = 0^\circ\, 38'\, 9{,}813'' \qquad \lambda = 1^\circ\, 0'\, 0{,}000''$$

Die Formeln (31), (32), (33) liefern:

$$\varepsilon = 0^\circ\, 0'\, 20{,}0687'' \qquad \gamma_1 = 0^\circ\, 46'\, 17{,}9616'' \qquad \delta = 0^\circ\, 0'\, 15{,}4199''$$

und nun setzt man so zusammen:

$$\begin{array}{rcl} \gamma_1 & = & 0^\circ\, 46'\, 17{,}9616'' \\ \varepsilon & = & 0^\circ\;\; 0'\, 20{,}0687'' \\ \hline \gamma - \varepsilon & = & 0^\circ\, 45'\, 57{,}8929'' = \alpha' - \alpha, \\ \alpha & = & 32^\circ\, 21'\;\; 1{,}291'' \\ \hline \alpha' & = & 33^\circ\;\; 6'\, 58{,}184'' \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x & = & 1^\circ\;\; 0'\, 15{,}420'' \\ \delta & = & 0^\circ\;\; 0'\, 15{,}420'' \\ \hline x - \delta & = & 1^\circ\;\; 0'\;\; 0{,}000'' \\ \varphi & = & 49^\circ\, 30'\;\; 0{,}000'' \\ \hline \varphi' & = & 50^\circ\, 30'\;\; 0{,}000'' \end{array}$$

Der Vorteil dieser Berechnung im Vergleich mit allen früher beschriebenen besteht darin, wenn σ selbst klein ist (was hier immer der Fall ist), dass dann auch alle andern, die Endergebnisse beeinflussenden Grössen x, y, γ_1, ε selbst *klein* sind, und daher aus *sin* oder *tang* sich sehr scharf berechnen lassen.

Man kann durch diese verfeinerten Formeln in Hinsicht auf Rechenschärfe, mit einer gewöhnlichen 7stelligen Logarithmentafel nahe dasselbe erreichen, wozu man mit den früheren Formeln nahezu 10stellige Logarithmen braucht.

Bemerkungen zur Meridian-Konvergenz.

Nachdem schon am Schlusse von § 45. S. 256—257 zur Wort-Erklärung und zur sachlichen Begriffsbestimmung der „Meridian-Konvergenz" das Nötigste gesagt worden ist, können wir noch mit beistehender Fig. 3. einiges zufügen:

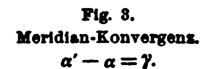
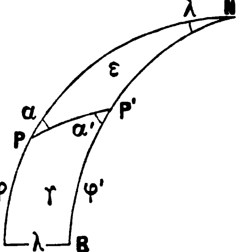


Fig. 3. Meridian-Konvergenz. $\alpha' - \alpha = \gamma$.



Die Meridian-Konvergenz $\alpha' - \alpha$ ist gleich dem sphärischen Excesse γ des Vierecks $A\,B\,P'\,P$ Fig. 3., denn da dieses Viereck bei A und B rechte Winkel hat, besteht die Gleichung:

$$90^\circ + 90^\circ + (180^\circ - \alpha) + \alpha' - 360^\circ = \gamma$$

$$\text{d. h.} \quad \alpha' - \alpha = \gamma \tag{a}$$

Bezeichnet man ferner mit ε den sphärischen Excess des Dreiecks $P\,P'\,N$, welches bei N den Längen-Unterschied λ enthält, so hat man:

$$\lambda + \alpha + (180^\circ - \alpha') - 180^\circ = \varepsilon$$

$$\text{d. h.:} \quad \lambda = (\alpha' - \alpha) + \varepsilon \quad \text{oder} \quad \alpha' - \alpha = \lambda - \varepsilon \tag{b}$$

Das letzte ist auch unmittelbar klar, indem λ der Excess des ganzen Dreiecks $A\,B\,N$ sein muss.

Diese beiden Gleichungen (a) und (b) sind sphärisch streng richtig.

Wenn die beiden Punkte P und P' auf gleichen Breiten φ und φ' liegen, so ist der Winkel, den die Meridian-Tangenten von P und P' oben in der Erdaxe einschliessen, genau gleich $\lambda \sin \varphi$, wie man aus Fig. 1. § 61. alsbald entnehmen kann; und das kann man auch so aussprechen, dass $\lambda \sin \varphi$ gleich dem sphärischen Excess des Vierecks $A\,B\,P'\,P$ ist, wenn $\varphi = \varphi'$ und wenn $P\,P'$ nicht als *Gross*kreisbogen der Kugel, sondern als *Parallel*kreisbogen, parallel dem Äquator $A\,B$ auf-

gefasst wird. Das Viereck hat dann 4 Winkel, welche alle $= 90°$ sind, aber der Parallelkreisbogen PP' hat dann eine geodätische Krümmung $= \lambda \sin \varphi$, welche bei der Kegelabwicklung sich auch in der Ebene darstellen lässt.

Im gewöhnlichen Sinne ist dieses $\lambda \sin \varphi$ aber durchaus nicht die genaue Meridian-Konvergenz $\alpha - \alpha'$ für zwei Punkte unter gleichen Breiten $\varphi' = \varphi$, denn dazu müsste PP' ein Grosskreisbogen sein.

Was in diesem Falle $\alpha' - \alpha$ wird, das lässt sich aus der Gleichung (5) S. 339 leicht entnehmen, diese giebt für $\varphi' = \varphi$ den Wert

$$\tang \frac{\alpha' - \alpha}{2} = \tang \frac{\lambda}{2} \sin \varphi \tag{c}$$

Das kann man auch unmittelbar begründen, wenn man in Fig. 1. S. 338 $\varphi' = \varphi$ nimmt und bei N den Halbierungsbogen für $\frac{\lambda}{2}$ rechtwinklig auf PP' zieht.

Die Gleichung (c) giebt allerdings in erster Näherung $\alpha' - \alpha = \lambda \sin \varphi$, wie immer in erster Näherung, aber streng gilt dieses $\lambda \sin \varphi$ nur für zwei Meridiantangenten unter den gleichen Breiten $\varphi' = \varphi$.

Um diese Begriffe auch sofort für die späteren Berechnungen mit der geodätischen Linie festzustellen, müssen wir nun im Anschluss an Fig. 1. sagen: Unter Meridian-Konvergenz zwischen zwei Punkten P und P' verstehen wir die Differenz der Azimute α und α', welche der verbindenden geodätischen Linie PP' in P und P' in dem Sinne von Fig. 3. zukommen.

Indessen eine absolut im Sprachgebrauch der Geodäsie feststehende Definition ist auch dieses nicht; wir werden später finden, dass Gauss in seiner konformen Projektion der Hannover schen Landesaufnahme mit dem Worte Meridian-Konvergenz wieder etwas anderes bezeichnet hat, was zwar in erster Näherung mit dem Gesagten übereinstimmt, aber in aller Strenge gar nicht ohne jene besondere Projektionsart definiert werden kann.

Wenn nichts Besonderes bemerkt ist, werden wir das Wort Meridian-Konvergenz in dem Sinne von $\alpha' - \alpha$ nach Fig. 3. S. 345 für PP' als geodätische Linie anwenden.

Damit kann man auch den Satz bilden, dass der sphärische bzw. sphäroidische, Excess eines geodätischen Dreiecks gleich der algebraischen Summe der drei zugehörigen Meridian-Konvergenzen ist.

§ 61. Differential-Gleichungen des sphärischen Polar-Dreiecks.

Die geschlossenen Formeln der sphärischen Trigonometrie, welche wir im vorigen § 60. behandelt haben, erfüllen nicht alle Bedürfnisse; es ist in vielen Fällen nützlich, geschlossene Formeln in Reihen aufzulösen, und der erste Schritt hiezu ist die Aufstellung von Differential-Formeln.

Wir betrachten in Fig. 1. S. 347 das schon früher benützte sphärische Dreieck $PP'N$, jedoch nehmen wir nun an, dass die Entfernung PP' der beiden betrachteten Punkte sehr *klein* $= ds$ werde, wodurch auch alle anderen Differenzen $\varphi' - \varphi$, $\alpha' - \alpha$, λ klein werden, was wir in Fig. 1. und Fig. 2. durch Differential-Zeichen $d\varphi$, $d\alpha$ u. s. w. angedeutet haben.

Wir betrachten in Fig. 1. eine Kugel mit zwei Punkten P und P', deren Entfernung $PP' = ds$ klein ist. Die Breiten dieser Punkte seien bzw. φ und $\varphi + d\varphi$, so dass die kleine Breiten-Differenz $d\varphi$ zwischen den Parallelkreisen von P und P'



erscheint. Durch die beiden Meridiane NP und NP' kommt auch der Längenunterschied $d\lambda$ zum Ausdruck und werden die Azimute des Bogens ds in P und in P' bestimmt, diese Azimute seien bzw. α und $\alpha + d\alpha$.

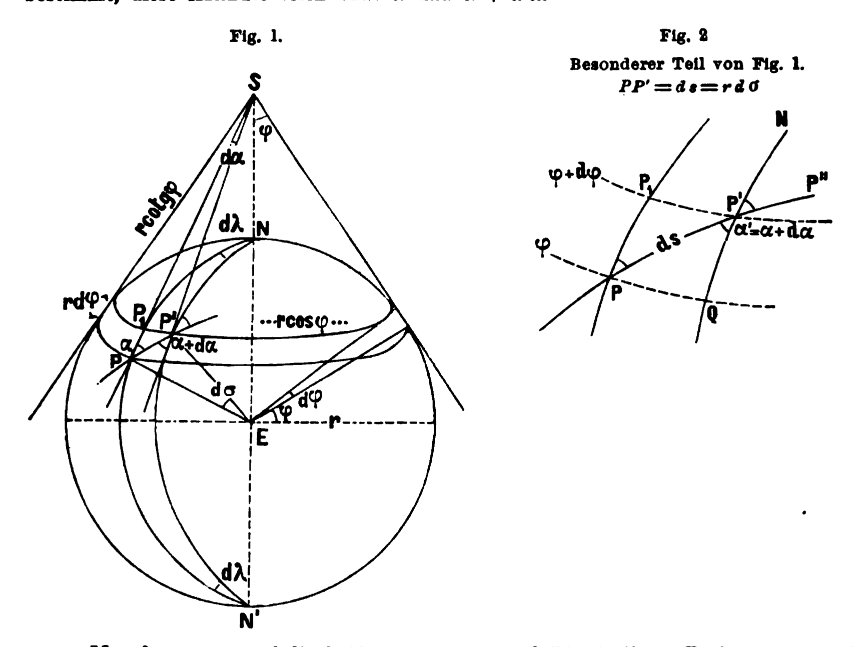


Fig. 1.

Fig. 2. Besonderer Teil von Fig. 1. $PP' = ds = r\,d\sigma$

Man kann nun auf die beiden Punkte P und P' mit ihren Breiten φ, $\varphi + d\varphi$, Azimuten α, $\alpha + d\alpha$ und ihrer Entfernung $d\sigma$ und dem Längenunterschied $d\lambda$ die allgemeinen Gaussschen Formeln (3) § 60. S. 339 anwenden; und wenn man dabei, im Sinne der Differential-Rechnung, $\sin\frac{d\sigma}{2} = \frac{d\sigma}{2}$, $\cos\frac{d\sigma}{2} = 1$ setzt u. s. w., so geben die drei ersten jener Gleichungen (3) § 60. S. 339 folgendes:

$$d\sigma \sin\alpha = d\lambda \cos\varphi \tag{1}$$

$$d\sigma \cos\alpha = d\varphi \tag{2}$$

$$d\alpha = d\lambda \sin\varphi \tag{3}$$

Dieses sind die sehr wichtigen Differential-Gleichungen des sphärisch-geodätischen Polar-Dreiecks.

Man kann diese Gleichungen (1), (2), (3) auch leicht geometrisch in Fig. 1. nachweisen, wozu zuerst das kleine, als rechtwinklig eben zu behandelnde Dreieck P_1PP', welches in Fig. 2. besonders herausgezeichnet ist, dient. Dasselbe giebt mit $r\,d\sigma = ds$:

$$ds \sin\alpha = P_1P' \tag{1a}$$

$$ds \cos\alpha = PP_1 \tag{2a}$$

Diese Gleichungen sind entsprechend (1) und (2), wozu für (2a) nur einzusehen ist, dass PP_1 ein Meridianbogen $= r\,d\varphi$ für den Halbmesser r oder kurz $= d\varphi$ für den Halbmesser 1 ist. Sodann für (1a) hat man den Parallelkreis-Halbmesser $p = r\cos\varphi$

zu betrachten (bzw. $= r \cos(\varphi + d\varphi)$, welcher mit $r = 1$ und für den Längen-Unterschied $d\lambda$ den Parallelkreis-Bogen $P_1 P' = d\lambda \cos\varphi$ giebt.

Während die zwei ersten Gleichungen (1) und (2) sich geradezu aus dem kleinen rechtwinkligen Dreieck $P P_1 P'$ geometrisch herleiten lassen, ist zur geometrischen Begründung der dritten Gleichung (3) die Betrachtung der Meridian-Tangenten PS und $P'S$ nötig. Insofern $P P_1$ unendlich klein ist, schneiden sich diese beiden Tangenten in einem Punkte S der Erdaxe und bilden dort den Winkel $d\alpha$, wie aus dem geradlinigen Dreiecke $S P P'$ folgt.

In dem langen gleichschenkligen Dreiecke $P_1 P' S$ hat man

$$d\alpha = \frac{P_1 P'}{P_1 S}$$

Hier ist, wie schon erwähnt, der Parallelbogen $P_1 P' = r \cos\varphi\, d\lambda$ und die Tangentenlänge $P_1 S$ findet sich $= r \operatorname{cotg}\varphi$; es ist also:

$$d\alpha = \frac{r \cos\varphi\, d\lambda}{r \operatorname{cotg}\varphi} = d\lambda \sin\varphi \tag{3a}$$

womit die Gleichung (3) begründet ist.

Die Meridian-Konvergenz $d\alpha$ ist die Differenz der Azimute des Grosskreis-Bogens $P P'$ in P und in P', d. h. in der besonders herausgezeichneten Fig. 2. ist:

$$d\alpha = \alpha' - \alpha \tag{4}$$

wobei α' sowohl $= P P' Q$ als auch $= N P' P''$ ist, indem die *beiden* mit α' bezeichneten Schnittwinkel in P' für einen Grosskreis-Bogen $P P' P''$ gleich sind.

Nachdem wir so die wichtigen Differential-Grundformeln nach allen Beziehungen erörtert haben, wollen wir auch noch eine praktische Anwendung derselben machen.

Wenn man die Differential-Formeln (1), (2), (3) auf endliche Differenzen anwendet und dabei statt der allgemeinen Werte φ und α die Mittelwerte φ_0 und α_0 setzt, so hat man aus (1), (2), (3):

$$\frac{\varphi + \varphi'}{2} = \varphi_0 \qquad \sigma \sin\alpha_0 = \lambda \cos\varphi_0 \tag{5}$$

$$\frac{\alpha + \alpha'}{2} = \alpha_0 \qquad \sigma \cos\alpha_0 = \varphi' - \varphi \tag{6}$$

$$\alpha' - \alpha = \lambda \sin\varphi_0 \tag{7}$$

Dieses sind wieder dieselben Gleichungen wie (2)—(3) § 56. S. 312.

Aus (5) und (6) findet man:

$$\operatorname{tang}\alpha_0 = \frac{\lambda \cos\varphi_0}{\varphi' - \varphi} \tag{8}$$

$$\sigma = \frac{\lambda \cos\varphi_0}{\sin\alpha_0} \quad \text{oder} \quad = \frac{\varphi' - \varphi}{\cos\alpha_0} \tag{9}$$

Man kann auch unmittelbar σ durch Quadrieren und Addieren von (5) und (6) finden:

$$\sigma = \sqrt{(\varphi' - \varphi)^2 + (\lambda \cos\alpha_0)^2} \tag{10}$$

Nachdem $\alpha' + \alpha = 2\alpha_0$ aus (8) und $(\alpha' - \alpha)$ aus (7) berechnet sind, hat man auch α' und α.

Wir wollen diese Näherungs-Formeln auf unser kleines sphärisches Normal-Beispiel anwenden:

Gegeben $\varphi = 49°\,30' \quad \varphi' = 50°\,30' \quad \lambda = 1°\,0' = 3600''$

$\varphi_0 = 50°\,0' \quad \varphi' - \varphi = 1°\,0' = 3600''.$

Aus (8) findet man: $\alpha_0 = 32° \, 43' \, 56{,}67''$ (11)

Aus (7) findet man: $\frac{\alpha' - \alpha}{2} = \;\; 0° \, 22' \, 58{,}88''$ (12)

$\alpha' = 33° \;\; 6' \, 55{,}55''$ (13)

$\alpha = 32° \, 20' \, 57{,}79''$ (14)

Aus (10) findet man: $\sigma = 4279{,}57'' = 1° \, 11' \, 19{,}57''$ (15)

Die im vorigen § 60. mehrfach berechneten genaueren Werte sind:

$$\alpha' = 33° \, 6' \, 59{,}19'' \quad , \quad \alpha = 32° \, 21' \, 1{,}29'' \quad , \quad \sigma = 1° \, 11' \, 19{,}48'' \tag{16}$$

Bei σ beträgt der Fehler des Näherungswertes (15) nur 0,09″. Die bequemen Näherungsformeln (5)—(10) sind zu manchen Berechnungen unmittelbar zu brauchen, z. B. in der Kartographie und überhaupt in Fällen, wo es nicht auf äusserste Schärfe ankommt.

Indessen werden wir nun zur Aufstellung genauerer Formeln dieser Art übergehen.

§ 62. Reihen-Entwicklungen mit der Mittelbreite.

Wir nehmen die Gaussschen Gleichungen (3) § 60. S. 339 nochmals vor; wir wollen jedoch die Bezeichnungen nun ein wenig anders wählen, nämlich nach Andeutung von untenstehender Fig. 1.

$$\text{Breiten: } \varphi_1 \text{ und } \varphi_2 \quad , \quad \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi \quad , \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \beta \tag{1}$$

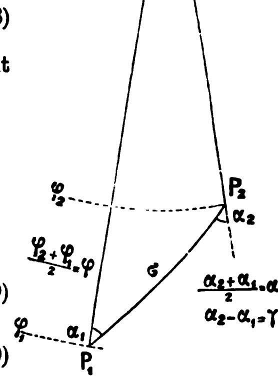
$$\text{Azimute: } \alpha_1 \text{ und } \alpha_2 \quad , \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = \alpha \quad , \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \gamma \tag{2}$$

Längen-Unterschied: λ (3)

Verbindungs-Bogen: σ (4)

Damit werden die Gleichungen (3) § 60 S. 339:

Fig. 1.



$$\sin\frac{\sigma}{2}\sin\alpha = \sin\frac{\lambda}{2}\cos\varphi \tag{5}$$

$$\sin\frac{\sigma}{2}\cos\alpha = \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\lambda}{2} \tag{6}$$

$$\cos\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\lambda}{2}\sin\varphi \tag{7}$$

$$\cos\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\beta}{2} \tag{8}$$

Wir nehmen zuerst (5) und (6), welche entwickelt geben:

$$\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48}\right)\sin\alpha = \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^3}{48}\right)\cos\varphi$$

$$\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48}\right)\cos\alpha = \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\beta^3}{48}\right)\left(1 - \frac{\lambda^2}{8}\right)$$

Kürzer geschrieben:

$$\sigma\sin\alpha\left(1 - \frac{\sigma^2}{24}\right) = \lambda\cos\varphi\left(1 - \frac{\lambda^2}{24}\right) \tag{9}$$

$$\sigma\cos\alpha\left(1 - \frac{\sigma^2}{24}\right) = \beta\left(1 - \frac{\beta^2}{24}\right)\left(1 - \frac{\lambda^2}{8}\right) \tag{10}$$

Hier kann man in den Korrektionsgliedern als erste Näherung setzen:

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi \tag{11}$$

Wenn man dieses in (9) und (10) links einsetzt, und dann nach $\sigma \sin \alpha$ und $\sigma \cos \alpha$ auflöst und ordnet, so findet man:

$$\sigma \sin \alpha = \lambda \cos \varphi \left(1 + \frac{\beta^2}{24} - \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24}\right) \tag{12}$$

$$\sigma \cos \alpha = \beta \left(1 - \frac{\lambda^2}{8} + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{2}\right) \tag{13}$$

Durch Division dieser zwei Gleichungen findet man $tang\, \alpha$, und dann σ aus jeder einzeln. Man kann jedoch auch (12) und (13) quadrieren und addieren, und damit eine unmittelbare Formel für σ^2 finden, nämlich:

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{12}(-3\beta^2\lambda^2 + 2\beta^2\lambda^2 \cos^2\varphi - \lambda^4 \cos^2\varphi \sin^2\varphi) \tag{14}$$

oder

$$\sigma = \sqrt{\beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi}\left(1 - \frac{\beta^2\lambda^2}{8\sigma^2} + \frac{\beta^2\lambda^2\cos^2\varphi}{12\sigma^2} - \frac{\lambda^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{24\sigma^2}\right) \tag{14a}$$

Man kann diese Formel auch leicht aus (9) § 60. S. 348 herleiten.

Um auch die Meridian-Konvergenz zu erhalten, bilden wir zunächst aus (7) und (8) durch Division:

$$tang \frac{\gamma}{2} = tang \frac{\lambda}{2} \frac{\sin \varphi}{\cos \frac{\beta}{2}}$$

Dieses ebenso wie das frühere entwickelt, giebt:

$$\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^3}{24} = \sin \varphi \frac{\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^3}{24}}{1 - \frac{\beta^2}{8}} = \frac{\sin \varphi}{2}\left(\lambda + \frac{\lambda^3}{12}\right)\left(1 + \frac{\beta^2}{8}\right)$$

Erste Näherung $\gamma = \lambda \sin \varphi$, also $\gamma^3 = \lambda^3 \sin^3 \varphi + \ldots$

$$\gamma = -\frac{\lambda^3 \sin^3 \varphi}{12} + \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{12} + \frac{\beta^2}{8}\right)$$

$$\alpha' - \alpha = \gamma = \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{\beta^2}{8} + \frac{\lambda^2}{12}\cos^2 \varphi\right) \tag{15}$$

In diesen Formeln ist nach analytischem Masse gerechnet, und wenn man die kleinen Winkel in Sekunden haben will, muss man alle quadratischen Glieder in den Klammern durch ϱ^2 dividieren. Dieses giebt für (12), (13) und (15) die folgenden Gebrauchsformeln:

$$\sigma \sin \alpha = \lambda \cos \varphi \left(1 + \frac{\beta^2}{24\varrho^2} - \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24\varrho^2}\right) \tag{16}$$

$$\sigma \cos \alpha = \beta \left(1 - \frac{\lambda^2}{8\varrho^2} + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{24\varrho^2}\right) \tag{17}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \gamma = \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{\beta^2}{8\varrho^2} + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{12\varrho^2}\right) \tag{18}$$

Durch Division von (16) und (17) findet man auch:

$$tang\, \alpha = \frac{\lambda \cos \varphi}{\beta}\left(1 + \frac{\beta^2}{24\varrho^2} + \frac{\lambda^2}{12\varrho^2}\right) \tag{19}$$

Die konstanten Coëfficienten zu den vorstehenden Formeln sind:

$$log\,\frac{1}{8\varrho^2} = 8.468\,0597 \qquad log\,\frac{1}{12\varrho^2} = 8.291\,9685 \qquad log\,\frac{1}{24\varrho^2} = 7.990\,9385 \qquad (20)$$

Man kann die vorstehenden Formeln (17), (18), (19) auch logarithmisch anwenden, nämlich in dieser Form:

$$log\,\sigma\,sin\,\alpha = log\,\lambda\,cos\,\varphi + \frac{\mu}{24\varrho^2}\beta^2 - \frac{\mu}{24\varrho^2}\lambda^2\,sin^2\varphi \qquad (21)$$

$$log\,\sigma\,cos\,\alpha = log\,\beta - \frac{\mu}{8\varrho^2}\lambda^2 + \frac{\mu}{24\varrho^2}\lambda^2\,cos^2\varphi \qquad (22)$$

$$log\,\gamma = log\,\lambda\,sin\,\varphi + \frac{\mu}{8\varrho^2}\lambda^2 + \frac{\mu}{12\varrho^2}\lambda^2\,cos^2\varphi \qquad (23)$$

Man braucht dann statt (20) folgende Konstanten für 7. Logar.-Stelle:

$$log\,\frac{\mu}{8\varrho^2} = 5{\cdot}105\,8441 \qquad log\,\frac{\mu}{12\varrho^2} = 4{\cdot}929\,7528 \qquad log\,\frac{\mu}{24\varrho^2} = 4{\cdot}628\,7228 \qquad (24)$$

Wir wollen dieses Rechen-Verfahren auf unser kleines Normalbeispiel (1) § 60 S. 338 anwenden und zwar zuerst mit den Formeln (16), (17), (18).

Gegeben $\varphi_1 = 49°\,30'$ $\quad \varphi_2 = 50°\,30'$ $\quad \lambda = 1°\,0'$
also $\varphi = 50°\;\;0'$ $\quad \beta = 1°\,0' = 3600''$ $\quad \lambda = 3600''$

Die Rechnung nach (16), (17), (18) giebt:

$\lambda\,cos\,\varphi = 2314{,}0352''$	$\beta = 3600{,}0000''$	$\lambda\,sin\,\varphi = 2757{,}7600''$
$+\,0{,}0294$	$-\,0{,}1371$	$+\,0{,}1050$
$-\,0{,}0172$	$+\,0{,}0189$	$+\,0{,}0289$
$\sigma\,sin\,\alpha = 2314{,}0474''$	$\sigma\,cos\,\alpha = 3599{,}8818''$	$\gamma = 2757{,}8939''$
		$\gamma = 0°\,45'\,57{,}8939''$

$$\alpha = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = 32°\,44'\;\;0{,}2385'' \qquad \sigma = 4279{,}4819''$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = \;\;0°\,22'\,58{,}9470'' \qquad \sigma = 1°\,11'\,19{,}4819''$$

$$\alpha_2 = 33°\;\;6'\,59{,}1855''$$
$$\alpha_1 = 32°\,21'\;\;1{,}2915''$$

Ausserdem kann man auch die logarithmischen Formeln (21), (22), (23) anwenden, wobei man dasselbe, wie soeben, nur in anderer Form, bekommt, nämlich:

$log\,\lambda\,cos\,\varphi$	3.364 3700·0	$log\,\beta$	3.556 3025·0	$log\,\lambda\,sin\,\varphi$	3.440 5564·7
	+ 55·1		− 165·4		+ 165·4
	− 32·3		+ 22·8		+ 45·5
$log\,\sigma\,sin\,\alpha$	3.364 3722·8	$log\,\sigma\,cos\,\alpha$	3.556 2882·4	$log\,\gamma$	3.440 5775·6

Wenn man damit weiter rechnet, so bekommt man dieselben Werte α, σ, γ u. s. w. wie vorhin.

Wenn man etwa σ selbst nicht braucht, so rechnet man $tang\,\alpha$ geradezu aus der Formel (19), welche in unserem Falle giebt:

$$log\,tang\,\alpha = 9.808\,0675{\cdot}0 + 165{\cdot}4 = 9.808\,0840{\cdot}4.$$

Dieses stimmt, wie es sein soll, mit der Differenz von $log\,\sigma\,sin\,\alpha$ und $log\,\sigma\,cos\,\alpha$.



Wir haben auch noch die Formel (14 a) auf das kleine Normalbeispiel mit $\beta = 1^\circ$, $\lambda = 1^\circ$, $\varphi = 50^\circ$ angewendet und gefunden:

$$\sigma = 4279{,}5747'' - 0{,}1153'' - 0{,}0093'' + 0{,}0318'' = 4279{,}4819'' = 1^\circ\, 11'\, 19{,}4819''$$

Man kann auch hier die Korrektionsglieder in logarithmischer Form berechnen.

Umkehrung der Formeln.

Man kann die Formeln (16), (17), (18) nicht bloss zur Bestimmung von σ, α_1, α_2 bei gegebenem φ_1, φ_2, λ anwenden, sondern auch umgekehrt dazu, um bei gegebenen φ_1, σ, α_1 die fehlenden φ_2, λ, α_2 zu berechnen. Allerdings geht dieses nur auf indirektem Wege, indem Näherungs-Werte der Unbekannten benützt und allmählich verbessert werden.

Auch sind dann einige Umformungen von (16), (17), (18) vorzunehmen; wir bilden zuerst durch Division von (16) und (18):

$$\gamma = \sigma \sin \alpha \operatorname{tang} \varphi \left(1 + \frac{\beta^2}{8\varrho^2} + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{12\varrho^2} - \frac{\beta^2}{24\varrho^2} + \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24\varrho^2}\right)$$

In den Korrektionsgliedern gilt aber die erste Näherung

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi$$

und damit giebt das vorstehende:

$$\gamma = \sigma \sin \alpha \operatorname{tang} \varphi \left(1 + \frac{\sigma^2}{12\varrho^2} + \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24\varrho^2}\right) \tag{25}$$

(17) und (16) geben umgestellt:

$$\beta = \sigma \cos \alpha \left(1 + \frac{\lambda^2}{8\varrho^2} - \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{24\varrho^2}\right) \tag{26}$$

$$\lambda = \sigma \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} \left(1 - \frac{\beta^2}{24\varrho^2} + \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24\varrho^2}\right) \tag{27}$$

Man kann diese Gleichungen auch in logarithmischer Form anwenden, ähnlich wie (21), (22), (23), was wir aber hier nicht mehr besonders schreiben wollen.

Zu einer Zahlen-Anwendung wollen wir von unserem kleinen Normalbeispiel (1) § 60. S. 338 annehmen:

$$\text{Gegeben} \quad \varphi_1 = 49^\circ\, 30'\, 0'' \quad , \quad \sigma = 1^\circ\, 11'\, 19{,}482'' \quad , \quad \alpha_1 = 32^\circ\, 21'\, 1{,}291'' \tag{28}$$

Für φ_2 und λ habe man von irgend wo her, z. B. von einer topographischen Karte, die Näherungswerte:

$$(\varphi_2) = 50^\circ\, 30'\, 10'' \quad , \quad \lambda = 1^\circ\, 0'\, 10'' = 3610'' \tag{29}$$

Nun nimmt man aus φ_1 und (φ_2) den genäherten Mittelwert $(\varphi) = 50^\circ\, 0'\, 5''$ und rechnet mit $(\lambda) = 3610''$, erstmals genähert $(\gamma) = (\lambda) \sin (\varphi) = 2765{,}48'' = 0^\circ\, 46'\, 5{,}48''$; davon die Hälfte zu α_1 nach (28) addiert, giebt die erste Näherung für α: $\quad (\alpha) = 32^\circ\, 44'\, 4''$.

Nun rechnet man mit $(\varphi) = 50^\circ\, 0'\, 5''$ und $(\alpha) = 32^\circ\, 44'\, 4''$ und mit dem genau gegebenen $\sigma = 4279{,}482''$ die Hauptglieder der Formeln (25), (26), (27) aus, und erhält:

$$(\gamma) = 2757{,}93'' \qquad (\beta) = 3599{,}76'' \qquad (\lambda) = 3600{,}14'' \tag{30}$$
$$= 0^\circ\, 45'\, 57{,}93''$$

Mit diesem (γ) bildet man ein neues

$$(\alpha) = \alpha_1 + \frac{(\gamma)}{2} = 32^\circ\, 44'\, 0{,}25'' \tag{31}$$

Nun sind die Näherungen (β) und (λ) in (30) jedenfalls vollauf genügend zur Berechnung der *Korrektions-Glieder* in (25), (26), (27), und für die Haupt-Glieder hat man ausser dem gegebenen σ die bereits sehr gute Näherung (31), weshalb man die Ausrechnung nach (25), (26), (27) bereits fast endgiltig machen kann. Wenn hiebei γ und β nicht völlig übereinstimmend erhalten werden mit den in beiden Hauptgliedern $\sigma \sin\alpha \operatorname{tang}\varphi$ und $\sigma \cos\alpha$ benützten Werten γ und β, so muss man die Rechnung mit verbesserten α und φ so lange wiederholen, bis völlige Übereinstimmung stattfindet.

Andere Form der Korrektions-Glieder.

Da in den Haupt-Gliedern nur α und φ, aber nicht λ vorkommt, kann man die allmähliche Verbesserung der Näherungswerte auf diese zwei Elemente, bezw. auf γ und β, beschränken; allerdings bei der *ersten* Näherung wird man λ nicht entbehren können, weil eine erste Näherung für γ wohl kaum anders als durch $\lambda \sin\varphi$ zu erhalten sein wird; hat man aber einmal eine solche erste Näherung für γ, so führt man diese auch möglichst unmittelbar in die Korrektions-Glieder ein. Dieses geschieht durch die Näherungs-Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2\varphi \quad , \quad \gamma^2 = \lambda^2 \sin^2\varphi \\ \text{also auch} \qquad \sigma^2 + \gamma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \end{array}\right\} \tag{32}$$

Damit schreibt man die Gleichungen (26) und (25) für unseren neuen Zweck so:

$$\beta = \sigma \cos\alpha \left(1 + \frac{\gamma^2}{24\,\varrho^2} + \frac{\lambda^2}{12\,\varrho^2}\right) \tag{33}$$

$$\gamma = \sigma \sin\alpha \operatorname{tang}\varphi \left(1 + \frac{\sigma^2}{12\,\varrho^2} + \frac{\gamma^2}{24\,\varrho^2}\right) \tag{34}$$

oder auch in logarithmischer Form, ähnlich wie (21), (22), (23).

Diese Gleichungen (33) und (34) geben nun eine indirekte Auflösung für φ_2 und α_2 bezw. für β und γ, ähnlich wie dieses schon bei (25), (26), (27) gezeigt wurde; die dritte Grösse λ kommt bei (33) und (34) nur in einem Korrektions-Gliede vor und wird, nachdem β und γ gefunden sind, endgiltig durch die frühere Gleichung (27) bestimmt.

Das in vorstehendem beschriebene indirekte Berechnungs-Verfahren ist sehr genau, dasselbe ist auch (gegen erstes Vermuten) sehr bequem.

Gauss selbst sagt hierüber in Art. 20. der Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie zweite Abhandlung: „Die Bequemlichkeit dieses Verfahrens wird allerdings erst dann in ihrer vollen Grösse fühlbar, wenn man sich die Hilfen des kleinen Mechanismus bei Handhabung derartiger Methoden zu eigen gemacht hat. Ich begnüge mich, hier nur anzudeuten, dass, was wie eine mehrfache Rechnung erscheint, nicht in der Form von mehreren getrennten Rechnungen, sondern wie eine einzige geschrieben werden soll, indem man bei jeder neuen Überarbeitung nur die letzten Ziffern ergänzt oder verbessert. Jedenfalls braucht man immer nur die letzte Rechnung aufzubewahren, und gerade darin besteht ein grosser Vorteil, zumal bei Messungen von bedeutendem Umfang, dass man dann den ganzen wesentlichen Kern der Berechnung für alle Dreiecksseiten im möglichst kleinen Raume und in der übersichtlichsten zu beliebiger Prüfung der Richtigkeit geeigneten Form besitzt."

§ 63. Weiter-Entwicklung bis zur 5. Ordnung.

(Bezeichnungen nach Fig. 1. S. 349.)

Man kann die vorstehenden Entwicklungen, welche bis zur 3. Ordnung, d. h. bis zu Gliedern β^3, λ^3 u. s. w. gehen, noch um eine Stufe weiter, d. h. bis β^5, λ^5 u. s. w. treiben. Allerdings hat das keinen unmittelbar praktischen Zweck, denn die Formeln werden dadurch so umständlich, dass man vorziehen müsste, nach den strengen geschlossenen Formeln der sphärischen Trigonometrie zu rechnen; indessen bietet die Entwicklung der Glieder 5. Ordnung das beste Mittel zur Gewinnung eines Urteils über die Grenzen der Anwendung der abgekürzten Formeln, und diese sphärischen Glieder 5. Ordnung werden auch später bei der analogen sphäroidischen Aufgabe von Bedeutung sein.

Wir nehmen nun von den strengen Gaussschen Gleichungen (5)—(8) § 62. S. 349 nochmals zunächst die zwei ersten vor:

$$\sin\frac{\sigma}{2}\sin\alpha = \sin\frac{\lambda}{2}\cos\varphi \tag{1}$$

$$\sin\frac{\sigma}{2}\cos\alpha = \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\lambda}{2} \tag{2}$$

Diese entwickeln wir nun bis zur 5. Ordnung (vgl. S. 172):

$$\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48} + \frac{\sigma^5}{3840}\right)\sin\alpha = \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^3}{48} + \frac{\lambda^5}{3840}\right)\cos\varphi \tag{3}$$

$$\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48} + \frac{\sigma^5}{3840}\right)\cos\alpha = \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\beta^3}{48} + \frac{\beta^5}{3840}\right)\left(1 - \frac{\lambda^2}{8} + \frac{\lambda^4}{384}\right) \tag{4}$$

Um diese Gleichungen nach $\sigma\sin\alpha$ und $\sigma\cos\alpha$ aufzulösen, denken wir uns links abgesondert:

$$\frac{\sigma}{2}\left(1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{\sigma^4}{1920}\right) = 1 - x, \quad \text{d. h.} \quad x = \frac{\sigma^2}{24} - \frac{\sigma^4}{1920}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 = 1 + \frac{\sigma^2}{24} + \frac{7\,\sigma^4}{5760} \tag{5}$$

Hier ist nach (14) § 62. S. 350:

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2\cos^2\varphi - \frac{\beta^2\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{12} + \frac{\beta^2\lambda^2}{6}\cos^2\varphi \tag{6}$$

also
$$\sigma^4 = \beta^4 + \lambda^4\cos^4\varphi + 2\,\beta^2\lambda^2\cos^2\varphi \tag{7}$$

Wenn man diese (6) und (7) in (5) einsetzt, und damit die rechten Seiten von (3) und (4) multipliziert, so erhält man die gewünschten Ausdrücke für $\sigma\sin\alpha$ und $\sigma\cos\alpha$. Ebenso kann man auch die Reihe für die Meridian-Konvergenz γ finden, und durch $\sigma^2\sin^2\alpha + \sigma^2\cos^2\alpha$ hat man auch eine Reihe für σ^2 unmittelbar.

Da der Weg aller dieser Entwicklungen genügend gezeigt ist, schreiben wir sofort die Ergebnisse, und zwar zunächst:

$$\sigma\sin\alpha = \lambda\cos\varphi\left\{1 + \frac{1}{24}(\beta^2 - \lambda^2 + \lambda^2\cos^2\varphi)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{5760}(7\beta^4 - 70\beta^2\lambda^2 + 3\lambda^4 + 54\beta^2\lambda^2\cos^2\varphi + 7\lambda^4\cos^4\varphi - 10\lambda^4\cos^2\varphi - 20\lambda^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\right\} \tag{8}$$

Ehe wir auch die Formeln für $\sigma \cos \alpha$ u. s. w. anschreiben, wollen wir eine bestimmte Ordnung der Glieder einführen und zur Abkürzung zwei neue Zeichen schreiben. Die Faktoren $\cos^2 \varphi$ und $\sin^2 \varphi$ kann man jedenfalls alle in $\cos^2 \varphi$ ausdrücken, und da dieselben immer in Verbindung mit λ^2 auftreten, stellen wir überall gleiche Potenzen von λ^2 und von $\cos^2 \varphi$ hervor, indem z. B. gesetzt wird:

$$\lambda^4 \cos^2 \varphi = \lambda^4 \cos^4 \varphi \, (1 + \tang^2 \varphi) \tag{9}$$

Der Parallel-Kreisbogen $\lambda \cos \varphi$ werde besonders bezeichnet, indem wir setzen:

$$\lambda \cos \varphi = p \quad \text{und} \quad \tang \varphi = t \tag{10}$$

Damit bekommen wir eine neue Schreibung der ersten Formel (8), und fügen sofort auch die übrigen Formeln dieser Art bei:

$$\sigma \sin \alpha = p \left\{ 1 + \frac{\beta^2 - p^2 t^2}{24} + \frac{7 \beta^4 - 2 \beta^2 p^2 (8 + 35 t^2) - 3 p^4 (8 t^2 - t^4)}{5760} \right\} \tag{11}$$

$$\sigma \cos \alpha = \beta \left\{ 1 - \frac{p^2 (2 + 3 t^2)}{24} + \frac{-4 \beta^2 p^2 (4 + 15 t^2) + p^4 (-8 - 20 t^2 + 15 t^4)}{5760} \right\} \tag{12}$$

$$\gamma = \quad p t \left\{ 1 + \frac{3 \beta^2 + 2 p^2}{24} + \frac{75 \beta^4 + 60 \beta^2 p^2 (1 - 2 t^2) + 24 p^4 (2 - t^2)}{5760} \right\} \tag{13}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 = (\beta^2 + p^2) &- \frac{\beta^2 p^2 (1 + 3 t^2) + p^4 t^2}{12} \\ &- \frac{2 \beta^4 p^2 (1 + 15 t^2) + 2 \beta^2 p^4 (1 + 10 t^2 - 15 t^4) + p^6 (5 + 12 t^2 - 4 t^4)}{2440} \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

Die Formeln (11) und (12) für $\sigma \sin \alpha$ und $\sigma \cos \alpha$ wird man lieber in logarithmischer Form haben wollen, man kann daher dieselben entwickeln nach der Formel:

$$\log (1 + x) = \mu \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \tag{15}$$

$$\log \left(1 + \frac{A^2}{24} + \frac{B^4}{5760} \right) = \mu \left(\frac{A^2}{24} + \frac{1}{2} \, \frac{B^4 - 5 A^4}{2880} \right)$$

Auf diese Weise bekommt man, zugleich mit Zusetzung der nötigen ϱ, folgende Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \log \sigma \sin \alpha = \log p &+ \frac{\mu}{24 \varrho^2} (\beta^2 - p^2 t^2) \\ &+ \frac{\mu}{2880 \varrho^4} \left(\beta^4 - 2 \beta^2 p^2 (4 + 15 t^2) - p^4 (12 t^2 + t^4) \right) \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

$$\left. \begin{aligned} \log \sigma \cos \alpha = \log \beta &- \frac{\mu}{24 \varrho^2} p^2 (2 + 3 t^2) \\ &- \frac{\mu}{2880 \varrho^4} \left(2 \beta^2 p^2 (4 + 15 t^2) + p^4 (14 + 40 t^2 + 15 t^4) \right) \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

Hiebei hat man die Konstanten für β und p in Sekunden und für Einheiten der 7. Logarithmen-Stelle:

$$\log \frac{\mu}{24 \varrho^2} = 4{\cdot}628\,7228 \qquad \log \frac{\mu}{2880 \varrho^4} = 1{\cdot}920\,691 - 10 \tag{18}$$

Die höheren Glieder in (16) und (17) kann man in dieser Form schreiben:

$$\Delta (\log \sigma \sin \alpha) = I \beta^4 - II \beta^2 \lambda^2 - III \lambda^4 \quad \text{(5. Ordnung)} \tag{19}$$

$$\Delta (\log \sigma \cos \alpha) = \qquad - IV \beta^2 \lambda^2 - V \lambda^4 \quad \text{(5. Ordnung)} \tag{20}$$

Die Coëfficienten *I*, *II* u. s. w. haben wir für verschiedene Breiten φ ausgerechnet, wie aus folgender Tabelle zu entnehmen ist, wobei jedoch β und λ nicht wie bei (18) in Sekunden, sondern für (19) und (20) in Graden zu nehmen sind.

(21)

φ	*log I*	*log II*	*log III*	*log IV*	*log V*
40°	6·1459	7·3786	6·6345	7·3786	7·3784
45°	6·1459	7·4247	6·6578	7·4247	7·3827
50°	6·1459	7·4663	6·6583	7·4663	7·3828
55°	6·1459	7·5031	6·6371	7·5031	7·3789
60°	6·1459	7·5351	6·5950	7·5351	7·3716

Ferner haben wir für eine Breite, $\varphi = 50°$, die Glieder ausgerechnet, indem der Reihe nach β und $\lambda = 2°, 4°, 6°, 8°, 10°$ gesetzt wurde. Die Ergebnisse dieser Ausrechnung zeigen folgende zwei Tabellen:

Δ (log σ sin α), nach Formel (19), 5. Ordnung, für $\varphi = 50°$.

(22)

$\beta =$	$\lambda = 2°$	$\lambda = 4°$	$\lambda = 6°$	$\lambda = 8°$	$\lambda = 10°$
2°	− 0·058	− 0·304	− 1·012	− 2·615	− 5·724
4°	− 0·157	− 0·831	− 2·239	− 4·826	− 9·198
6°	− 0·247	− 1·621	− 4·201	− 8·426	− 14·902
8°	− 0·184	− 2·540	− 6·759	− 13·279	− 22·708
10°	+ 0·221	− 3·399	− 9·726	− 19·196	− 32·416

Δ (log σ cos α), nach Formel (20), 5. Ordnung, für $\varphi = 50°$.

(23)

$\beta =$	$\lambda = 2°$	$\lambda = 4°$	$\lambda = 6°$	$\lambda = 8°$	$\lambda = 10$
2°	− 0·085	− 0·805	− 3·551	− 10·640	− 25·314
4°	− 0·225	− 1·368	− 4·814	− 12·887	− 28·824
6°	− 0·460	− 2·303	− 6·921	− 16·632	− 34·677
8°	− 0·789	− 3·614	− 9·871	− 21·877	− 42·871
10°	− 1·210	− 5·299	− 13·664	− 28·620	− 53·405

In gleicher Weise haben wir auch die Formel (13) für die Meridian-Konvergenz behandelt; es fand sich:

$$\Delta(\gamma) = VI \lambda \beta^4 - VII \lambda^3 \beta^2 + VIII \lambda^5 \qquad (24)$$

wobei die Coëfficienten folgende Werte haben:

(25)

φ	*log VI*	*log VII*	*log VIII*
40°	4.4465	3.7291	3.6012
45°	4.4880	4.0901	4.8556
50°	4.5227	4.3068	3.0233
55°	4.5518	4.4606	1.6891ₙ
60°	4.7560	4.5963	2.8772ₙ

Insbesondere ist, für $\varphi = 50°$, hiernach folgendes berechnet:

Korrektion 5. Ordnung für Meridian-Konvergenz nach Formel (13) für $\varphi = 50°$.

(26)

$\beta =$	$\lambda = 2°$	$\lambda = 4°$	$\lambda = 6°$	$\lambda = 8°$	$\lambda = 10°$
2°	0,0000″	− 0,0002″	− 0,0007″	− 0,0003″	+ 0,0030″
4°	+ 0,0014″	+ 0,0014″	− 0,0011″	− 0,0063″	− 0,0133″
6°	+ 0,0080″	+ 0,0127″	+ 0,0110″	+ 0,0006″	− 0,0192″
8°	+ 0,0263″	+ 0,0464″	+ 0,0547″	+ 0,0463″	+ 0,0174″
10°	+ 0,0650″	+ 0,1204″	+ 0,1569″	+ 0,1663″	+ 0,1411″

§ 64. Reihen-Entwicklungen nach Potenzen von σ.

Fig. 1.

Die sehr wichtigen Reihen, welche $\varphi' - \varphi$, $\alpha' - \alpha$ und λ in steigenden Potenzen der Entfernung σ ausdrücken, kann man auf mancherlei Arten entwickeln.

Wir wollen zuerst daran erinnern, dass bei gegebenem φ, α und σ die drei anderen Werte φ', α' und λ sich durch geschlossene Formeln der sphärischen Trigonometrie angeben lassen, die wir schon in § 60. in (16)—(18) S. 342 angegeben haben. Jene Formeln kann man geradezu in Reihen entwickeln, wie bis zu σ^3 einschliesslich in unserer vorigen 3. Auflage 1890, in § 59. gemacht ist; wir wollen aber hier davon absehen und lieber gleich zu der Entwicklung nach dem Maclaurinschen Satze übergehen, welche beliebig weit ausgedehnt werden kann.

Die Anwendung dieses Satzes auf unseren Fall giebt bis zur 6ten Ordnung:

$$\varphi' - \varphi = \left.\frac{d\varphi}{d\sigma}\right]\sigma + \left.\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}\right]\frac{\sigma^2}{2} + \left.\frac{d^3\varphi}{d\sigma^3}\right]\frac{\sigma^3}{6} + \left.\frac{d^4\varphi}{d\sigma^4}\right]\frac{\sigma^4}{24} + \left.\frac{d^5\varphi}{d\sigma^5}\right]\frac{\sigma^5}{120} + \left.\frac{d^6\varphi}{d\sigma^6}\right]\frac{\sigma^6}{720} \tag{1}$$

$$\lambda = \left.\frac{d\lambda}{d\sigma}\right]\sigma + \left.\frac{d^2\lambda}{d\sigma^2}\right]\frac{\sigma^2}{2} + \left.\frac{d^3\lambda}{d\sigma^3}\right]\frac{\sigma^3}{6} + \left.\frac{d^4\lambda}{d\sigma^4}\right]\frac{\sigma^4}{24} + \left.\frac{d^5\lambda}{d\sigma^5}\right]\frac{\sigma^5}{120} + \left.\frac{d^6\lambda}{d\sigma^6}\right]\frac{\sigma^6}{720} \tag{2}$$

$$\alpha' - \alpha = \left.\frac{d\alpha}{d\sigma}\right]\sigma + \left.\frac{d^2\alpha}{d\sigma^2}\right]\frac{\sigma^2}{2} + \left.\frac{d^3\alpha}{d\sigma^3}\right]\frac{\sigma^3}{6} + \left.\frac{d^4\alpha}{d\sigma^4}\right]\frac{\sigma^4}{24} + \left.\frac{d^5\alpha}{d\sigma^5}\right]\frac{\sigma^5}{120} + \left.\frac{d^6\alpha}{d\sigma^6}\right]\frac{\sigma^6}{720} \tag{3}$$

Nach Ausführung der Differentiierungen ist in den erhaltenen Differential-Quotienten $\frac{d\varphi}{d\sigma}, \frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}$ u. s. w. der Wert $\varphi' - \varphi = 0$ zu setzen, d. h. die Differential-Quotienten sind für den Ausgangs-Wert φ und ebenso für den Ausgangs-Wert α auszurechnen.

Die ersten Differential-Quotienten erhalten wir aus (1), (2), (3) § 61. S. 347, nämlich in der für uns geeigneten Form:

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \cos\alpha \tag{4}$$

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} \tag{5}$$

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = \sin\alpha \operatorname{tang}\varphi \tag{6}$$

Nun leiten wir (4) weiter ab, und finden, mit Zuziehung von (6):

$$\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2} = -\sin\alpha \frac{d\alpha}{d\sigma} = -\sin^2\alpha \operatorname{tang}\varphi \tag{7}$$

Dieses nochmals abgeleitet giebt:

$$\frac{d^3\varphi}{d\sigma^3} = -2\sin\alpha\cos\alpha\frac{d\alpha}{d\sigma}\operatorname{tang}\varphi - \sin^2\alpha\,(1 + \operatorname{tang}^2\varphi)\frac{d\varphi}{d\sigma}$$

also mit Rücksicht auf (6) und (4):

$$\frac{d^3\varphi}{d\sigma^3} = -2\sin^2\alpha\cos\alpha\operatorname{tang}^2\varphi - \sin^2\alpha\cos\alpha\,(1 + \operatorname{tang}^2\varphi)$$

$$\frac{d^3\varphi}{d\sigma^3} = -\sin^2\alpha\cos\alpha\,(1 + 3\operatorname{tang}^2\varphi) \tag{8}$$

Dieses wird abermals differentiiert:

$$\frac{d^4 \varphi}{d \sigma^4} = (-2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin^3 \alpha) \sin \alpha \tang \varphi (1 + 3 \tang^2 \varphi) \qquad (9)$$
$$- \sin^2 \alpha \cos \alpha \, 6 t (1 + t^2) \cos \alpha$$

$$\frac{d^4 \varphi}{d \sigma^4} = \sin^4 \alpha \tang \varphi (1 + 3 \tang^2 \varphi) - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \tang \varphi (2 + 3 \tang^2 \varphi) \qquad (10)$$

In dieser Weise kann man fortfahren, wir schreiben dabei wie gewöhnlich $\tang \varphi = t$ und damit wird:

$$\frac{d^5 \varphi}{d \sigma^5} = \sin^4 \alpha \cos \alpha (1 + 30 t^2 + 45 t^4) - 4 \sin^2 \alpha \cos^3 \alpha (2 + 15 t^2 + 15 t^4) \qquad (11)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^6 \varphi}{d \sigma^6} = - \sin^6 \alpha \, t (1 + 30 t^2 + 45 t^4) + 4 \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha \, t (22 + 135 t^2 + 135 t^4) \\ - 8 \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha \, t (17 + 60 t^2 + 45 t^4)\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Zu den Ableitungen von λ übergehend, haben wir nach (5):

$$\frac{d \lambda}{d \sigma} = \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} \qquad (13)$$

$$\frac{d^2 \lambda}{d \sigma^2} = \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} \frac{d \alpha}{d s} + \sin \alpha \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \frac{d \varphi}{d s} \qquad (14)$$

also mit Berücksichtigung von (4) und (6):

$$\frac{d^2 \lambda}{d \sigma^2} = \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\cos^2 \varphi} \sin \varphi + \sin \alpha \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \cos \alpha$$

$$\frac{d^2 \lambda}{d \sigma^2} = 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\tang \varphi}{\cos \varphi} = 2 \sin \alpha \cos \alpha \tang \varphi \sec \varphi \qquad (15)$$

Da man bald bemerkt, dass der Nenner $\cos \varphi$, oder der Faktor $\sec \varphi$ sich in allen Gliedern der Entwicklung von λ einstellt, und dass die Potenzen von $\tang \varphi$ sich wie im vorigen Fall finden, schreibt man auch die Ableitung von $\sec \varphi$ stets in der Form $t \sec \varphi$, und damit bekommt man (überall $\tang \varphi = t$ gesetzt) weiter:

$$\frac{d^3 \lambda}{d \sigma^3} = 2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha \, t \, t \sec \varphi$$
$$+ 2 \sin \alpha \cos \alpha (1 + t^2) \sec \varphi \cos \alpha$$
$$+ 2 \sin \alpha \cos \alpha \, t \, t \sec \varphi \cos \alpha$$

$$\frac{d^3 \lambda}{d \sigma^3} = - \sin^3 \alpha \sec \varphi (2 t^2) + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha \sec \varphi (1 + 3 t^2) \qquad (16)$$

Auf diesem Wege findet man auch:

$$\frac{d^4 \lambda}{d \sigma^4} = 8 \sec \varphi \, t \left\{ - \sin^3 \alpha \cos \alpha (1 + 3 t^2) + \sin \alpha \cos^3 \alpha (2 + 3 t^2) \right\} \qquad (17)$$

$$\frac{d^5 \lambda}{d \sigma^5} = 8 \sec \varphi \left\{ \sin^5 \alpha (t^2 + 3 t^4) - \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha (1 + 20 t^2 + 30 t^4) \right.$$
$$\left. + \sin \alpha \cos^4 \alpha (2 + 15 t^2 + 15 t^4) \right\} \qquad (18)$$

$$\frac{d^6 \lambda}{d \sigma^6} = 16 \sec \varphi \, t \left\{ \sin^5 \alpha \cos \alpha (2 + 30 t^2 + 45 t^4) - \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha (26 + 150 t^2 + 150 t^4) \right.$$
$$\left. + \sin \alpha \cos^5 \alpha (17 + 60 t^2 + 45 t^4) \right\} \qquad (19)$$

In ähnlicher Weise erhält man auch die Ableitungen von α nach σ:

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = \sin\alpha\, t \tag{20}$$

$$\frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} = \sin\alpha\cos\alpha\,(1 + 2\,t^2) \tag{21}$$

$$\frac{d^3\alpha}{d\sigma^3} = -\sin^3\alpha\, t\,(1 + 2\,t^2) + \sin\alpha\cos^2\alpha\, t\,(5 + 6\,t^2) \tag{22}$$

$$\frac{d^4\alpha}{d\sigma^4} = -\sin^3\alpha\cos\alpha\,(1 + 20\,t^2 + 24\,t^4) + \sin\alpha\cos^3\alpha\,(5 + 28\,t^2 + 24\,t^4) \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^5\alpha}{d\sigma^5} = \sin^5\alpha\, t\,(1 + 20\,t^2 + 24\,t^4) - 2\sin^3\alpha\cos^2\alpha\, t\,(29 + 140\,t^2 + 120\,t^4)\\ + \sin\alpha\cos^4\alpha\, t\,(61 + 180\,t^2 + 120\,t^4)\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^6\alpha}{d\sigma^6} = \sin^5\alpha\cos\alpha\,(1 + 182\,t^2 + 840\,t^4 + 720\,t^6)\\ -\sin^3\alpha\cos^3\alpha\,(58 + 1316\,t^2 + 3600\,t^4 + 2400\,t^6)\\ +\sin\alpha\cos^5\alpha\,(61 + 662\,t^2 + 1320\,t^4 + 720\,t^6)\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Nun können wir die Formeln (1), (2), (3) zusammensetzen; wir wollen dieses jedoch hier nur bis zur 4. Ordnung thun, wir setzen dabei:

$$\sigma\sin\alpha = v \qquad \sigma\cos\alpha = u \qquad \operatorname{tang}\varphi = t \tag{26}$$

Wenn wir zugleich überall die nötigen ϱ zusetzen, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}\varphi' - \varphi = u - \frac{1}{2\varrho}v^2 t\\ -\frac{1}{6\varrho^2}v^2 u\,(1 + 3\,t^2)\\ +\frac{1}{24\varrho^3}v^4 t\,(1 + 3\,t^2) - \frac{1}{6\varrho^3}v^2 u^2 t\,(2 + 3\,t^2)\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda\cos\varphi = v + \frac{1}{\varrho}v\,u\,t\\ -\frac{1}{3\varrho^2}v^3 t^2 + \frac{1}{3\varrho^2}v\,u^2\,(1 + 3\,t^2)\\ -\frac{1}{3\varrho^3}v^3 u\,t\,(1 + 3\,t^2) + \frac{1}{3\varrho^3}v\,u^3 t\,(2 + 3\,t^2)\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha' - \alpha = v\,t + \frac{1}{2\varrho}v\,u\,(1 + 2\,t^2)\\ -\frac{1}{6\varrho^2}v^3 t\,(1 + 2\,t^2) + \frac{1}{6\varrho^2}v\,u^2 t\,(5 + 6\,t^2)\\ -\frac{1}{24\varrho^3}v^3 u\,(1 + 20\,t^2 + 24\,t^4)\\ +\frac{1}{24\varrho^3}v\,u^3\,(5 + 28\,t^2 + 24\,t^4)\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Hiebei sind die konstanten Coëfficienten-Logarithmen:

$$\left.\begin{aligned}\log\frac{1}{\varrho} = 4.685\,575\,,\ \log\frac{1}{2\varrho} = 4.384\,545\,,\ \log\frac{1}{3\varrho^2} = 8.89403\,,\ \log\frac{1}{6\varrho^2} = 8.59300\\ \log\frac{1}{3\varrho^3} = 3.579\,603\,,\ \log\frac{1}{6\varrho^3} = 3.278\,573\,,\ \log\frac{1}{24\varrho^3} = 2.676\,513\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Wir wollen hiernach unser kleines Normal-Beispiel berechnen, nämlich:
Gegeben: $\varphi = 49° 30' 0''$ $\alpha = 32° 21' 1,291''$ $\sigma = 1° 11' 19,4819''$
$= 4279,4819''$

Für die von t abhängigen Coëfficienten kann man die Hilfstafel unseres Anhanges Seite [47]—[51] benützen, oder wenigstens zur Versicherung zuziehen.

In unserem Falle mit $\varphi = 49° 30'$ hat man:

$log(1 + 2t^2) = 0.573\,078$ $log(1 + 3t^2) = 0.70865$ $log(5 + 6t^2) = 1.12141$
$log(1 + 20t^2 + 24t^4) = 1.86642$ $log(5 + 28t^2 + 24t^4) = 1.94689$

Im übrigen giebt die Ausrechnung nach den Formeln (27)—(29):

Breite		Länge		Azimut	
$+u =$	$+3615,2710''$	$+v\sec\varphi =$	$+3525,9626''$	$vt =$	$+2681,1630''$
$-v^2t\ldots$	$-14,8830$	$+vut\ldots$	$+72,3593$	$+vu\ldots$	$+75,0907$
$-v^2u\ldots$	$-0,3797$	$-v^3\ldots$	$-0,1986$	$-v^3\ldots$	$-0,2061$
$+v^4\ldots$	$+0,0008$	$+vu^2\ldots$	$+1,8460$	$+vu^2\ldots$	$+1,8155$
$-v^2u^2\ldots$	$-0,0093''$	$-v^3u\ldots$	$-0,0152$	$-v^3u\ldots$	$-0,0152$
		$+vu^3\ldots$	$+0,0452$	$+vu^3\ldots$	$+0,0455$
$\varphi' - \varphi =$	$+3599,9998''$	$\lambda =$	$+3599,9993''$	$\alpha' - \alpha =$	$+2757,8934''$
	$= 0° 59' 59,9998''$		$= +0° 59' 59,9993''$		$= +45' 57,8934''$

Wir könnten nun weiter untersuchen, wie viel die Glieder 5. Ordnung in gewissen Fällen ausmachen; da wir aber hierüber bereits in anderer Weise in § 63. (22), (23), (26) S. 356 uns Klarheit verschafft haben, wollen wir die Glieder 5. Ordnung unserer neuen Formeln übergehen, dagegen noch für *einen* Fall die Glieder 6. Ordnung in Betracht nehmen, nämlich für die Azimut-Berechnung, bei welcher nach (3) und (25) das Glied 6. Ordnung folgendes ist:

$$\varDelta\alpha_6 = \frac{\sigma^6}{720\varrho^5}\Big\{\sin^5\alpha\cos\alpha\,(1 + 182t^2 + 840t^4 + 720t^6) - \sin^3\alpha\cos^3\alpha\,(58 + 1316t^2 + 3600t^4 + 2400t^6) + \sin\alpha\cos^5\alpha\,(61 + 662t^2 + 1320t^4 + 720t^6)\Big\}$$

Um einen einfachen Fall zu haben, setzen wir die Breite $\varphi = 45°$, also $t = tang\,\varphi = 1$, und damit wird:

$$\varDelta\alpha_6 = \frac{\sigma^6}{720\varrho^5}\Big\{1743\sin^5\alpha\cos\alpha - 7374\sin^3\alpha\cos^3\alpha + 2763\sin\alpha\cos^5\alpha\Big\}$$

Durch einige Versuche findet man, dass diese Funktion zwischen 0° und 90° zwei Maxima, etwa bei $\alpha = 16°$ und $\alpha = 77°$, und ein Minimum bei $\alpha = 47°$ hat; das absolute Maximum ist bei 16°, und giebt:

$$(\varDelta\alpha_6)\,max = \frac{\sigma^6}{720\varrho^5}\,491$$

Setzt man $\sigma = 2° = 7200''$, so erhält man:

$$(\varDelta\alpha_6)\,max = 0,00025''$$

Dagegen für $\sigma = 3°$ erhält man schon 0,0029″ und für $\sigma = 4°$ erhält man 0,0162″.

Aus all diesem ziehen wir folgende Schlüsse:

Die Glieder 6. Ordnung werden bei Ausdehnung von mehreren Graden bereits merkbar, namentlich in höheren Breiten, wo die Glieder mit t^2, t^4, t^6 sehr rasch



wachsen. Da nun schon die Glieder 5. Ordnung ungemein beschwerlich sind, empfehlen sich sphärische Reihen-Entwicklungen höchstens bis zur 4. Ordnung einschliesslich, z. B. die Gauss schen Mittelbreiten-Formeln (16)—(19) § 62. S. 350, welche äusserlich nur Glieder bis zur dritten Ordnung enthalten, aber wegen des Mittel-Arguments noch um einen Grad genauer, d. h. auf Glieder 4. Ordnung einschliesslich genau sind.

Hat man Fälle mit Ausdehnung etwa über 2°, für welche nach S. 356 die Glieder 5. Ordnung bereits merkbar sind, so thut man besser, nach den geschlossenen Formeln der sphärischen Trigonometrie mit 8—10 stelligen Logarithmen zu rechnen, als die viel grössere Mühe der Glieder 5. oder gar 6. Ordnung aufzuwenden.

Von diesen Überlegungen werden wir auch später bei den sphäroidischen Berechnungen Gebrauch machen.

Kapitel VI.

Normalschnitte und geodätische Linie.

§ 65. Gegen-Normalschnitte.

Der wichtigste Schritt, den wir in unserer geodätischen Theorie vorwärts zu machen haben, besteht in der Erkenntnis, dass zwischen zwei Punkten des Sphäroids im allgemeinen *zwei* Normalschnitte bestehen.

Es seien in Fig. 1. A und B zwei Punkte des Umdrehungs-Ellipsoids, unter verschiedenen Breiten, und es sei $A\,K_a$ die Flächen-Normale im Punkte A, sowie $B\,K_b$ die Flächen-Normale im Punkte B; hiebei bemerkt man zuerst, dass die Punkte, in welchen die Umdrehungsaxe von diesen Normalen getroffen wird, d. h. K_a und K_b, bei schiefem Schnitte *nicht* zusammenfallen.

Fig. 1.

Ebenso wie man im allgemeinen *zwei* Axen-Schnittpunkte K_a und K_b hat, bestehen auch *zwei* Normalschnitt-Ebenen, welche beide durch die Normalen der Punkte A und B gehen.

Dieses verhält sich genauer so:

Die Normalschnitt-Ebene im Punkte A ist diejenige Ebene, welche durch die Normale $A\,K_a$ und durch den Punkt B geht; diese Ebene schneide die Ellipsoidfläche in einem Bogen $A\,a\,B$. Andererseits haben wir als Normalschnitt-Ebene im Punkte B diejenige Ebene, welche durch die Normale $B\,K_b$ und durch den Punkt A geht und die Ellipsoidfläche in dem Bogen $B\,b\,A$ schneidet.

Es giebt besondere Fälle, in welchen die beiden Normalschnitte zwischen zweien Punkten zusammenfallen:

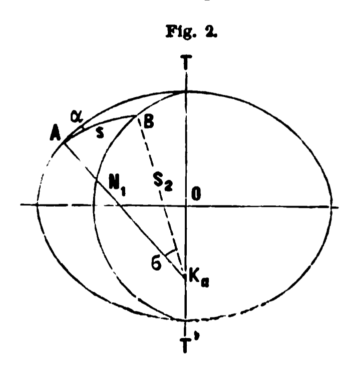
Erstens. Für irgend zwei Punkte, die auf demselben Meridian liegen, ist dieser Meridian auch Normalschnitt in zweifachem Sinne. Hier ist auch der beson-

dere Fall inbegriffen, dass einer der beiden betrachteten Punkte in einem Pole der Erde liegt; wenn ein Pol der Erde als erster Punkt A gilt, und irgend ein anderer Erdpunkt als zweiter Punkt B, so ist der Meridian des Punktes B sowohl Normalschnitt von B nach A, als auch Normalschnitt von A nach B. Da jedoch die Erdpole nicht zugänglich sind, hat dieser Fall für uns keine praktische Bedeutung.

Zweitens. Wenn zwei Punkte unter gleichen Breiten φ liegen, so fallen auch die beiden Normalschnitt-Ebenen zusammen, weil dann die beiden Ax-Schnitte K_a und K_b der Normalen von A und von B nach Fig. 1, auf der Erdaxe identisch werden.

Wegen der Kleinheit der Abplattung unserer Erde ist das erkannte Auseinandergehen zweier Gegen-Normalschnitte für messbare Dreiecksseiten sehr gering, und wir haben bisher stillschweigend davon abgesehen, wenn wir die Erde als Kugel behandelten; aber zur Gewinnung eines richtigen Urteils hierüber ist es das erste Erfordernis, die Konvergenz der beiden Normalschnitte durch Rechnung zu bestimmen.

Fig. 2.



In Fig. 2. ist nochmals der *eine* von den beiden Schnitten gezeichnet, nämlich derjenige von A nach B, und es ist auch das Azimut α dieses Schnittes in A angedeutet, sowie der Centriwinkel $A\,K_a\,B = \sigma$, welcher dem linearen Bogen $A\,B = s$ entspricht und zwar in erster Näherung einfach als Kreisbogenrechnung:

$$\sigma = \frac{s}{N_1} \tag{1}$$

wenn mit N_1 der Quer-Krümmungs-Halbmesser $A\,K_a$ in dem Punkte A bezeichnet wird.

Die beiden Schnitte $A\,B$ und $B\,A$ sind in

Fig. 3.

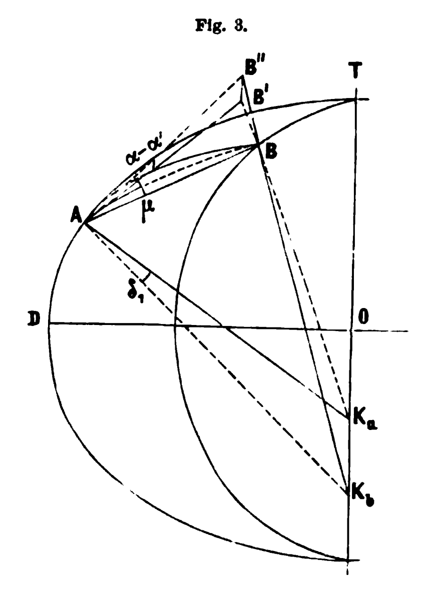


Fig. 4.

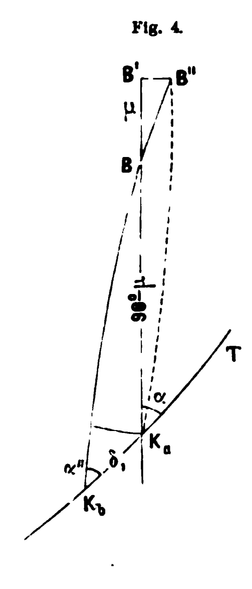
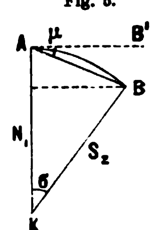


Fig. 3. nochmals gezeichnet mit zwei Tangenten $A\,B'$ und $A\,B''$, von welchen $A\,B'$ zu dem Schnitte $A\,B$ und $A\,B''$ zu dem Gegenschnitte $B\,A$ gehört, so dass also $B'A\,B'' = \alpha - \alpha'$ die gesuchte Konvergenz vorstellt.

Zugleich bedeutet $B'A\,B = \mu$ den Winkel der Tangente $A\,B'$ mit der Sehne $A\,B$, und wenn wir auf Fig. 2. und Gleichung (1) zurückblicken, erkennen wir leicht, dass in erster Näherung, (nämlich für $A\,B$ als Kreisbogen um K als Mittelpunkt) $\mu = \frac{\sigma}{2}$ ist, also (nach Fig. 5.):

$$\mu = \frac{\sigma}{2} = \frac{s}{2\,N_1} \tag{2}$$

Nun kommt die sphärische Fig. 4. in Betracht, welche dadurch entsteht, dass man um A als Mittelpunkt eine Kugelfläche mit beliebigem Halbmesser beschreibt, auf welcher jeder von A ausgehende Strahl sich als Punkt, und jede von A ausgehende Ebene sich als Grosskreisbogen zeigt.



Wir haben auch alle Punkte in Fig. 4. mit denselben Buchstaben bezeichnet, welche auf den entsprechenden Strahlen von Fig. 3. vorkommen, so dass also B in Fig. 4. dem Strahl $A\,B$ von Fig. 3. K_a in Fig. 4. dem Strahle $A\,K_a$ von Fig. 3. entspricht u. s. w.

Die Normalschnitt-Ebene $A\,B\,K_a$ in Fig. 3. giebt den Bogen $B\,K_a$ in Fig. 4. und die Meridian-Ebene $A\,T\,K_a\,K_b$ von Fig. 3. giebt den Bogen $T\,K_a\,K_b$ in Fig. 4., folglich ist der Winkel $B\,K_a\,T = \alpha$ das Azimut der Normalschnitt-Ebene $A\,B\,K_a$ im Punkte A.

In Fig. 4. ist auch der Winkel $B\,K_b\,K_a = \alpha''$ eingeschrieben, welcher das Gegenazimut α' von Fig. 3. hinreichend darstellt, insofern α'' den Winkel zwischen der Gegenschnittebene $B\,K_b\,A$ und der Meridianebene $T\,A\,K_a\,K_b$ bedeutet, während allerdings α' von Fig. 3. sich streng genommen auf die etwas anders liegende Schnittebene $B\,K_a\,A$ bezieht. Diesen kleinen Unterschied ausser Betracht lassend, setzen wir in gleicher Näherung wie in den Gleichungen (1) und (2):

$$\alpha' = \alpha'' \tag{3}$$

Der kleine Winkel δ, welcher zwischen den Strahlen $A\,K_a$ und $A\,K_b$ liegend, leicht aus Fig. 3. in Fig. 4. übertragen wird, ist eine uns schon aus der Betrachtung von § 54. über den *verkürzten* Breitenunterschied geläufige Grösse, nämlich gemäss (8) § 54. S. 303:

$$\delta_1 = \frac{\Delta\,\varphi}{\sqrt{2}}\,\eta^2 \tag{4}$$

wobei $\Delta\,\varphi$ in unserem Falle der Breitenunterschied der Punkte A und B ist, und wie gewöhnlich $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ für die Mittelbreite φ.

Es ist auch leicht, $\Delta\,\varphi$ in σ und α auszudrücken, in erster Näherung nach dem Anblicke von Fig. 2. S. 303:

$$\frac{\Delta\,\varphi}{\sqrt{2}} = \Delta\,\varphi' = \frac{s}{N}\cos\alpha = \sigma\cos\alpha$$

Also nach (4):

$$\delta_1 = \eta^2\,\sigma\cos\alpha \tag{5}$$

Auf das sphärische Dreieck $B\,K_a\,K_b$ von Fig. 4. werden wir eine Cotangenten-Gleichung von S. 164 anwenden:

$$\operatorname{cotg}\,(90^\circ - \mu)\sin\delta_1 = \cos\delta_1\cos(180^\circ - \alpha) + \sin(180^\circ - \alpha)\operatorname{cotg}\alpha'' \tag{6}$$

$$\operatorname{tang}\mu\sin\delta_1 = -\cos\delta_1\cos\alpha + \sin\alpha\operatorname{cotg}\alpha''$$

oder weil μ und δ_1 klein sind:

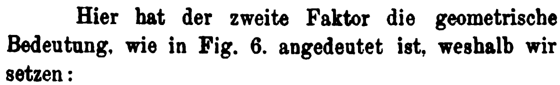
$$\mu\,\delta_1 = -\cos\alpha + \sin\alpha\,\cotg\alpha'' = -\frac{-\cos\alpha\sin\alpha'' + \sin\alpha\cos\alpha''}{\sin\alpha''}$$

$$\mu\,\delta_1 \sin\alpha'' = \sin(\alpha - \alpha'') = \alpha - \alpha''$$

Zurückschauend nach (5), (4) und (3) hat man hieraus:

$$\alpha - \alpha' = \eta^2 \frac{\sigma^2}{2} \sin\alpha\cos\alpha \tag{7}$$

Fig. 6.



Hier hat der zweite Faktor die geometrische Bedeutung, wie in Fig. 6. angedeutet ist, weshalb wir setzen:

$$\frac{\sigma^2 \sin\alpha\cos\alpha}{2} = \varepsilon \tag{8}$$

Dieser Wert ε ist genähert der sphärische (oder sphäroidische) Excess eines Dreiecks $A\,B\,C$, welches bei C rechtwinklig ist, so dass $B\,C$ nicht ein Parallel-Kreisbogen, sondern ein Bogen rechtwinklig zum Meridian $A\,C\,N$ ist; doch kann in erster Näherung für die Fläche des Dreiecks $A\,B\,C$ auch $B\,C$ als Parallelbogen gelten.

Mit dieser Hilfs-Bezeichnung ε nach (8) lautet unsere Formel (7) kurz:

$$\alpha - \alpha' = \eta^2\,\varepsilon \tag{9}$$

Dieselbe Formel (9), welche hier für $\alpha - \alpha'$ gefunden wurde, gilt in gleicher Näherung auch für die Azimut-Differenz in dem zweiten Punkte B; also wenn dort die Azimute mit β bezeichnet werden, wird sein:

$$\alpha - \alpha' = \beta - \beta' = \eta^2\,\varepsilon \tag{10}$$

Nimmt man beispielshalber eine Entfernung $s = 100\,000^m$ unter dem Azimut $\alpha = 45°$, zugleich unter der Breite $\varphi = 45°$, so wird:

$$\varepsilon = 12{,}7'' \qquad \alpha - \alpha' = 0{,}043'' \tag{11}$$

Damit haben wir unseren Hauptzweck erreicht. Wir wissen nun, dass die Konvergenz der beiden Gegenschnitte sich in geringen Beträgen von wenigen Hundertel-Sekunden bewegt, so lange die Dreiecksseiten die Grenze von 100^{km} nicht überschreiten, und damit ist die früher ohne Kenntnis dieser Verhältnisse angenommene *sphärische* Triangulierung von § 40.—43., bei welcher die $\alpha - \alpha'$ einfach vernachlässigt werden, genügend gerechtfertigt.

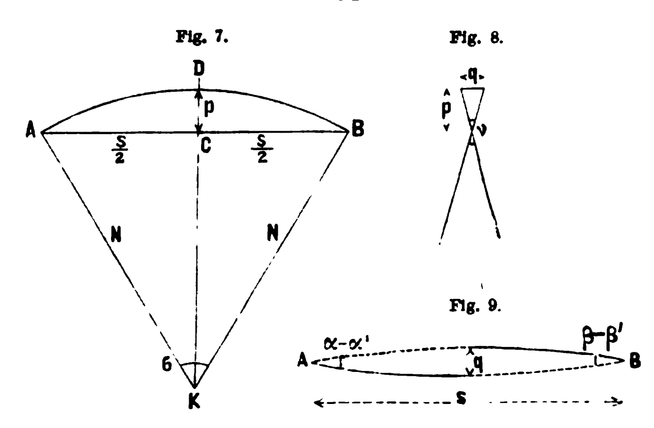
Querabstand der beiden Schnittbögen.

Es wird noch zur Veranschaulichung dienen, den linearen Querabstand q zu bestimmen, welchen die beiden Normalschnitte auf der Erdoberfläche in der Mitte ihres Verlaufes zwischen sich lassen; und dazu brauchen wir zuerst den Winkel, den die beiden Schnittebenen unter sich bilden.

Dieser Schnittwinkel ν ist in Fig. 8. veranschaulicht. Denkt man sich in der Mitte der Sehne $A\,B$ (Fig. 7.) eine Ebene $K\,C\,D$ rechtwinklig gelegt, so wird diese ein nahezu gleichschenkliges kleines Dreieck ausschneiden (Fig. 8.), dessen beide

Schenkel p den Winkel ν zwischen sich fassen und den Querabstand q dem Winkel ν gegenüber haben. Die Schenkellänge p ist gleich der Pfeilhöhe eines Bogens s für den Halbmesser N, d. h. nach Fig. 7.:

$$p = \frac{s^2}{8N} \tag{12}$$



Was den Schnittwinkel ν betrifft, so ist dieser in Fig. 4. S. 362 der kleine Winkel bei B, unter dem sich die beiden Ebenen $B'BK_a$ und $B''BK_b$ schneiden (ν ist in Fig. 4. S. 362 nicht eingeschrieben, aber in Fig. 2. des folgenden § 67 S. 368). Man entnimmt also leicht genähert:

$$\sin \nu \text{ oder } \tan \nu = \frac{\delta_1 \sin \alpha''}{\sin (90° - \mu)} = \frac{\delta_1 \sin \alpha}{\cos \frac{\sigma}{2}} \tag{13}$$

oder wegen (5) und (8) hinreichend genau:

$$\nu = \eta^2 \sigma \sin \alpha \cos \alpha = 2 \eta^2 \frac{s}{\sigma} \tag{14}$$

Da nach Fig. 8. der kleine Querabstand $q = p\nu$ ist, hat man also aus (12) und (13):

$$q = \frac{s}{4} \eta^2 s \quad \text{bzw.} \quad = \frac{s}{4} \eta^2 \frac{s}{\varrho} \tag{15}$$

Die Ausrechnung mit denselben Annahmen wie bei (10) und (11); nämlich $\varphi = 45°$ und $\alpha = 45°$, $s = 100\,000^m$ giebt:

$$q = 0{,}005^m \tag{16}$$

Dieses Zahlenbeispiel entspricht ungefähr der Linie Hannover-Brocken. Wenn man also von Hannover nach dem Brocken eine Gerade feldmesserisch einweisen und mit Backen und Fahnen abstecken würde, und wenn man dasselbe umgekehrt vom Brocken nach Hannover ausführte, so würden wegen der Abplattung der Erde die beiden abgesteckten Linien nicht zusammenfallen, sondern in der Mitte des Verlaufes (in der Gegend von Salzgitter) um 5 Millimeter aneinander vorbeigehen.

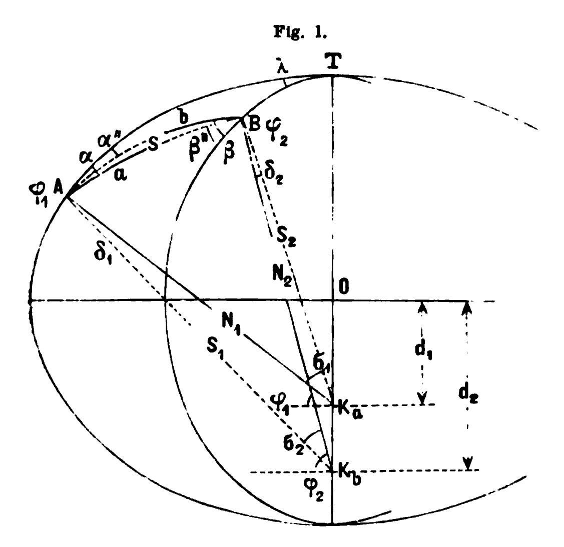
Dieses handgreifliche Beispiel zeigt am besten die Zulässigkeit geodätischer Vernachlässigung dieser Abweichung.

§ 66. Konvergenzwinkel in zweiter Näherung.

Obgleich die Bestimmung von $\alpha - \alpha'$ in erster Näherung $= \eta^2 \varepsilon$ im vorigen § 65. für alle praktischen Zwecke vollauf genügt und es auch gar nicht theoretisch ratsam ist, diese Sache alsbald weiter zu verfolgen, wollen wir doch die Näherung $\alpha' = \alpha''$, welche in (3) § 65. S. 365 angenommen wurde, noch näher untersuchen, um vor jedem theoretischen Einwand geschützt zu sein.

Wir wollen hier auch einige Entwicklungen geben, welche im Anschluss an Bohnenbergers Abhandlung „De computandis etc.“ (vgl. das Citat S. 274) in der vorigen 3. Auflage 1890, § 67.—68. gemacht, nun nicht mehr als Hauptbestandteil unseres Entwicklungsganges genommen, aber doch auch nicht völlig weggelassen werden sollen. Es mag nach alledem anheimgegeben werden, diesen ganzen § 66. zu überschlagen.

Fig. 1.



In Fig. 1. haben wir die Verhältnisse von § 65. Fig. 3. S. 362 wiederholt und noch deutlicher gemacht.

A und B sind zwei Punkte des Umdrehungs-Ellipsoids, auf zwei Meridianen TA und TB, welche bei T den Längenunterschied λ zwischen sich fassen.

Die Breite von A sei φ_1 und die Breite von B sei φ_2; ferner sei AK_a die Normale von A und AK_b die Normale von B.

Die Breiten φ_1 und φ_2 kommen bei K_a und K_b zum Ausdruck, denn es ist:

$$\text{Winkel } AK_aT = 90^\circ - \varphi_1 \text{ und } BK_bT = 90^\circ - \varphi_2 \qquad (1)$$

Ein Theodolit, in A richtig aufgestellt, wird seine vertikale Axe nach AK_a gerichtet haben, und die Sicht nach B wird in AaB erfolgen unter dem Azimut α. Zieht man auch noch K_aB, so ist das nicht Normale in B, allein man hat nun doch ein Dreikant K_a, ABT mit der Spitze K_a, auf welches die sphärische Trigonometrie angewendet werden kann.

Während α und β zweifellos Azimute in dem bisherigen Sinne sind, d. h. Winkel zwischen Normalschnitten und einem Meridiane, und zwar sowohl für das Ellipsoid als auch für die beiden sphärischen Dreiecke, in welchen α und $180 - \beta$ vorkommen, ist dieses bei α' und β' nur noch der Fall für die sphärischen Hilfsdreiecke, aber nicht mehr für das Ellipsoid.

Z. B. der Winkel α'' kann als Azimut des Schnittes AbB in A bezeichnet werden, allein nur bei Annahme eines fingierten Erdmittelpunktes K_b, welcher gar nicht in der Normalen von A liegt.

In Bezug auf das Ellipsoid hat der ebene Schnitt $AbBK_b$ im Punkte A überhaupt kein Azimut in dem gewöhnlichen Sinne, und wenn man dem Bogen AbB

dennoch auch in A ein ellipsoidisches Azimut zuteilen will, so kann man nur die *Tangente* des Bogens $A\,b\,B$ in A betrachten, indem man durch diese Tangente und die Normale $A\,K_a$ eine Ebene legt, welche mit der Meridian-Ebene $A\,T$ einen *anderen* Winkel α' bildet (der in Fig. 1. nicht angegeben ist).

Man kann schon jetzt überblicken, dass die beiden hier genannten Winkel α' und α'' nur sehr wenig von einander verschieden sind; zunächst kam es nur darauf an, die geometrischen Begriffe völlig klar zu legen.

Nach diesem wollen wir an die Bestimmung der beiden kleinen Winkel δ_1 und δ_2 und der excentrischen Entfernungen S_1 und S_2 gehen.

Hiezu brauchen wir die mit d_1 und d_2 in Fig. 1. eingeschriebenen Abstände der Schnitte K_a und K_b vom Mittelpunkt des Ellipsoids.

Wenn y_1 die Ordinate von A ist, in dem Sinne der früheren Fig. 1. § 31. S. 188, und N_1 die Normale oder der Quer-Krümmungs-Halbmesser $A\,K_a$, so ist mit den Bezeichnungen von § 32. S. 194:

$$d_1 = N_1 \sin\varphi_1 - y_1 \quad , \quad N_1 = \frac{c}{V_1} \quad , \quad y = \frac{c\,(1-e^2)\sin\varphi_1}{V_1} \tag{2}$$

also:

$$d_1 = e^2\,\frac{c\sin\varphi_1}{V_1} \quad \text{und} \quad d_2 = e^2\,\frac{c\sin\varphi_2}{V_2} \tag{3}$$

also:

$$d_2 - d_1 = e^2\,c\left(\frac{\sin\varphi_2}{V_2} - \frac{\sin\varphi_1}{V_1}\right) \tag{4}$$

Die schmalen Dreiecke $A\,K_a\,K_b$ und $B\,K_a\,K_b$ von Fig. 1. geben:

$$tang\,\delta_1 = \frac{(d_2-d_1)\cos\varphi_1}{N_1 + (d_2-d_1)\sin\varphi_1} \quad \text{und} \quad tang\,\delta_2 = \frac{(d_1-d_2)\cos\varphi_2}{N_2 + (d_1-d_2)\sin\varphi_2} \tag{5}$$

In gleicher Weise kann man auch die Entfernungen S_1 und S_2 nach Fig. 1. bestimmen:

$$\left.\begin{aligned} S_1^2 &= N_1^2 + (d_2-d_1)^2 + 2\,N_1\,(d_2-d_1)\sin\varphi_1 \\ S_2^2 &= N_2^2 + (d_1-d_2)^2 + 2\,N_2\,(d_1-d_2)\sin\varphi_2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Man kann alle diese Formeln auch in Reihen entwickeln, wie in unserer 3. Auflage 1890, S. 349—351 geschehen ist.

Es ist aber darauf aufmerksam zu machen, dass die vorstehenden Formeln (2)—(6) streng giltig sind für beliebig weit entfernte Erdorte. Auch der Depressionswinkel μ kann nach Fig. 5. § 66. streng angegeben werden durch:

$$tang\,(90^0 - \mu) = \frac{S_2\sin\sigma}{N_1 - S_2\cos\sigma} \quad \text{oder} \quad tang\,\mu\,\sin\sigma = \frac{N_1}{S_2} - \cos\sigma \tag{7}$$

Solche strenge Formeln könnten etwa in Frage kommen bei Mondbeobachtungen. Vgl. hiezu auch: „Über das Geoid, von J. Bischoff, München 1889".

Wir haben hiezu ein Zahlen-Beispiel berechnet:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1 = 49^\circ\,30' && \varphi_2 = 50^\circ\,30' \\ \text{Mittel}\quad &\varphi = 50^\circ\;\;0' \quad \text{Differenz} && \Delta\varphi = 1^\circ = 3600' \end{aligned}\right\}$$

Damit wurde sowohl nach den geschlossenen Formeln als nach verschiedenen Reihen berechnet:

$$\left.\begin{aligned} &\delta_1 = 10{,}06\,958'' && \delta_2 = 9{,}86\,285'' \\ &\frac{S_1}{N_1} = 1{,}000\,057\,1638 && \frac{S_2}{N_2} = 0{,}999\,941\,9985 \\ &\log\frac{S_1}{N_1} = 0.000\,0248{\cdot}252 && \log\frac{S_2}{N_2} = 9.999\,9748{\cdot}096 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die beiden sphärischen Dreiecke haben ergeben:

$K_a\,A\,B\,T$	$K_b\,A\,B\,T$	
$\varphi_1 = 49°\,30'\,0''$, $\lambda = 1°\,0'\,0''$	$\varphi_2 = 50°\,30'\,0''$, $\lambda = 1°\,0'\,0''$	
$\varphi_2 - \delta_2 = 50°\,29'\,50{,}13715''$	$\varphi_1 + \delta_1 = 49°\,30'\,10{,}06958''$	
$\alpha = 32°\,25'\,21{,}5294''$	$\alpha'' = 32°\,25'\,21{,}4739''$	(9)
$\beta'' = 33°\,11'\,19{,}3674''$	$\beta = 33°\,11'\,19{,}4237''$	
$\sigma_1 = 1°\,11'\,11{,}22445''$	$\sigma_2 = 1°\,11'\,10{,}97855''$	

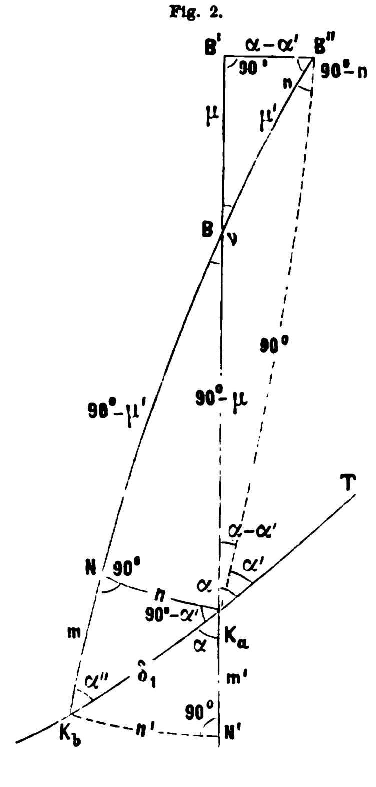
Hieraus ziehen wir auch die Differenzen:

$$\alpha - \alpha'' = 0{,}0555'' \qquad \beta - \beta'' = 0{,}0563'' \tag{10}$$

Der im vorigen § 65. mit α' bezeichnete Winkel ist hier gar nicht vorgekommen; um auch zu diesem zu gelangen, haben wir in nachstehender Fig. 2. im wesentlichen die Verhältnisse der früheren Fig. 4. § 65. S. 362 wiederholt.

Das Azimut α', welches der Gegen-Normalschnitt $B\,K_b\,A$ in A hat (vgl. Fig. 2. S. 362) ist als Winkel zweier Ebenen zunächst nicht vertreten, weil die Ebene $B\,K_b\,A$ in A nicht normal ist. Allerdings bildet diese Ebene $B\,K_b\,A$ mit der Meridian-Ebene von A einen gewissen Winkel α'', welchen wir schon kennen gelernt haben, und von dem wir auch schon wissen, dass er nahezu gleich dem Azimute α' ist; und jenen Winkel α'' finden wir in Fig. 2. leicht wieder, nämlich bei K_b zwischen dem Meridianbogen $K_b\,K_a\,T$ und dem Gegen-Schnittbogen $K_b\,B$.

Fig. 2.



Das Gegen-Azimut α' selbst muss zunächst in Fig. 3. S. 362 dadurch konstruiert werden, dass man die Tangente $A\,B''$ an die Gegen-Schnittkurve $B\,A$ in A zieht; und wenn man gleichzeitig auch die Tangente $A\,B'$ an den Schnittbogen $A\,B$ in A zieht, so liegen diese beiden Tangenten in der Berührungs-Ebene des Punktes A, und fassen den kleinen Winkel $\alpha - \alpha'$ zwischen sich.

Auf diesem Wege ist die Differenz $\alpha - \alpha'$ auch leicht in unsere neue Fig. 2. hinüber zu tragen; man macht den Bogen $B\,B'$ entsprechend dem Depressions-Winkel μ der Sehne $A\,B$ gegen die Tangente $A\,B'$, dann $B'\,B''$ rechtwinklig zu $B\,B'$, worauf sich B'' als Schnitt der Horizontalen $B'\,B''$ mit der Schiefen $K_b\,B\,B''$ ergiebt.

Indessen kann man nicht nur diese kleine Differenz $\alpha - \alpha'$, sondern auch das Azimut α' selbst in Fig. 2. auffinden, indem man den Bogen $B''\,K_a$ zieht, welcher der Ebene $B''\,A\,K_a$ entspricht, und mit dem Meridian $K_a\,T$ das fragliche Azimut α' macht.

Der in Fig. 2. gezogene Bogen $B''\,K_a$ ist $= 90°$, weil die Strahlen $A\,B''$

und $A\,K_a$ in Fig. 3. S. 362 als Tangente und als Normale des Ellipsoids auf einander rechtwinklig sind, und ebenso ist auch $B'\,K_a = 90°$, also $B\,K_a = 90° - \mu$.

Nun wollen wir noch den kurzen Bogen $K_a\,N$ rechtwinklig zu $B''\,K_b$ ziehen, wodurch auch $B''\,N = 90°$ und folglich der Bogen $K_a\,N = n$, gleich dem Winkel n bei B'' wird.

Dieses n ist der Neigungs-Winkel der Normalen $A\,K_a$ gegen die Gegenschnitt-Ebene $B\,A\,K_b$, und eine entsprechende Neigung n' kann man $K_b\,N' = n'$ ebenfalls angeben, d. h. den Neigungs-Winkel n', welchen die jenseitige Normale $B\,K_b$ mit der diesseitigen Normalschnitt-Ebene $A\,B\,K_a$ bildet.

Unsere Fig. 2. zeigt bei B den Winkel ν, welchen die beiden Normalschnitt-Ebenen unter sich bilden, und endlich haben wir noch die kleine Seite $K_a\,K_b = \delta_1$ entsprechend dem kleinen Winkel $K_a\,A\,K_b = \delta_1$ in Fig. 1., den wir auch schon früher kennen gelernt haben.

Nachdem wir so alle Winkel, die uns hier interessieren, in den sphärischen Dreiecken von Fig. 2. dargestellt haben, können wir alle Beziehungen, welche zwischen diesen Winkeln bestehen, durch die sphärische Trigonometrie aus Fig. 2. ableiten.

Wir gehen zuerst darauf aus, die Differenz $\alpha - \alpha''$ zu bestimmen; hiezu giebt eine Cotangenten-Gleichung S. 164, auf das Dreieck $B\,K_a\,K_b$ angewendet, genau wieder wie in (6) § 65. S. 363:

$$cotg\,(90° - \mu)\,\sin\delta_1 = \cos\delta_1\,\cos\,(180° - \alpha) + \sin\,(180° - \alpha)\,cotg\,\alpha''$$

$$tang\,\mu\,\sin\delta_1 = -\cos\delta_1\,\cos\alpha + \sin\alpha\,cotg\,\alpha''$$

$$tang\,\mu\,\sin\delta_1 = \left(2\sin^2\frac{\delta_1}{2} - 1\right)\cos\alpha + \frac{\sin\alpha\,\cos\alpha''}{\sin\alpha''}$$

$$tang\,\mu\,\sin\delta_1 - 2\cos\alpha\,\sin^2\frac{\delta_1}{2} = \frac{\sin\,(\alpha - \alpha'')}{\sin\alpha''} \tag{11}$$

Dadurch ist $\alpha - \alpha''$ bestimmt; und um auch die Differenz $\alpha'' - \alpha'$ zu finden, betrachten wir das kleine rechtwinklige Dreieck $K_a\,K_b\,N$, dessen sphärischer Excess gerade zu $= \alpha'' - \alpha'$ ist, denn der Winkel dieses rechtwinkligen Dreiecks bei K_a ist $= 90° - \alpha'$, weil $K_a\,B''$ rechtwinklig auf $K_a\,N$ steht; es ist also:

$$\alpha'' + (90° - \alpha') = 90° + (\alpha'' - \alpha') \tag{12}$$

Hiefür giebt die Hypotenusen-Formel S. 164:

$$cotg\,\alpha''\,cotg\,(90° - \alpha') = \cos\delta_1$$

$$\cos\alpha''\,\sin\alpha' = \sin\alpha''\,\cos\alpha'\left(1 - 2\sin^2\frac{\delta_1}{2}\right)$$

$$\sin\,(\alpha'' - \alpha') = 2\sin^2\frac{\delta_1}{2}\,\sin\alpha''\,\cos\alpha' \tag{13}$$

Nachdem durch (11) und (13) auch $\alpha - \alpha'$ bestimmt ist, erhält man aus dem oberen rechtwinkligen Dreieck $B\,B'\,B''$ in Fig. 2.:

$$tang\,\nu = \frac{tang\,(\alpha - \alpha')}{\sin\mu} \tag{14}$$

und

$$tang\,n = \frac{\sin\,(\alpha - \alpha')}{tang\,\mu} \tag{15}$$

oder aus dem Dreieck $B\,K_a\,N$:

$$\sin n = \sin\nu\,\cos\mu \tag{16}$$



Dadurch ist n zweifach bestimmt, wie überhaupt noch manche Kontrollgleichung aus Fig. 2. abgelesen werden kann (wozu noch μ', m und m' eingeschrieben sind). Um n und n' auch unmittelbar in δ_1 auszudrücken, hat man aus den kleinen rechtwinkligen Dreiecken $K_a K_b N$ und $K_a K_b N$ in Fig. 3.:

$$\sin n = \sin \delta_1 \sin \alpha'' \qquad \sin n' = \sin \delta_1 \sin \alpha \quad . \quad (17)$$

Um zur Entwicklung von $\alpha - \alpha''$ zu gelangen, haben wir zuerst aus (11):

$$\alpha - \alpha'' = \left(\mu\, \delta_1 - \frac{\delta_1^2}{2} \cos \alpha\right) \sin \alpha \quad (18)$$

Der von der Breiten-Verkürzung herrührende Winkel δ_1 muss aus der geschlossenen Formel (5) für δ_1 auf S. 367 entwickelt werden, was hier nicht näher im Einzelnen dargelegt wird; das Ergebnis ist:

$$\delta_1 = \eta^2 \varDelta \varphi' \left(1 + \frac{\varDelta \varphi'}{2} t\right)$$

Dabei ist gesetzt:

$$\frac{\varDelta \varphi}{\sqrt{2}} = \varDelta \varphi' \quad , \quad tang\, \varphi = t$$

Auch der Depressionswinkel μ wird nach (7) genauer gebraucht, was als Reihen-Entwicklung hier nicht nachgewiesen wird (3. Auflage 1890, S. 360—361). Das Schlussergebnis ist:

$$\alpha - \alpha'' = \eta^2 \varDelta \varphi' \frac{s}{2 N} \sin \alpha_m \quad (19)$$

Dabei bezieht sich η^2 auf die Mittelbreite, wie auch α_m das Mittel-Azimut ist. Weiter wurde gefunden:

$$\alpha - \alpha' = \eta^2 \varDelta \varphi' \frac{s}{2 R} \sin \alpha_m \quad (20)$$

$$\alpha'' - \alpha' = \eta^4 \varDelta \varphi' \frac{s}{2 N} \sin \alpha \cos^2 \alpha \quad (21)$$

Der Unterschied von $\alpha - \alpha'$ gegen $\alpha - \alpha''$ nach (20) und (19) besteht darin, dass bei (19) der Quer-Krümmungs-Halbmesser N im Nenner steht, dagegen bei (20) der Krümmungs-Halbmesser R in der Richtung des Bogens $A B$.

Diese Formeln sind genau auf Glieder von der Ordnung $\eta^2 \sigma^3$ und $\eta^4 \sigma^2$ einschliesslich.

Die letzte Differenz $\alpha'' - \alpha'$ nach (21) hat den Faktor η^4, ist also von nächster Ordnung im Vergleich zu $\alpha - \alpha'$ und $\alpha - \alpha''$.

Die Ausrechnung nach diesen Formeln hat für das Zahlenbeispiel (7)—(10) ergeben:

$$\alpha - \alpha' = \beta - \beta' = 0{,}0560'' \quad (22)$$

Um dieses mit $\alpha - \alpha'' = 0{,}0555''$ und mit $\beta - \beta'' = 0{,}0563$ nach (10) S. 368 zu vergleichen, sollte man noch die Reduktion $\alpha'' - \alpha'$ nach (21) anbringen, welche aber nur $0{,}0001''$ bringt, und neben unserer weniger genauen trigonometrischen Rechnung zu vernachlässigen ist. Hiernach stimmt (22) genügend mit dem früheren (10) S. 368.

Ellipsenbogen der Normalschnitte.

In Fig. 3. ist nochmals der ebene Schnitt $A B K_a$ von Fig. 1. dargestellt, und wir möchten noch die elliptische Bogenlänge $A B = s$ kennen lernen, ohne jedoch die Einzelheiten der Reihen-Entwicklung (von 3. Auflage 1890, S. 353—354) herzusetzen. Aus den Gleichungen (6) muss es möglich sein, zu entwickeln:



$$\frac{S_2}{N_1} = 1 - \frac{\eta^2}{2}\,\sigma^2 \cos^2\alpha \qquad (23)$$

Fig. 3.

Dadurch ist die Kurve AB (Fig. 3.) in Polar-Coordinaten bestimmt, und um s in σ auszudrücken, hat man nur die Bogenlänge s durch Integration zu finden. Hiezu giebt Fig. 3. die Differential-Gleichung:

$$d\,s^2 = (S_2\,d\,\sigma)^2 + (d\,S_2)^2 \qquad (24)$$

Hier ist S_2 als Funktion der Veränderlichen σ nach (24) einzuführen; N_1 ist konstant, und auch α und η^2 gelten hier als konstant. Man hat daher aus (23):

$$\frac{d\,S_2}{d\,\sigma} = -N_1\,\eta^2 \cos^2\alpha\,\sigma \quad , \quad (d\,S_2)^2 = \eta^4 \ldots d\,\sigma^2 \qquad (25)$$

Wenn wir Glieder mit η^4 vernachlässigen, können wir (24) kurz so schreiben:

$$d\,s = S_2\,d\,\sigma = N_1\left(1 - \frac{\eta^2}{2}\,\sigma^2 \cos^2\alpha\right) d\,\sigma$$

Die Integration mit den Grenzen $\sigma = 0$ und $\sigma = \sigma$ giebt:

$$s = N_1\left(\sigma - \frac{\eta^2}{6}\,\sigma^3 \cos^2\alpha\right)$$

oder auch:

$$\sigma = \frac{s}{N_1}\left(1 + \frac{\eta^2}{6}\,\sigma^2 \cos^2\alpha\right) \qquad (26)$$

Das Korrektionsglied beträgt $\frac{\eta^2}{6}\left(\frac{s}{N_1}\right)^3 \cos^2\alpha\,\varrho''$ in Sekunden. Mit $\varphi = \alpha = 45°$ und $s = 100\,000^m$ giebt dieses nur $0{,}0002''$ (man kann daher bei einzelnen Dreiecksseiten das zweite Glied von (26) vernachlässigen).

Nach dem Satz von der verkürzten Breitendifferenz (8) § 54. S. 303 kann man hier setzen $\sigma \cos\alpha = \frac{\Delta\,\varphi}{V^2} = \Delta\,\varphi'$, also wird (26):

$$\sigma = \frac{s}{N_1}\left(1 + \frac{\eta^2}{6}\,\Delta\,\varphi'^2\right) \quad \text{oder} \quad s = N_1\,\sigma\left(1 - \frac{\eta^2}{6}\,\Delta\,\varphi'^2\right) \qquad (27)$$

In dieser Form haben wir das Zahlen-Beispiel (7)—(9) S. 368 behandelt und berechnet:

$$s = N_1\,\sigma_1\,(1 - \ldots) = 132\,315{,}392^m - 0{,}019^m = 132\,315{,}373^m \qquad (28)$$

$$s = N_2\,\sigma_2\,(1 - \ldots) = 132\,315{,}394^m - 0{,}019^m = 132\,315{,}375^m \qquad (29)$$

Das Korrektionsglied von (27) macht also hier nur etwa 2 Centimeter aus. Die beiden Werte s nach (28) und (29) sind innerhalb der Rechenschärfe als *gleich* zu betrachten, und wir werden später in § 71. auch finden, dass sie innerhalb der Rechenschärfe auch gleich lang sind, wie die geodätische Linie zwischen A und B.

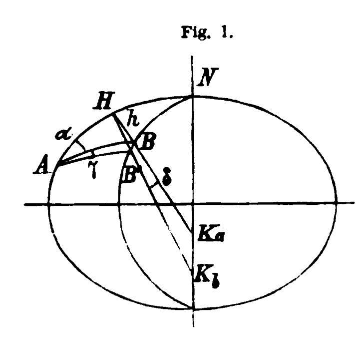
§ 67. Einfluss verschiedener Höhen.

Im Bisherigen haben wir immer die Voraussetzung gemacht, dass die in Betracht kommenden Punkte A, B beide auf der Oberfläche des Umdrehungs-Ellipsoid liegen. Für Triangulierung, Azimutmessung u. dgl. zwischen zwei Punkten ist diese Annahme physisch nicht möglich, weil die Erde nicht durchsichtig ist. In Wirklichkeit befinden sich die Punkte auf Berghöhen, Türmen u. dgl., und es fragt sich, ob dadurch eine Änderung gegen die frühere Annahme stattfindet.

Wir wollen zunächst annehmen, der Standpunkt des Beobachters befinde sich auf der Ellipsoidfläche selbst, welche unseren Betrachtungen zu Grunde gelegt wird; dagegen sei der Zielpunkt in einer Höhe h über der Ellipsoidfläche befindlich, wie in Fig. 1. mit dem Standpunkt A und dem Zielpunkt H angedeutet ist.

Einen solchen Zielpunkt denken wir uns auf das Ellipsoid projiziert mittelst der Ellipsoidnormalen (wobei von einer Krümmung der Lotlinien abgesehen wird).

Fig. 1.



In Fig. 1. sei H ein hochgelegener Punkt und B' dessen Projektion, wobei $H K_b$ die Normale von B ist. Wenn nun von einem entfernten Punkt A, der in der Ellipsoidfläche selbst liegt, mittelst des Theodolits nach B gemessen wird, so geschieht dieses in der Ebene $A H K_a$, welche in A normal ist, und der Theodolit projiziert den Punkt H nicht nach B', sondern nach B.

Um den dadurch entstehenden Azimutal-Fehler $B A B' = \gamma$ zu bestimmen, brauchen wir wieder den kleinen Winkel $K_a H K_b = \delta$, nämlich nach (4) § 65. S. 363 in erster Näherung:

$$\delta = \eta^2 \frac{\Delta \varphi}{V^2} = \eta^2 \frac{s}{N} \cos \alpha$$

wobei s die lineare Entfernung $A B$ und N der Quer-Krümmungs-Halbmesser ist. Damit hat man den Projektionsfehler $B B'$ im Meridian:

$$B B' = h \delta = \eta^2 \frac{h s}{N} \cos \alpha$$

Der entsprechende Azimutfehler γ ist:

$$\gamma = \frac{B B' \sin \alpha}{s} = \eta^2 \frac{h}{N} \sin \alpha \cos \alpha$$

Mit φ und $\alpha = 45°$ giebt dieses:

$$\gamma = 0{,}054'' \frac{h}{1000}$$

Also für $h = 1000^m$ giebt dieses bereits 0,054″.

Wenn der Punkt A selbst nicht in der Ellipsoidfläche liegt, sondern darüber, so ändert das an der bisherigen Betrachtung nichts, weil A in seiner eigenen Normalen $K_a A$ gehoben ist, wobei die vertikale Theodolit-Axe von A mit der Normalen $A K_a$ zusammenfällt.

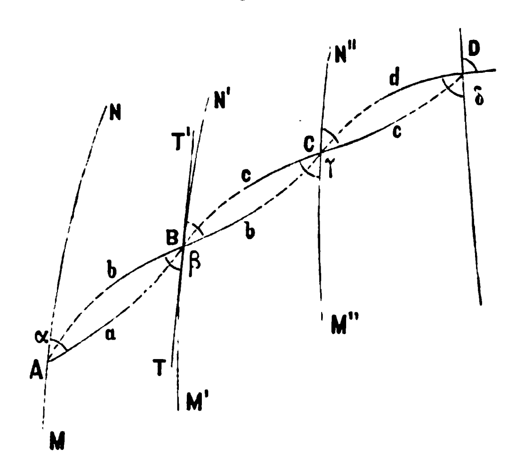
Wirkung der Refraktion. Infolge der Abplattung der Erde und der Niveauschichten der Atmosphäre findet eine Ablenkung eines Lichtstrahles durch Refraktion nicht bloss in vertikalem Sinne, sondern auch in horizontalem Sinne statt. Je zwei aufeinander folgende Elemente eines Lichtstrahls liegen in einer Ebene, welche die Lotlinie der Trennungsfläche zwischen zwei verschieden dichten und verschieden brechenden Schichten der Atmosphäre enthält. Da die Trennungsfläche zweier solcher Schichten rechtwinklig zur Lotrichtung sein muss, finden wir für den Lauf einer Lichtkurve durch die Atmosphäre ein ähnliches Gesetz wie für die geodätische Linie (vgl. Fig. 2. in § 68.), dass nämlich die Schmiegungs-Ebene der Lichtkurve überall Normalebene der lichtbrechenden Fläche sei oder die Lotlinie dieser Fläche enthalten muss.

Auf Grund dieses Gesetzes sind Untersuchungen über die azimutale Ablenkung des Lichtstrahles angestellt worden von Andrae, Sonderhof und Helmert (s. Helmert, höhere Geodäsie II. S. 565), in ähnlicher Weise, wie für den Lauf der geodätischen Linie auf dem Erdellipsoid zwischen den beiden Normalschnitten. Da die Lichtkurve in ihrer Hauptkrümmung viel flacher ist als die geodätische Linie auf der Erde, so wird auch der Querabstand zwischen den Normalschnitten in demselben Verhältnisse kleiner, und ebenso auch die kleinen Winkel beider Lichtkurven kleiner als für die geodätische Linie auf der Erde. Das Krümmungsverhältnis zwischen der Lichtlinie und einer Erdlinie ist der sogenannte Refraktions-Coëfficient, im Mittel etwa $k = 0{,}13$, und hiernach verhält sich die azimutale Ablenkung des Lichtstrahls zu der entsprechenden geodätischen Reduktion wie 0,13 zu 1. Da nun diese geodätische Reduktion selbst sehr gering ist, so ist nach den citierten Untersuchungen von Andrae, Sonderhof und Helmert die Lichtablenkung zu vernachlässigen.

§ 68. Die geodätische Linie.

Nachdem wir in § 65. uns überzeugt haben, dass zwischen zwei Punkten A und B der ellipsoidischen Erdoberfläche im allgemeinen *zwei* verschiedene Normalschnitte bestehen, in welchen bei Theodolit-Beobachtungen von A nach B und von B nach A die Sicht-Linien sich befinden, können wir auch angeben, was für ein Linienzug erhalten wird, wenn man mehrere aufeinanderfolgende Punkte A, B, C (Fig. 1.) durch fortgesetztes Theodolit-Einweisen, wie eine Gerade in der Ebene, absteckt.

Fig. 1.



In Fig. 1. stehe in A ein Theodolit mit lotrechter Axe, mit welchem ein entfernter Punkt B angezielt oder eingewiesen wird, wobei die Sicht $A\,a\,B$ stattfindet. Hierauf begiebt man sich mit dem Theodolit nach B, stellt denselben dort ebenfalls mit lotrechter Axe auf, zielt zurück nach A, was in der Sicht $B\,b\,A$ geschieht, dreht dann um 180° und bekommt die neue Sicht $B\,b\,C$. Hierauf geht man nach C, nimmt wieder die Sicht rückwärts $C\,c\,B$, und um 180° gedreht vorwärts $C\,c\,D$, und so fort.

Die Theorie von § 65. hat uns gezeigt, dass bei diesem Verfahren allerdings im allgemeinen *zwei* Verbindungslinien zwischen je zwei Punkten A und B, B und C, u. s. w. in Betracht kommen, nämlich $A\,a\,B$ von A nach B und $B\,b\,A$ von B nach A u. s. w., doch sind die Abweichungen zwischen a und b, c und d u. s. w. so klein, dass sie selbst bei Dreiecksseiten von 100 000 Meter auf unserer Erdoberfläche noch vernachlässigt werden können.

Wäre unsere Erde stärker abgeplattet, so würden auch diese Abweichungen stärker sein; und im Sinne der Theorie kommt es auf den Grössenbetrag der Abweichungen jetzt nicht an, sondern darauf, dass das mathematische Gesetz des Linienzuges A, B, C, D erkannt werde.

Jedenfalls werden bei der Krümmung, wie sie unser Erdellipsoid hat, die Abweichungen $a\,b$ immer kleiner, wenn die Zielweiten $A\,B$, $B\,C$ u. s. w. fortgesetzt

verkürzt werden. Die kleinen Azimutverschiebungen $a\,A\,b$ u. s. w. wachsen nach (7) § 65. S. 364 nur mit dem Quadrate der Zielweiten; und lässt man die Zielweiten $A\,B$, $B\,C$ .... selbst unendlich klein (im Sinne der Differential-Rechnung) werden, so werden die Schleifen $A\,a\,B\,b$ u. s. w. sich schliessen, und man bekommt statt des Schleifen-Zuges *eine* stetige Linie $A\,B\,C\,D$, welche *geodätische Linie* heisst, und im allgemeinen eine Kurve doppelter Krümmung ist.

Als Richtungswinkel, bezw. Azimute der geodätischen Linie, welche nach dem Zusammenfallen der Schleifen in Fig. 1. entsteht, sind die Winkel α, β, γ, δ zu betrachten, oder genauer die Grenzwerte, gegen welche diese Winkel α, β, γ, δ bei unbegrenzt abnehmenden Strecken $A\,B$, $B\,C$ u. s. w. konvergieren.

Mit den Begriffen der Feld- und Landmessung in der Ebene kann man die geodätische Linie kurz so erklären:

Man macht auf der ellipsoidischen Erdoberfläche genau dasselbe, was der Landmesser thut, wenn er eine sehr lange Gerade $A\,D$ in der Ebene stückweise absteckt, indem er seinen Theodolit zuerst in A, dann in B, C, D aufstellt, und jedesmal einen Brechungswinkel von 180° absetzt.

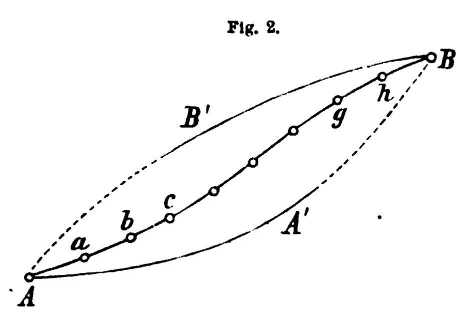
Oder: eine geodätische Linie ist in Bezug auf fortgesetztes Einweisen mit kurzen Zielweiten auf einer krummen Fläche dasselbe, was in der Ebene ein gerade gestrecktes Polygon mit lauter Brechungswinkeln von 180° ist.

Es ist deswegen eine vorzügliche Benennung, welche Soldner in der „monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde“ 1805 § 7. anwendet, in der er sagt: eine „geodätisch gerade Linie“.

Eine geodätische Linie auf irgend einer krummen Fläche ist in der angegebenen Beziehung auch dasselbe, was auf einer Kugelfläche ein grösster Kreisbogen ist.

Wenn hiernach die Absteckung in kleinen Teilstrecken in der Ebene für die Gerade, auf der Kugel für den Grosskreisbogen und auf dem Ellipsoid oder irgend einer andern krummen Fläche für die geodätische Linie, einander analog sind, so ist dagegen für die Absteckung oder Sichtung auf die Gesamtlänge diese Analogie nicht mehr vorhanden, was durch Fig. 2. näher erläutert werden soll.

Fig. 2.



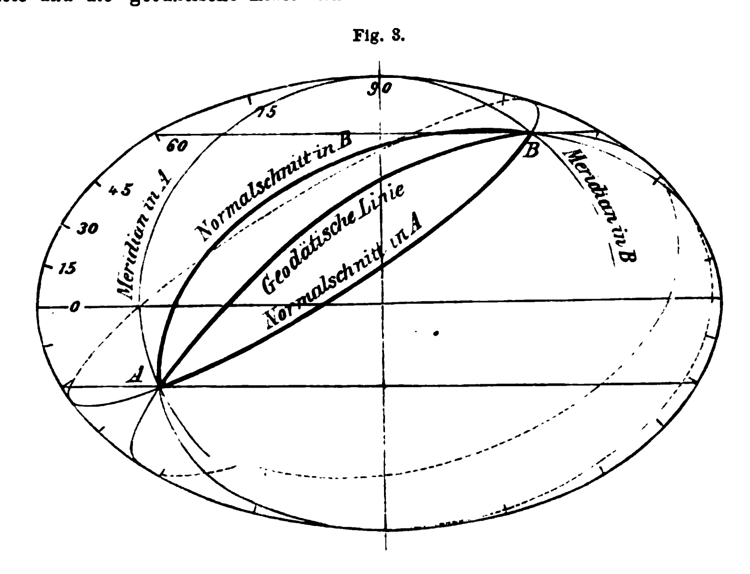
In Fig. 2. sei eine geodätische Linie $A\,a\,b\,c \ldots g\,h\,B$ durch schrittweises Abstecken mit den kleinen Zielweiten $A\,a = a\,b = b\,c$ u. s. w. erhalten, wobei der Theodolit in a, b, c u. s. w. immer Brechungswinkel von 180° zeigt.

Stellt man aber nach Absteckung der Einzelpunkte den Theodolit wieder in A lotrecht auf, und zielt auf *einmal* nach dem Endpunkte B (sofern die Erdkrümmung dieses gestattet), so bekommt man eine ganz andere Sichtlinie als vorher, nämlich nun $A\,A'B$ als vertikalen Schnitt von A nach B, und ebenso in B die Sicht $B\,B'A$ als vertikalen Schnitt von B nach A.

Um dieses noch deutlicher zu zeigen, haben wir in Fig. 3. die beiden Normalschnitte (Vertikalschnitte) zwischen zwei Punkten A und B, nebst der dazwischen verlaufenden geodätischen Linie auf einem Umdrehungs-Ellipsoid mit der Abplattung 1 : 3 dargestellt.

Diese Fig. 3. ist nach einem Modell gemacht, dessen grosse Halbaxe $a = 15^{cm}$ und dessen kleine Halbaxe $B = 10^{cm}$ ist. Es ist also die Abplattung $\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{3}$, die Excentricität $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = 0{,}745$ und $e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}} = 1{,}118$. Die Normalschnitte und die geodätische Linie sind nach mathematischen Gesetzen konstruiert.

Fig. 3.



Schmiegungs-Ebene und Scheitel-Azimute.

Wenn wir die im vorstehenden, aus den Begriffen des Feld- und Landmessens hergeleitete Erklärung der geodätischen Linie in abstraktere Form fassen, so brauchen wir den Begriff der *Schmiegungs-Ebene* (Osculations-Ebene), d. h. einer Ebene, welche durch zwei aufeinander folgende Elemente einer Kurve, in unserem Falle zwei aufeinander folgende Elemente der geodätischen Linie geht.

Nach unserer Feld-Absteckungs-Erklärung ist dieses die Ebene, in welcher in jedem Punkte der rückwärts und vorwärts gerichtete Strahl eines Brechungswinkels von 180° liegt, und da diese Ebene durch die Vertikalaxe des Theodolits geht, ist sie Normal-Ebene der krummen Fläche, auf welcher die geodätische Linie abgesteckt gedacht wird; und deswegen gilt der Satz:

Die Schmiegungs-Ebene der geodätischen Linie ist überall Normal-Ebene der krummen Fläche, auf welcher die geodätische Linie verläuft.

Wenn in irgend einem Punkte der geodätischen Linie, z. B. B Fig. 1. S. 373, irgend eine Flächen-Tangente TT' gezogen wird, so sind die beiden Scheitelwinkel $bBT = \beta$ und $T'Bb = \beta$, welche die geodätische Linie mit dieser Tangente bildet, einander gleich.

Es könnte auf den ersten Blick scheinen, als ob das selbstverständlich und bei allen Kurven der Fall wäre; allerdings sind Scheitelwinkel zwischen zweien Geraden,

also auch zwischen zwei Kurven-Tangenten in einem Punkte einander gleich, und es wäre also im Punkte B für jede Kurve $\beta = \beta'$, wenn ABC Fig. 1. S. 373 als *ein* Element der Kurve gilt; wenn dagegen der Kurventeil ABC aus zwei oder mehr Elementen bestehend angenommen wird, oder mit anderen Worten, wenn man in dem Punkte B die Krümmung der Kurve ABC untersuchen will, dann sind die beiden mit β bezeichneten Winkel nur für den Fall gleich, dass die beiden in dem Punkte B zusammentreffenden Elemente der Kurve gemeinsam in *einer* Ebene liegen, welche auch die Flächen-Normale des Punktes B enthält, d. h. Schmiegungs-Ebene in B ist, so dass dann auch diese Flächen-Normale in B als Schnitt der Schmiegungs-Ebene und der durch $T\,T'$ gehenden Flächen-Normalebene erscheint.

All dieses ist nun bei der geodätischen Linie erfüllt, und wenn man daher eine geodätische Linie $ABCD\ldots$ (Fig. 1. S. 373) durch eine Schar von anderen geodätischen Linien MN, $M'N'$ u. s. w. schneidet, so sind alle dabei auftretenden Schnittwinkel β und β in B, γ und γ in C u. s. w. einander gleich.

Wir werden als geodätische Linien MN, $M'N'$ u. s. w. von Fig. 1. S. 373, welche sämtlich von einer geodätischen Linie $ABCD$ geschnitten werden, später namentlich die Meridiane des Umdrehungs-Ellipsoids finden, wo α, β, γ die Azimute sind, und deswegen sprechen wir das, was über die Winkel β, β, sowie γ, γ u. s. w. erkannt wurde, sofort aus in dem Satze: *die geodätische Linie schneidet jeden Meridian unter gleichen Scheitel-Azimuten.*

Krümmungs-Linien.

Zur allgemeinen Klärung der Begriffe empfiehlt es sich, neben der geodätischen Linie auch noch die Krümmungslinie zu erwähnen. Eine auf einer krummen Fläche gezogene Krümmungslinie hat die Eigenschaft, dass je zwei aufeinander folgende, ihr zugehörige Flächen-Normalen sich schneiden, was bei der geodätischen Linie nicht der Fall ist, wie z. B. aus den zwei Punkten K_a und K_b Fig. 1. § 65. S. 361 zu ersehen ist.

Eine Krümmungslinie folgt stets der grössten oder der kleinsten Krümmung, deren Richtungen nach dem Eulerschen Satze (§ 33. S. 199) zu einander rechtwinklig sind; und daher bilden die sämtlichen Krümmungslinien einer Fläche zwei Scharen von Kurven, die sich überall gegenseitig rechtwinklig schneiden.

Ein Flächenpunkt, in welchem die beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser (und damit auch alle Normalschnitts-Krümmungs-Halbmesser) gleich sind, heisst „Nabelpunkt" der Fläche. Z. B. sind die beiden Pole des Umdrehungs-Ellipsoids Nabelpunkte in diesem Sinne; die Meridiane sind Krümmungslinien der einen Schar, und die Parallelkreise sind Krümmungslinien der zweiten Schar. Das strahlenförmige Ausgehen der Meridiane als erster Schar vom Pol als Nabelpunkt ist jedoch nur besonderer Fall und findet z. B. bei den vier Nabelpunkten des dreiaxigen Ellipsoids nicht mehr statt.

Wenn eine Krümmungslinie zugleich geodätische Linie sein soll, so muss sie ganz in einer Ebene liegen, weil jede Flächen-Normale sowohl von den beiden benachbarten Flächen-Normalen geschnitten werden, als auch in der Ebene zweier benachbarten Kurven-Elemente liegen muss, was bloss bei einer ebenen Kurve möglich ist; dagegen umgekehrt eine Krümmungslinie, die in einer Ebene liegt, ist deswegen nicht notwendig geodätische Linie.

Auf dem Umdrehungs-Ellipsoid (sowie auf jeder anderen Umdrehungsfläche) ist jeder Meridian geodätische Linie *und* Krümmungslinie; ein Parallelkreis ist Krümmungslinie aber *nicht* geodätische Linie.

§ 69. Differential-Gleichungen der geodätischen Linie.

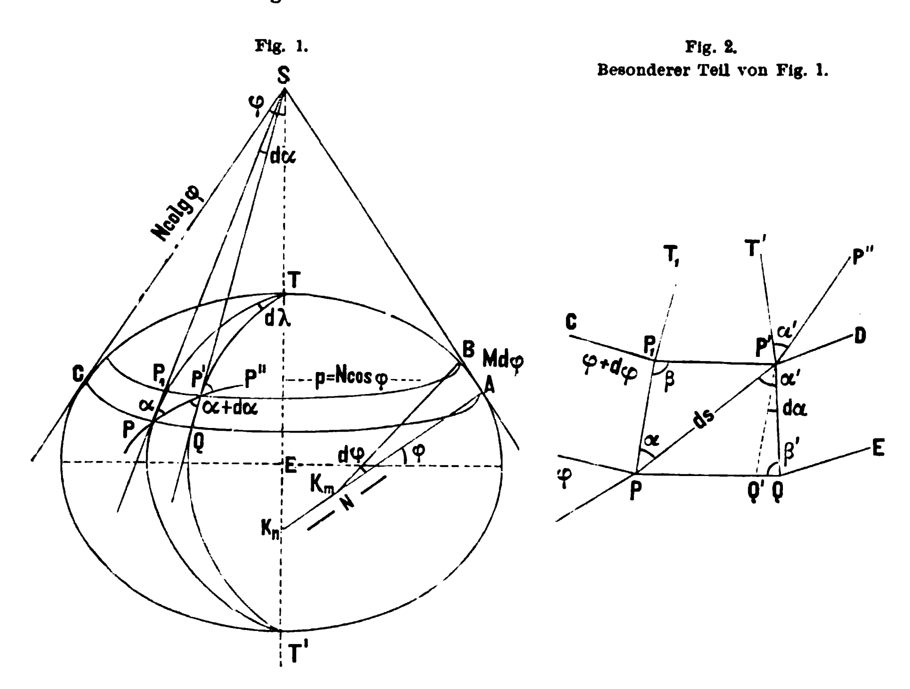
Nachdem wir am Schluss des vorigen § 68. den Satz von den gleichen Scheitel-Azimuten der geodätischen Linie gefunden haben, können wir die Differential-Gleich-



ungen dieser Linie auf irgend einer Umdrehungsfläche aufstellen, in ähnlicher Weise wie wir früher bei Fig. 1. § 61. S. 347 die Differential-Gleichungen des grössten Kreises auf der Kugel durch geometrische Betrachtungen nachgewiesen haben.

Obgleich die nachfolgenden Betrachtungen auf jede beliebige Umdrehungsfläche bezogen werden können, legen wir doch sofort in Fig. 1. unser Umdrehungs-Ellipsoid zu Grunde, weil wir für andere Flächen keine Anwendung haben.

Im Anschluss an Fig. 1. und Fig. 2. stellen wir eine geometrische Differential-Betrachtung an, welche ganz analog dem früheren Falle auf der Kugel (Fig. 1. und Fig. 2. § 61. S. 347) ist. Wir betrachten dabei Fig. 2. als polyedrisches Analogon zu der wirklichen krummen Fläche, und haben dabei den Grenzfall für unbegrenzt abnehmendes ds im Auge.



Eine geodätische Linie $P P' P''$ schneidet schief über zwei Meridiane und zwei Parallelkreise des Umdrehungs-Ellipsoids hin, wodurch ein Trapez $P P_1 P' Q$ für uns von Wichtigkeit wird, dessen Diagonale $P P'$ ein Stück ds der geodätischen Linie ist.

Indem wir die Breiten φ und $\varphi + d\varphi$ und den Längenunterschied $\Delta\lambda$ sowie den Meridian-Krümmungs-Halbmesser M und den Quer-Krümmungs-Halbmesser N nach alter Bezeichnung annehmen, haben wir (nach Andeutung von K_m und K_n in Fig. 1. und Fig. 2.) die Seiten des Trapezes:

$$A B \text{ oder } P P_1 = M\, d\varphi \tag{1}$$

$$P Q \text{ oder } P_1 P' = N \cos\varphi\, d\lambda \tag{2}$$

Wenn nun das Azimut der geodätischen Linie bei P den Wert α hat, und das Element der geodätischen Linie selbst $= ds$ gesetzt wird, so erhält man in erster

Näherung, da der Winkel β bei P_1 mit unbegrenzt abnehmendem ds gegen 90° konvergiert:

aus (1): $$ds \cos\alpha = M\,d\varphi \tag{3}$$

aus (2): $$ds \sin\alpha = N\cos\varphi\,d\lambda = p\,d\lambda \tag{4}$$

Um auch für $d\alpha$ eine Differential-Formel zu erhalten, betrachten wir das langgestreckte schmale Dreieck $PP'S$, welches oben bei S den Winkel $d\alpha$ enthält; dasselbe giebt genau in derselben Weise, wie früher bei der Kugel in (3 a) § 61. S. 348 gezeigt wurde, die Gleichung:

$$d\alpha = d\lambda \sin\varphi \tag{5}$$

Dabei ist aber zu beachten, dass dieses $d\alpha$ zunächst nur gilt für die Differenz:

$$QP'P - P_1PP' = d\alpha \tag{6}$$

allein wegen des Satzes von den gleichen Scheitel-Azimuten der geodätischen Linie, den wir eingangs citiert haben, sind die *beiden* in Fig. 2. bei P' mit α' bezeichneten Azimute einander gleich, oder noch ausführlicher geschrieben:

$$T'P'P'' = QP'P, \quad \text{also nach (6):} \quad T'P'P'' - P_1PP' = d\alpha \tag{7}$$

Nun haben wir in (3), (4) und (5) bereits die gesuchten Differential-Gleichungen der geodätischen Linie auf dem Umdrehungs-Ellipsoid, und überzeugen uns auch, dass dieselben ähnliche Form haben wie die früheren Gleichungen (1), (2), (3) S. 347, welche für den Grosskreisbogen auf der Kugel gelten.

Die Meridian-Konvergenz $d\alpha$ kann man auch dadurch darstellen, dass man in Fig. 2. eine Parallele $P'Q'$ zu P_1P zieht, dann wird der kleine Winkel $Q'P'Q = d\alpha$ derselbe Wert wie $d\alpha$ an der Spitze S von Fig. 1. Dieses führt auch auf eine neue Formel für $d\alpha$, denn es ist nach Fig. 2.:

$$d\alpha = \frac{Q'Q}{P'Q'} = \frac{Q'Q}{ds\cos\alpha} \tag{8}$$

Nun ist QQ' das Differential von PQ oder von P_1P', wofür wir diesesmal den Parallelkreis-Halbmesser $N\cos\varphi = p$ einführen wollen, indem $PQ = p\,d\lambda$ ist. Damit wird:

$$QQ' = -d(p\,d\lambda) = -dp\,d\lambda \tag{9}$$

Wir haben dieses negativ genommen, weil der Parallelkreisbogen bei wachsender Breite ($d\varphi$ positiv) abnimmt. Wir haben also nun aus (8) und (9):

$$d\alpha = -\frac{dp\,d\lambda}{ds\cos\alpha}$$

Wenn man hiezu wieder (4) nimmt, und $d\lambda$ eliminiert, so hat man:

$$p\cos\alpha\,d\alpha = -dp\sin\alpha \tag{10}$$

Dieses ist das Differential von:

$$p\sin\alpha = k \text{ (konstant)} \tag{11}$$

und damit haben wir als erste Integration der Differential-Gleichungen der geodätischen Linie einen wichtigen Satz (11), welcher in Worten lautet:

Das Produkt aus dem Parallelkreis-Halbmesser p in den Sinus des Azimuts α ist für den ganzen Lauf der geodätischen Linie konstant.

Dieser Satz, welchem auf der Kugel der Sinussatz der sphärischen Trigonometrie entspricht, giebt sofort Aufschluss über den Gesamtverlauf einer geodätischen Linie auf dem Umdrehungs-Ellipsoid.



Die beiden Faktoren p und $\sin\alpha$, deren Produkt nach (11) konstant $= k$ bleiben muss, schwanken selbst zwischen leicht angebbaren Grenzen. Das Azimut α kann im allgemeinen nicht = Null werden (was dem besonderen Fall des Meridians entspricht), sondern hat seinen kleinsten Wert dann, wenn p seinen grössten Wert hat, d. h. im Äquator, wo $p = a$ ist; also:

$$\sin\alpha_{min} = \frac{k}{a} \tag{12}$$

Der grösste Wert von α, d. h. 90°, entspricht dem kleinsten Wert von p, d. h. mit $\sin\alpha = 1$ hat man: $p_{min} = k$ (13)

Die Konstante k der Formel (11) ist also der Halbmesser des nördlichsten oder südlichsten Parallelkreises, den die geodätische Linie erreichen kann; und dadurch ist auch eine gewisse äusserste geographische Breite bestimmt, über welche eine geodätische Linie nicht hinaus kommen kann.

In Fig. 3. § 69. S. 375 ist diese äusserste Breite = 60°. Die geodätische Linie berührt abwechselnd den nördlichen und den südlichen äussersten Parallelkreis, und da sie im allgemeinen nicht in sich selbst zurückkehrt, umläuft sie zwischen den genannten äussersten Parallelen das Sphäroid in unendlich vielen spiralförmigen Windungen.

Übersicht der Haupt-Formeln.

Wir wollen unsere gefundenen Formeln, die zu weiterem gebraucht werden, nochmals zusammenstellen:

(3) $ds\cos\alpha = M\,d\varphi$ (φ)

(4) $ds\sin\alpha = N\cos\varphi\,d\lambda$ (λ)

(5) und (4) $d\alpha = d\lambda\sin\varphi$ oder $d\alpha = \frac{ds}{N}\sin\alpha\tan\varphi$ (α)

(11) $p\sin\alpha = k$ $(p = N\cos\varphi)$ (ψ)

Dabei ist M der Meridian-Krümmungs-Halbmesser, N der Quer-Krümmungs-Halbmesser und p der Parallelkreis-Halbmesser für die Breite φ.

Die letzte der vorstehenden Gleichungen, welche wir mit (ψ) bezeichnet haben, weil sie später auf die „reduzierte Breite“ ψ angewendet wird, kann man auch unmittelbar aus Fig. 2. herleiten, indem man in erster Näherung setzt:

$$P_1P' = ds\sin\alpha \quad\text{und}\quad PQ = ds\sin\alpha' \tag{14}$$

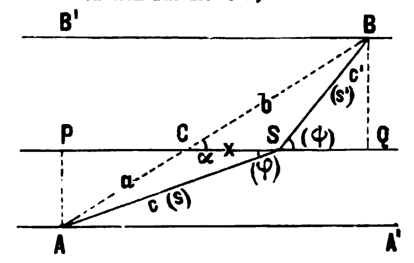
also $P_1P'\sin\alpha' = PQ\sin\alpha$, wobei $P_1P' = p'\,d\lambda$ und $PQ = p\,d\lambda$ (15)

Daraus folgt $p'\sin\alpha' = p\sin\alpha =$ Konstant. (16)

§ 70. Die geodätische Linie als kürzeste Linie.

Im Anschluss an Fig. 1. nehmen wir zuerst folgende Aufgabe: Man habe ein Prisma mit den drei Kanten AA', $B'B$, PQ, die wir (zur Vereinfachung der Anschauung) so gelegt denken, dass AA' und $B'B$ in einer horizontalen Ebene und PQ im Abstand h darüber sich befindet. Es soll auf der oberen Kante ein Punkt S so bestimmt werden, dass die Summe der *schiefen* Verbindungen $AS + SB = (s) + (s')$ nach zwei festen Punkten A und B möglichst klein werde.

Fig. 1.
Die eingeklammerten Masse (s), (s'), (φ), (ψ) beziehen sich auf die *schiefen* Ebenen.



Wenn die in Fig. 1. eingeschriebenen Masse a, b, c, c', x nebst dem Winkel α für die Grundriss-Ebene gelten, so hat man:

$$c^2 = a^2 + x^2 + 2\,a\,x\cos\alpha \quad , \quad c'^2 = b^2 + x^2 - 2\,b\,x\cos\alpha \tag{1}$$

Wenn weiter (s) und (s') die *schiefen* Entfernungen AS und SB bedeuten, und h die Höhe von S über A und B, so ist:

$$(s)^2 = c^2 + h^2 \qquad (s')^2 = c'^2 + h^2 \tag{2}$$

Nun soll $(s) + (s')$ ein Minimum werden, d. h.:

$$\sqrt{a^2 + x^2 + 2\,a\,x\cos\alpha + h^2} + \sqrt{b^2 + x^2 - 2\,b\,x\cos\alpha + h^2} = \text{Minimum} \tag{3}$$

Wenn man dieses (3) nach der unabhängigen Veränderlichen x differentiiert, so findet man:

$$\frac{x + a\cos\alpha}{(s)} + \frac{x - b\cos\alpha}{(s')} = 0 \tag{4}$$

Es ist aber nach Fig. 1. im Grundriss gemessen:

$$x + a\cos\alpha = PS \quad , \quad b\cos\alpha - x = QS$$

Damit wird (4):

$$\frac{PS}{(s)} = \frac{QS}{(s')} \quad \text{oder} \quad \cos(\varphi) = \cos(\psi)$$

$$\text{also: } (\varphi) = (\psi) \tag{5}$$

Diese Gleichung (5) sagt: der kürzeste Weg auf zweien sich schneidenden Ebenen, über die Kante PQ hinweg, liegt so, dass auf der Scheitel-Kante PQ die beiden Winkel (φ) und (ψ) einander gleich sind.

Wenn wir diese einfache Betrachtung dazu anwenden, um die Differential-Eigenschaft der kürzesten Linie auf irgend einer krummen Fläche, insbesondere auf dem Umdrehungs-Ellipsoid, zu bestimmen, so können wir an Stelle der Kanten AA', BB' u. s. w. die aufeinander folgenden Meridiane treten lassen, und wir wissen nun, dass eine Kurve alle diese Meridiane auf kürzestem Wege überschreitet, wenn die dabei vorkommenden Scheitel-Azimute gleich sind, d. h. die kürzeste Linie hat, in Hinsicht auf die Azimute, dieselbe Eigenschaft wie die geodätische Linie, wie wir am Schluss von § 68. S. 376 gesehen haben.

Wir schliessen hieraus, dass die geodätische Linie und die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten identisch sind.

Dabei und bei allen ähnlichen Betrachtungen nehmen wir stillschweigend an, dass zwischen zwei Punkten nur *eine* geodätische Linie und nur *eine* kürzeste Linie bestehe, wir schliessen also Fälle, welche z. B. einem Centriwinkel über 180° auf der Kugel entsprechen, und ähnliche aus.

Geodätischer Kreis und geodätische Parallele.

Aus dem Begriffe der kürzesten Linie lassen sich durch einfache geometrische Betrachtung zwei Sätze herleiten, betreffend den „geodätischen" Kreis und die „geodätische Parallele". Gauss hat in der Abhandlung „Disquisitiones generales circa superficies curvas", Art. 15. und 16. dieses so dargestellt:

Geodätischer Kreis. Wenn auf einer krummen Fläche von einem Anfangspunkte unendlich viele kürzeste Linien, alle von gleicher Länge ausgehen, so ist die ihre Enden verbindende Linie zu allen einzelnen normal.



Fig. 2.

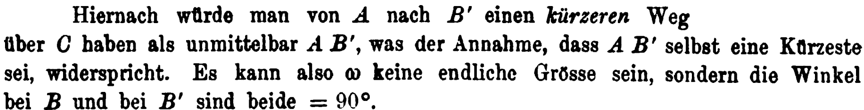
Es seien in Fig. 2. AB und AB' zwei gleich lange kürzeste Linien, welche den unendlich kleinen Winkel bei A zwischen sich fassen; und wir wollen zunächst annehmen, die beiden Winkel bei B und B' seien *nicht* beide $= 90°$, sondern weichen um eine endliche Grösse von 90° ab, so dass nach dem Gesetz der Stetigkeit der eine grösser, der andere kleiner als 90° wäre, z. B. $B = 90° - \omega$. Dann nehmen wir auf der Linie BA einen Punkt C so an, dass $BC = BB' \operatorname{cosec} \omega$ wird; und insofern das unendlich kleine Dreieck $BB'C$ als eben angesehen werden kann, folgt hieraus $CB' = BC \cos \omega$ und ferner:

$$AC + CB' = AC + BC \cos \omega = AB - BC(1 - \cos \omega).$$

Es ist aber von vornherein angenommen, dass $AB = AB'$ sei, also:

$$AC + CB' = AB' - BC(1 - \cos \omega).$$

Hiernach würde man von A nach B' einen *kürzeren* Weg über C haben als unmittelbar AB', was der Annahme, dass AB' selbst eine Kürzeste sei, widerspricht. Es kann also ω keine endliche Grösse sein, sondern die Winkel bei B und bei B' sind beide $= 90°$.



Geodätische Parallele. Wenn auf einer krummen Fläche eine beliebige Linie gezogen wird, von deren einzelnen Punkten rechtwinklig zu der Linie und nach derselben Seite hin unendlich viele kürzeste Linien von gleicher Länge ausgehen, so schneidet die Kurve, welche die anderen Endpunkte derselben verbindet, sie alle rechtwinklig.

Man kann dieses ähnlich beweisen wie bei Fig. 2., indem man wieder einen kleinen Winkel ω einführt und zwei unendlich nahe benachbarte geodätische Linien wie zwei Gerade in der Ebene behandelt.

Dieser zweite Satz über die geodätische Parallele ist allgemeiner als der erste Satz vom geodätischen Kreis, welcher in dem zweiten Satze mit enthalten ist, wenn man nur als gegebene Linie einen unendlich kleinen um A beschriebenen Kreis annimmt.

Ein naheliegendes Beispiel für geodätische Kreise und für Parallelen bietet das System der Meridiane und der Parallelkreise auf der Kugel oder auf dem Umdrehungs-Ellipsoid (und auf anderen Umdrehungs-Flächen). Die Parallelkreise sind geodätische Kreise in Bezug auf den Pol als Zentralpunkt der Meridiane und geodätische Parallelen in Bezug auf irgend einen Parallelkreis.

Ebenso wie diese Parallelkreise selbst *nicht* geodätische Linien sind, sind auch die geodätischen Kreise und geodätischen Parallelen im allgemeinen selbst nicht geodätische Linien.

Kürzeste Linie auf einer abwickelbaren Fläche.

Bei der geometrischen Betrachtung von Fig. 1. S. 379 sind die Kanten BB' und AA' selbst unwesentlich, es handelt sich nur um zwei *Punkte* A und B, welche über die dritte Kante PQ hinweg verbunden werden sollen. Durch A und B selbst können beliebige andere Gerade gehen. Man kann deswegen aus Fig. 1. auch schliessen, dass eine kürzeste Linie auf einer abwickelbaren Fläche nach Abwicklung in die Ebene eine Gerade sein muss (Gleichheit der Winkel (φ) und (ψ)). Die Kanten AA', BB' und PQ, welche in unserer Fig. 1. parallel angenommen wurden, können auch auf

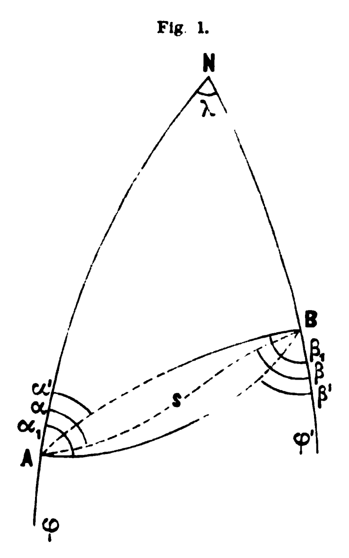


einer abwickelbaren Fläche parallel sein (Cylinder), im allgemeinen aber müssen, wenn die Fläche abwickelbar sein soll, je zwei aufeinander folgende solcher Geraden sich schneiden.

§ 71. Vergleichung der geodätischen Linie mit den Normal-Schnitten.

Die geodätische Linie erscheint auf kurze Erstreckung im Sinne des Feldmessens in allen ihren Teilen wie eine Gerade; würde man dieselbe in kurzen Strecken landmesserisch als polygonalen Zug aufnehmen, so würde man lauter Brechungswinkel von 180° finden, wie bei einer Geraden in der Ebene.

Fig. 1.



In Fig. 1. und Fig. 2. betrachten wir zwei Punkte A und B unter den Breiten φ und φ' mit dem Längenunterschied λ.

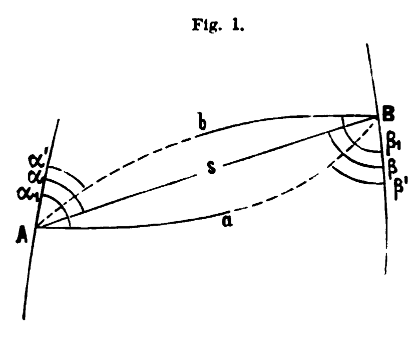
$A\,a\,B$ ist der Normalschnitt von A nach B und $B\,b\,A$ ist der Normalschnitt von B nach A, und dazwischen verläuft die geodätische Linie $A\,s\,B$, was im voraus gesagt sein soll.

Zur Veranschaulichung der Krümmungsverhältnisse denken wir uns in A einen Feldmesser mit einem richtig aufgestellten Theodolit als Beobachter, welcher die Azimute α', α, α_1 der drei Kurven von dem als Gerade erscheinenden Meridian $A\,N$ messen oder einstellen kann.

Der Normalschnitt $A\,a\,B$ mit dem Azimut α_1 erscheint diesem in A mit einem Theodolit ausgerüsteten Feldmesser als eine Gerade, denn er hat die ganze Linie $A\,a\,B$ beim Auf- und Niederkippen seines Fernrohrs in *einer* Sicht am Fadenkreuz, wie es das Wesen des Normalschnittes von A nach B verlangt.

Die geodätische Linie $A\,s\,B$ mit dem Azimute α macht dem Feldmesser, der in A mit seinem Theodolit steht, in ihren ersten Teilen ebenfalls den Eindruck der Geraden, wie in Fig. 2. § 68. S. 374 angedeutet ist, dass streckenweise $A\,a\,b$, dann $a\,b\,c$ u. s. w. ohne Brechung erscheinen. Aber die Gegenschnittlinie $A\,b\,B$ mit dem Azimute α' macht dem Feldmesser in A den Eindruck einer *Kurve*, denn nur von B aus erscheint $A\,b\,B$ als Gerade ebenso wie umgekehrt $A\,a\,B$ zwar in A als Gerade erscheint, aber in B als Kurve.

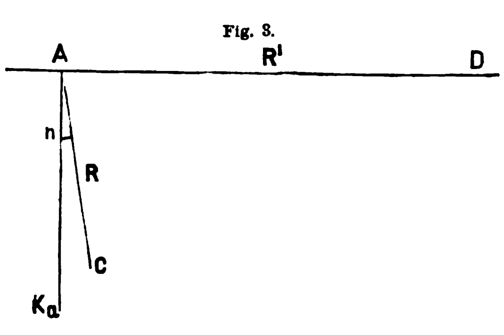
Fig. 1.



Wir wollen darauf ausgehen, den Krümmungs-Halbmesser R' zu bestimmen, unter welchem die Kurve $B\,b\,A$ dem Beobachter in A erscheint, oder den Krümmungs-Halbmesser, unter welchem die Kurve $A\,a\,B$ einem Feldmesser in B erscheint; beide werden nahezu gleich sein.

Dazu haben wir die weiteren Fig. 3. und 4. gezeichnet, von denen Fig. 4. ein Lageplan wie Fig. 2. und Fig. 3. der zugehörige Vertikalschnitt rechtwinklig zu Ab ist.

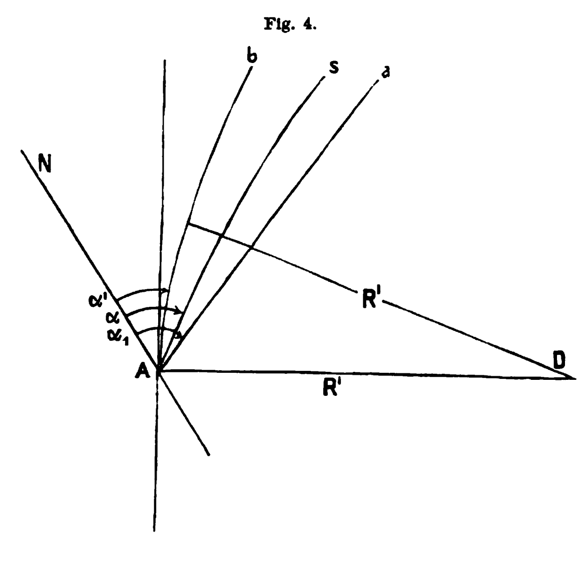
Fig. 3.



Wenn R der Krümmungs-Halbmesser des ebenen Gegen-Schnittes AbB in A ist, d. h. R in erster Näherung auch gleich dem Krümmungs-Halbmesser R nach dem Eulerschen Satze (1) § 32. S. 199, oder auch nur in erster Näherung gleich dem mittleren Erdkrümmungs-Halbmesser, was zunächst auch schon genügt, und wenn n der kleine Neigungswinkel der Schnittebene AbA gegen die Flächen-Normale AK_a im Punkte A ist, so wird die Kurve Ab in dem Horizont von A betrachtet (Fig. 4.) einen sehr viel grösseren Krümmungs-Halbmesser R' geben, welcher ist:

$$R' = \frac{R}{\sin n} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{R'} = \frac{\sin n}{R} \tag{1}$$

Fig. 4.



Man nennt diese Beziehung in der analytischen Geometrie den „Satz von Meunier"; man kann ihn fast unmittelbar einsehen, wenn man nur bedenkt, dass die Ordinaten y der Kurve AC von Fig. 3. sich im Verhältnis $\sin n : 1$ verkürzt in Fig. 4. wieder finden, dass also auch $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ in der Nähe des Punktes A ebenso verkürzt werden und die Kurve Ab in Fig. 4. entsprechend flacher wird.

Innerhalb der nur einzuhaltenden ersten Näherung kann man (1) auch so schreiben:

$$\frac{1}{R'} = \frac{n}{R} \tag{2}$$

Wir müssen nun darauf ausgehen, die oben eingeführte Neigung n zwischen der Schnittebene AbB und der Flächennormalen AK_a zu bestimmen, und wir betrachten dazu die früheren Fig. 1. § 65. S. 361 und Fig. 1. § 66. S. 366.

Dort wird sich der fragliche Neigungswinkel n finden, und man wird auch

sehen, dass er in erster Näherung auch gleich dem Neigungswinkel ν der beiden Schnittebenen ist, d. h. nach (14) § 65. S. 365 nehmen wir:

$$n = \nu = \eta^2 \sigma \sin \alpha \cos \alpha = \eta^2 \frac{s}{N} \sin \alpha \cos \alpha \tag{3}$$

Dieses ist für unseren nächsten Zweck genügend. Wollte man genauer verfahren, so müsste man die beiden Gleichungen (17) § 66. S. 370 zu Rate ziehen, aus welchen zu ersehen ist, dass die 3 Neigungswinkel n, n' und ν alle zusammen in erster Näherung den Wert $\delta \sin \alpha$ oder $\eta^2 \sigma \sin \alpha \cos \alpha$ haben, wie in vorstehender Gleichung (3) geschrieben ist.

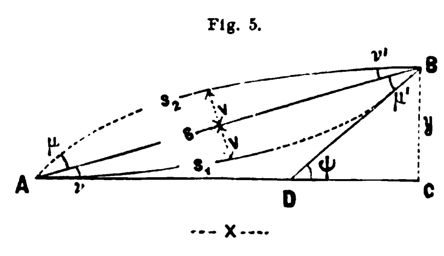
Aus (2) und (3) zusammen folgt:

$$\frac{1}{R'} = \eta^2 \frac{s}{R\,N} \sin \alpha \cos \alpha \tag{4}$$

Dabei ist R der Erdkrümmungs-Halbmesser im Azimut α und N der Querkrümmungs-Halbmesser; indessen für den Zweck erster Näherungsbestimmungen brauchen wir das nicht zu unterscheiden; wir wollen schlechthin $R = N = r$ gleich dem mittleren Erdkrümmungs-Halbmesser für eine Mittelbreite zwischen φ und φ' setzen, wie man es für Triangulierungen thut, also wird (4):

$$\frac{1}{R'} = \eta^2 \frac{s}{r^2} \sin \alpha \cos \alpha \tag{5}$$

Fig. 5.



Nun haben wir unsere 3 Linien nochmals dargestellt in Fig. 5. mit Annahme eines Coordinatensystems $x\,y$, das einer Abbildung in der Ebene entspricht, so dass nun die geodätische Linie $A\,s\,B$ als *Gerade* erscheint, und die beiden anderen Kurven mit ihren relativen geodätischen Krümmungen sich als Kurven $A\,s_1\,B$ und $B\,s_2\,A$ darstellen.

Die geodätische Linie $A\,B$ kann zunächst selbst als Abscissenaxe betrachtet werden, und durch kurze geodätische Ordinaten-Linien rechtwinklig hiezu, können benachbarte Punkte hierauf bezogen werden, ähnlich wie auf der Kugel bei den Soldnerschen Coordinaten.

Was die dabei nötigen Vernachlässigungen betrifft, so wissen wir von (15) § 65. S. 365, dass die Ordinaten eines solchen Systems nur von der Ordnung $\eta^2 \sigma^3$ sind. Die Ordinaten-Konvergenz (in erster Näherung sphärisch nach Fig. 3. S. 262 berechnet), wird dann nur von der Ordnung $\eta^2 \sigma^4$, woraus man weiter schliesst, dass es für unsere Zwecke genügt, die fraglichen Coordinaten wie *ebene* rechtwinklige Coordinaten zu behandeln, indem die kleinen Winkel μ und ν u. s. w. nur von der Ordnung $\eta^2 \sigma^2$ erscheinen werden.

Diesen Bedingungen entsprechend ist das Coordinaten-System in Fig. 5. gezeichnet. $A\,B$ ist das geradlinig erscheinende Abbild der geodätischen Linie $A\,B$; jedoch als Abscissenaxe des Coordinaten-Systems wird nicht $A\,B$, sondern die Tangente $A\,C$ des Normalschnittes von $A\,s_1\,B$ genommen, was mit gleicher Näherung zulässig ist.

Die Kurve $A\,s_1\,B$ denken wir uns dargestellt durch eine Gleichung $y = f(x)$, und die Reciproke des Krümmungs-Halbmessers R' dieser Kurve ist hinreichend ausgedrückt durch

$$\frac{1}{R'} = \frac{d^2 y}{d\,x^2}$$

Da auch Abscisse x und Kurvenlänge $\sqrt{d\,x^2 + d\,y^2}$ verwechselt werden dürfen, können wir mit Zuziehung von (5) auch schreiben:

$$\frac{d^2 y}{d\,x^2} = \eta^2 \frac{x}{r^2} \sin\alpha \cos\alpha = \frac{x}{q} \tag{6}$$

wobei
$$\frac{\eta^2 \sin\alpha\cos\alpha}{r^2} = \frac{1}{q} \tag{7}$$

Die Kurvengleichung (6) zweimal integriert giebt:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{x^2}{2\,q} \tag{8}$$

$$y = \frac{x^3}{6\,q} \tag{9}$$

Integrations-Konstanten kommen nicht hinzu, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ und $\frac{d\,y}{d\,x} = 0$ werden soll.

Eine nicht zur Sache gehörige, aber den praktischen Landmesser rasch orientierende Zwischenbemerkung möchten wir nicht unterdrücken, nämlich dass die Kurve (9) nichts anderes ist, als die beim Eisenbahn-Kurven-Abstecken übliche cubische Parabel, welche als Übergangskurve zwischen Geraden und Kreisbögen dient.

Nun hat man nach dem Anblicke von Fig. 5.:

$$\left.\frac{d\,y}{d\,x}\right]_{x=s} = \frac{s^2}{2\,q} = \psi = \mu' + \nu \tag{10}$$

und
$$\left.\frac{y}{x}\right]_{x=s} = \frac{s^2}{6\,q} = \nu \tag{11}$$

Auch die Kurvenlänge $A\,s_1\,B$, kurz $= s_1$ bezeichnet, lässt sich angeben, indem in Fig. 5. die Grenzabscisse $A\,C = c$ gesetzt wird,

$$s_1 = \int_0^c \sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}\,d\,x = \int_0^c \left(1 + \frac{x^4}{8\,q^2}\right) d\,x$$

$$s_1 = c + \frac{c^5}{40\,q^2} \tag{12}$$

dazu die Länge der geodätischen Linie selbst:

$$s = \left.\sqrt{x^2 + y^2}\,\right]_{x=c} = \sqrt{c^2 + \frac{c^6}{36\,q^2}} = c\left(1 + \frac{c^4}{72\,q^2}\right)$$

$$s = c + \frac{c^5}{72\,q^2} \tag{13}$$

Die Differenz von (12) und (13) giebt, indem nun wieder $c = s$ gesetzt wird:

$$s_1 - s = \frac{s^5}{q^2}\left(\frac{1}{40} - \frac{1}{72}\right) = \frac{s^5}{90\,q^2} \tag{14}$$

Damit ist alles gefunden, was in Fig. 5. sich auf die untere Kurve $A\,s_1\,B$ bezieht; und um die entsprechende Untersuchung auch für die obere Kurve $A\,s_2\,B$ zu führen, könnte man auch die Gleichung dieser Kurve aufsuchen nach den Bedingungen, dass die Kurve durch die beiden Punkte A und B gehen und in A denselben Krümmungs-Halbmesser R'_a haben soll, welcher die erste Kurve im Punkte B hat $= R'_b$, denn wir haben ja schon in (4) eingesehen, dass innerhalb der ersten Näherung $R'_a = R'_b$ ist. Dann ist aber auch die zweite Kurve s_2 überhaupt keine

andere, als die erste Kurve s_1, nur liegt sie umgekehrt, und in Fig. 5. sind die Winkel $\mu = \mu'$ und $\nu = \nu'$.

Wir wollen auch noch den Querabstand v zwischen der geodätischen Linie und jeder ihrer Begleitkurven bestimmen (vgl. Fig. 5.). Dieser Querabstand ist nach (9):

$$v = \frac{1}{2}\left(\frac{s^3}{6\,q}\right) - \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^3}{6\,q} = \frac{s^3}{16\,q}$$

$$\text{oder}\quad 2\,v = \frac{s^3}{8\,q} \tag{15}$$

Nun ist in allen unseren Formeln noch die eine Konstante q nach (7) enthalten, welche wir aber nicht unmittelbar einsetzen wollen, denn es lässt sich besser alles in dem Excess ε nach Fig. 6. § 65. S. 364 ausdrücken, nämlich:

$$\varepsilon = \frac{s^2 \sin\alpha \cos\alpha}{2\,r^2}$$

also wegen (7):

$$\frac{1}{q} = 2\,\eta^2\,\varepsilon$$

und damit geben die verschiedenen vorstehenden Formeln:

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{Winkel:} & \mu = \frac{2}{3}\,\eta^2\,\varepsilon & & \nu' = \frac{1}{3}\,\eta^2\,\varepsilon \\
& \nu = \frac{1}{3}\,\eta^2\,\varepsilon & & \mu' = \frac{2}{3}\,\eta^2\,\varepsilon \\
\hline
& \mu + \nu = \eta^2\,\varepsilon & & \mu' + \nu' = \eta^2\,\varepsilon
\end{array}\right\} \tag{16}$$

$$\text{Kurvenlängen}\qquad s_1 - s = s_2 - s = \frac{2}{45}\,\eta^4\,s\left(\frac{\varepsilon}{\varrho}\right)^2 \tag{17}$$

$$\text{Querabweichung}\qquad 2\,v = \frac{1}{4}\,\eta^2\,s\,\frac{\varepsilon}{\varrho} \tag{18}$$

Der letzte Ausdruck stimmt überein mit dem früheren (15) § 65. S. 365.

Zu einem ersten Zahlenbeispiele wollen wir nehmen $s = 100\,000^m$ und $\varphi = 45°$, sowie $\alpha = 45°$; damit wird $\log r = 6.8046$, $\eta^2 = 0{,}00336$, und damit zunächst $\varepsilon = 12{,}66''$

$$\mu = \mu' = 0{,}028'' \qquad \nu = \nu' = 0{,}014''$$
$$2\,v = 0{,}005^m \qquad s_1 - s = s_2 - s = 0{,}00000\,00002^m$$

Der Wert $2\,v = 5^{mm}$ stimmt mit dem früheren (16) § 65. S. 365. Ein zweites mehrfach von uns benütztes Beispiel mit der Mittelbreite $\varphi = 50°$, den beiden Endbreiten 49° 30′ und 50° 30′ und $\lambda = 1°$ giebt: $s = 132\,315^m$ $\alpha = 32°\,48'$

$$\log r = 6.80489 \qquad \log \eta^2 = 7.44345$$
$$\mu = \mu' = 0{,}0373'' \qquad \nu = \nu' = 0{,}0187''$$
$$2\,v = 0{,}009^m \qquad s_1 - s = s_2 - s = 0{,}00000\,00004^m$$

Diese Zahlenbeispiele zeigen, dass für die gewöhnlichen Dreiecksseiten bei dem heutigen Stande der Messkunde die kleinen Winkel μ und ν vernachlässigt werden können. Die Differenz $s_1 - s$ wäre nicht einmal mikroskopisch messbar.

Höhere Glieder der vorstehenden Formeln.

Man kann die Entwicklungen, welche im vorstehenden immer nur die ersten Näherungen berücksichtigt haben, auch auf diesem Wege noch weiter treiben, wie in



unserer 3. Auflage 1890, § 75. gezeigt worden ist; es hat aber keinen praktischen Zweck, und ist deswegen im vorstehenden nicht mehr berücksichtigt. Nur *eine* Sache davon wollen wir wenigstens mit Worten behandeln.

In Fig. 6. ist der besondere Fall behandelt, dass die Punkte A und B, zwischen welchen die geodätische Linie und die beiden Normalschnitte gezogen sind, auf *gleicher* Breite liegen.

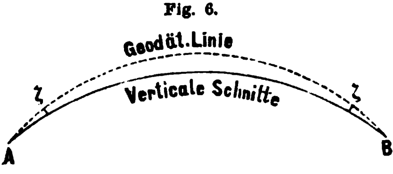


Fig. 6.

In diesem Falle fallen die beiden Normalschnitte (vertikale Schnitte) in *einen* zusammen, und die geodätische Linie kann daher nicht mehr *zwischen* den beiden liegen.

Dass die geodätische Linie nicht selbst mit diesen beiden ebenen Schnitten zusammenfallen kann, ist unmittelbar einzusehen, insofern die geodätische Linie in diesem Fall nicht selbst eine ebene Kurve sein kann.

Die geodätische Linie verläuft dann über dem vertikalen Schnitte, aber mit so kleinen Winkeln ζ, dass dieselben innerhalb der Näherungen unserer μ und ν von (16) gar nicht mehr zum Ausdruck kommen, die genauere Entwicklung giebt nämlich:

$$\zeta = \eta^2 \frac{s^3}{24\,r^3}\, tang\,\varphi = e'^2 \frac{s^3}{24\,r^3}\, sin\,\varphi\, cos\,\varphi$$

Denkt man sich eine Dreiecksseite $s = 100\,000^m$ in der Breite $\varphi = 45°$, so giebt dieses nur $\zeta = 0{,}0001''$.

§ 72. Bedeutung der geodätischen Linie für die praktischen Vermessungen.

Die geodätische Linie ist niemals Gegenstand der unmittelbaren Messung, sondern nur der Berechnung, und dadurch mittelbar ein Hilfsmittel für ausgedehnte geodätische Messungen.

Bei der Messung der einzelnen Dreiecke ist von geodätischen Linien nicht die Rede, denn die Sichten der Theodolit-Messung erfolgen zweifellos in vertikalen Schnitten, und nicht in geodätischen Linien; und auch die astronomischen Azimut-Messungen beziehen sich nicht auf die geodätische Linie, sondern ebenfalls auf vertikale Schnitte.

Man kann die gemessenen Azimute und die gemessenen Horizontal-Winkel von den vertikalen Schnitten auf die geodätischen Linien reduzieren, wie im vorigen § 71. gezeigt worden ist; die Reduktion beträgt sehr wenig, nämlich für 45° Breite und Azimut 45° bei einer Entfernung von $100\,000^m$ nur 0,04″ im Azimut, so dass diese Reduktion meist vernachlässigt wird.

Sei es nun, dass man diese kleinen Reduktionen (nebst anderen, z. B. Höhenreduktion von § 67) vernachlässigt, oder sie in Rechnung bringt; jedenfalls *kann* man letzteres thun, und an Stelle eines in Normalschnitten gemessenen Dreiecks-Netzes kann man also nun ein Dreiecks-Netz setzen, dessen Seiten geodätische Linien sind, und dessen Winkel von den horizontalen Tangenten der geodätischen Linien in den Eckpunkten eingeschlossen werden.

Wie man ein solches sphäroidisches Dreiecks-Netz geodätischer Linien in theoretischer Strenge berechnen kann, werden wir erst in einem späteren Kapitel kennen lernen; in der Praxis genügt fast immer die sphärische Dreiecks-Berechnung.

Um nun weiter zu langen geodätischen Linien überzugehen, welche die Ausdehnung nicht bloss einzelner Dreiecks-Seiten, sondern ganzer Dreiecks-Ketten haben, wollen wir nach Fig. 1. die Annahme machen, eine Dreiecks-Kette zwischen den Punkten A und B enthalte einen Zug $ACDEB$, welcher in C, D und E bei der Messung zufällig lauter Winkel von 180° geliefert habe.

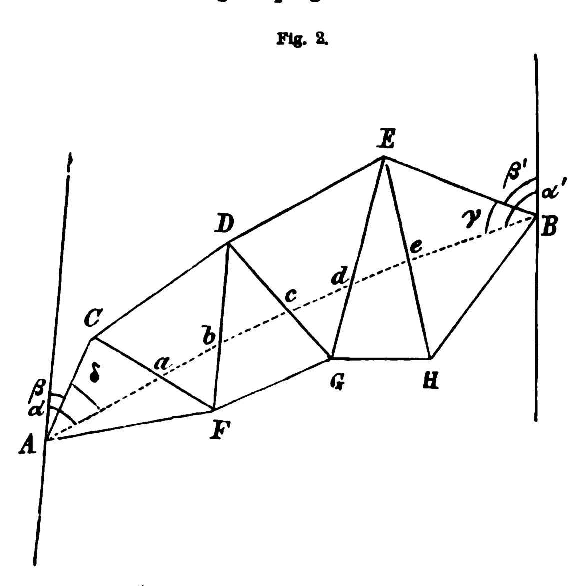
Fig. 1.

Dann kann die Linie $AC + CD + DE + EB = AB$, mit den Azimuten α und α' an ihren Endpunkten geradezu als *eine* lange geodätische Linie weiter behandelt werden, indem man in den einzelnen Strecken AC, CD u. s. w. die Azimut-Reduktionen zwischen der geodätischen Linie und den Normalschnitten entweder vernachlässigt, oder in Rechnung gebracht denkt.

Ohne diese kleinen Reduktionen erscheinen die Strecken AC, CD, DE u. s. w. mit Brechungs-Winkeln von 180°, als Elemente der geodätischen Linie AD in dem differentialen Sinne der früheren Fig. 2. § 68. S. 374.

Die in Fig. 1. gemachte Annahme, dass bei der Triangulierung zwischen A und B in den Punkten C, D und E Brechungs-Winkel von 180° erhalten werden, kann als Vorbereitung des allgemeineren Falles von Fig. 2. dienen, wobei die geodätische Linie zwischen A und B nicht mit Dreiecksseiten selbst zusammenfällt, sondern verschiedene Dreiecks-Seiten in den Punkten $a\,b\,c\,d\,e$ schneidet, und am Anfang und am Ende gewisse Winkel δ und γ mit Dreiecks-Seiten bildet.

Fig. 2.



Sobald man *einen* dieser Winkel δ und γ wüsste, könnte man die ganze geodätische Linie $A\,a\,b\,c\,d\,e\,B$ sphärisch berechnen, indem man die einzelnen Strecken als Seiten sphärischer Dreiecke behandelte, z. B. $A\,a$ als Seite des Dreiecks $A\,C\,a$ oder $A\,F\,a$, dann $a\,b$ als Seite des Dreiecks $a\,F\,b$ u. s. w. Die Azimut-Übertragung in a, b u. s. w. müsste stets nach dem Gesetz der gleichen Scheitel-Winkel geschehen, also so, dass Winkel $A\,a\,C$ = Winkel $b\,a\,F$ u. s. w.

All dieses setzt, wie schon erwähnt, voraus, dass man den einen Winkel δ oder γ kenne, und da das in Wirklichkeit nicht genau der Fall ist, kann das ganze Verfahren nur *mittelbar* angewendet werden. Man rechnet nämlich die ganze Dreiecks-

Kette, mit Annahme eines mittleren Krümmungs-Halbmessers zuerst sphärisch durch, und dadurch sind auch die beiden Winkel δ und γ sphärisch bestimmt. Man kann zu ihrer Ausmittlung z. B. Soldnersche oder konforme Coordinaten oder sphärische geographische Coordinaten, oder irgend welche andere geschlossene oder entwickelte Formeln der sphärischen Trigonometrie anwenden; erste Näherungen der Winkel δ und γ werden sich jedenfalls finden lassen.

Mit einer solchen Näherung, z. B. für δ, beginnt man nun eine zweite schärfere Rechnung, formell auch sphärisch, aber so, dass in jedem der Dreiecke $A a F$, $b a F$, u. s. w. ein besonderer, der mittleren geographischen Breite des Dreiecks entsprechender Krümmungs-Halbmesser angewendet wird. Wenn dann am Ende das letzte Dreieck $E e B$ oder $e H B$ nicht schliesst, d. h. wenn man den Endpunkt B verfehlt hat, so kann man aus der Querabweichung und der Gesamtlänge $A B$ leicht eine Verbesserung berechnen, mit welcher die ganze Rechnung wiederholt und dann wohl zum Schluss gebracht werden kann.

Stimmt diese ganze Rechnung von A bis B in sich, sind also auch die Winkel δ und γ bekannt, so kann man auch die in A und B etwa gemessenen Azimute β und β', welche sich als astronomische Messungen auf die Dreiecks-Seiten $A C$ und $B E$ beziehen, nun auf die Azimute α und α' der geodätischen Linie $A B$, bzw. $B A$ reduzieren, denn es ist:

$$\alpha = \beta + \delta \quad , \quad \alpha' = \beta' + \gamma \tag{1}$$

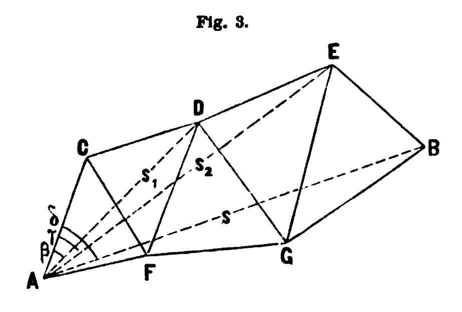
Sphärische Polar-Coordinaten.

Von den verschiedenen möglichen Formen der sphärischen Coordinaten, die wir erwähnt haben, wollen wir *eine* Form, nämlich sphärische Polar-Coordinaten noch besonders betrachten, weil diese Form bei Bessels „Gradmessung in Ostpreussen“ zur Anwendung kam und zu manchen Erörterungen Veranlassung gegeben hat.

Denken wir uns in Fig. 3., welche im wesentlichen dieselbe Bedeutung hat, wie Fig. 2., ausser $A B$ auch noch die Linien $A D$ und $A E$ gezogen, so ist klar, dass man das Dreieck $A C D$ berechnen kann aus den zwei Seiten $A C$, $C D$ und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel bei C. Damit hat man die Entfernung $A D = s_1$ und auch den Winkel β bei A, und alle Winkel bei D.

Man kann daher nun ein zweites langgestrecktes Dreieck $A D E$ berechnen, welches die neue Entfernung $A E = s_2$, den kleinen Winkel $\gamma - \beta$ bei A und alle Winkel bei E liefert. Ein letztes langgestrecktes Dreieck endlich liefert die Entfernung $A B = s$, den kleinen Winkel $\delta - \gamma$ bei A, also auch δ selbst, und alle Winkel bei B. Hiebei kann man die einzelnen Dreiecke nicht bloss sphärisch, sondern auch sphäroidisch berechnen. Ein Zahlenbeispiel zu dem Besselschen Verfahren gab unsere 2. Auflage 1878, S. 340 bis 342, und verschiedene Citate hiezu gab 3. Auflage 1890, S. 385.

Fig. 3.



Sphäroidische Coordinaten.

Ein letztes, und wohl das beste Verfahren, lange geodätische Linien aus Dreieckskettten zu berechnen, können wir durch vorgreifendes Citieren der Theorieen unserer nächsten Kapitel angeben: Man rechnet die geodätische Übertragung von Länge, Breite und Azimut schrittweise von Dreiecksseite zu Dreiecksseite durch die ganze Kette hindurch nach § 77. (oder auch nach § 74.) und dann kann man die ganze Linie vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt nach Kap. VII. berechnen.

Bei diesem Verfahren braucht man, ohne indirekt rechnen zu müssen, nicht *mehr* Voraussetzungen zu machen, in Bezug auf die Erddimensionen und auf die Breiten des Anfangspunktes und das Azimut der Anfangs-Richtung, als unbedingt nötig ist. Eine völlig voraussetzungslose Berechnung geodätischer Linien giebt es nicht.

Über die Bedeutung der geodätischen Linie für die praktische Geodäsie im allgemeinen lässt sich so viel sagen: Die Einführung der Theorie der geodätischen Linie in der Geodäsie ist keine Notwendigkeit, wie z. B. die Theorie der geradlinigen ebenen Dreiecke es für die ebene Triangulierung ist; man könnte die Aufgaben der höheren Geodäsie auch z. B. durch Sehnen-Dreiecke und polyedrisch-räumliche Punkt-Bestimmungen und in noch manch anderer Weise behandeln; allein die geodätische Linie hat sich bis jetzt als bestes Mittel bewährt, zwischen den unmittelbaren geodätischen und astronomischen Messungen einerseits und den Annahmen über die Erdoberfläche andererseits, die nötigen mathematischen Beziehungen herzustellen.

Kapitel VII.

Geodätische Coordinaten.

Vorbemerkung. Wir werden in diesem Kapitel im wesentlichen das mit der geodätischen Linie auf dem Ellipsoid behandeln, was schon in Kapitel V. mit dem Normalschnitt auf der Kugel gemacht worden ist.

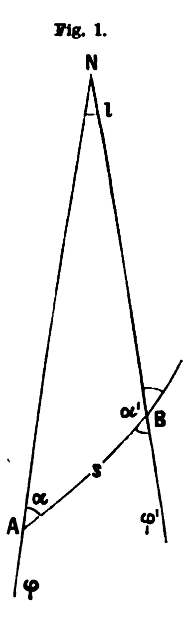
Der Übergang von der Kugel zum Ellipsoid von § 54. mit Hilfe des elliptischen Meridianbogens und des „verkürzten" Breitenunterschiedes $\frac{\Delta \varphi}{V^2}$ war ein erster Notbehelf, welcher genügte, um die sphärischen Coordinaten-Formeln dem Ellipsoid anzupassen und in übertragener Form für erstes Verständnis unserer Landesvermessungen plausibel zu machen. Mit der Theorie der geodätischen Linie wird all das in neuer und heller Beleuchtung erscheinen.

§ 73. Sphäroidisches Polar-Dreieck.

In Fig. 1. S. 391 bezeichnet A einen Punkt des Umdrehungs-Ellipsoids (Sphäroids) mit der Breite φ, entsprechend B einen Punkt mit der Breite φ'; der Längen-Unterschied dieser beiden Punkte, d. h. der Winkel, welchen ihre Meridian-Ebenen NA und NB einschliessen, sei l (von West nach Ost positiv gezählt). Die beiden Punkte sind durch eine geodätische Linie AB verbunden, deren lineare Grösse $= s$ sei und welche bei A und B die Azimute α und α' hat.

Wir zählen im allgemeinen die Azimute von Nord über Ost, wie α im Punkt A; und das gleichfalls nordöstlich gezählte Azimut im Punkte B wäre also $= \alpha' \pm 180°$, wenn α' der in Fig. 1. eingeschriebene Winkel ist.





Indem man in solchen Fällen unterscheidet diesseitiger Punkt A und jenseitiger Punkt B, kann man auch festsetzen, dass im diesseitigen Punkt α von Nord über Ost gezählt und im jenseitigen Punkt stets $\pm 180°$ zu dem Wert α' zuzufügen ist, den die Formeln geben. (Mit anderen Worten: Wir wollen die Azimute nordöstlich zählen, aber das dabei für den jenseitigen Punkt nötige Zusetzen von $\pm 180°$ in den Formeln weglassen.)

Zwischen diesen 6 Grössen, φ, φ', l, s, α, α', bestehen Beziehungen von ähnlicher Art wie für das *sphärische* Dreieck Fig. 1. § 60. S. 338, welche hauptsächlich in zwei Aufgabenformen sich ausdrücken, nämlich *erstens*: gegeben φ, φ' und l, gesucht s, α und α' oder *zweitens*: gegeben φ, s und α; gesucht φ', l und α'.

Die Lösungen dieser beiden Aufgaben gehen mehrfach ineinander über.

Ehe wir an die verschiedenen Auflösungen der Aufgabe selbst gehen, schicken wir einige Beispiele hiefür voraus (ähnlich wie wir dieses auch für die sphärische Aufgabe S. 338 gethan haben). Dass diese Beispiele in sich richtig sind, können wir jetzt noch nicht beweisen; dieses wird sich aus der übereinstimmenden Berechnung nach den verschiedenen später zu entwickelnden Methoden ergeben.

I. Kleines sphäroidisches Normal-Beispiel.

$$\left.\begin{array}{lll}
\varphi = 49°\,30'\,0'' & \varphi' = 50°\,30'\,0'' & l = 1°\,0'\,0'' \\
\dfrac{\varphi'+\varphi}{2} = 50°\;\;0'\,0'' & \varphi'-\varphi = \;1°\;\;0'\,0'' & \\
\dfrac{\alpha'+\alpha}{2} = 32°\,48'\,20{,}4580'' & \alpha'-\alpha = 0°\,45'\,57{,}8942'' & \\
\dfrac{\alpha'-\alpha}{2} = \;0°\,22'\,58{,}9471'' & \log s = 5.121\,6103{\cdot}131 & \\
\hline
\alpha' = 33°\,11'\,19{,}4051'' & s = 132\,315{,}875^{m} & \\
\alpha = 32°\,25'\,21{,}5109'' & &
\end{array}\right\} \quad (1)$$

II. Grosses sphäroidisches Normal-Beispiel.

$$\left.\begin{array}{lll}
\varphi = 45°\;\;0'\,0'' & \varphi' = 55°\,0'\,0'' & l = 10°\,0'\,0'' \\
\dfrac{\varphi'+\varphi}{2} = 50°\;\;0'\,0'' & \varphi'-\varphi = 10°\,0'\,0'' & \\
\dfrac{\alpha'+\alpha}{2} = 32°\,54'\,11{,}4302'' & \alpha'-\alpha = 7°\,41'\,51{,}9408'' & \\
\dfrac{\alpha'-\alpha}{2} = \;3°\,50'\,55{,}9704'' & \log s = 6.120\,6674{\cdot}805 & \\
\hline
\alpha' = 36°\,45'\;\;7{,}4006'' & s = 1\,320\,284{,}366^{m} & \\
\alpha = 29°\;\;3'\,15{,}4598'' & &
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Ein Beispiel, das zwischen den beiden vorhergehenden liegt, ist von den Mecklenburgischen Geodäten als Kontroll-Diagonale über das ganze Land gerechnet worden. („Zeitschr. f. Verm." 1896, S. 240—242). Dasselbe giebt mit den Bezeichnungen von Fig. 1. folgendes:

III. Mecklenburgische Diagonale.

$$\left.\begin{array}{lll}
\varphi = 53^\circ\ 0' & \varphi' = 54^\circ 30' & l = 3^\circ 30' \\
\dfrac{\varphi'+\varphi}{2} = 53^\circ 45' & \varphi' - \varphi = 1^\circ 30' & l = 12\,600'' \\
\dfrac{\alpha'+\alpha}{2} = 54^\circ\ 8'\ 20{,}77402'' & \alpha' - \alpha = 2^\circ 48'\ 23{,}18112'' & \\
\dfrac{\alpha'-\alpha}{2} = 1^\circ 24'\ 41{,}59056'' & \log s = 5.454\,5946{\cdot}712 & \\
\hline
\alpha' = 55^\circ 33'\ 2{,}36458'' & s = 284\,835{,}8642^m & \\
\alpha = 52^\circ 43\ 39{,}18346'' & &
\end{array}\right\} \quad (3)$$

Ein kleines Beispiel, mit nicht runden Zahlen, nehmen wir aus Bohnenbergers Triangulierung von Württemberg:

IV. P = Hornisgrinde. P' = Tübingen.

$$\left.\begin{array}{ll}
\varphi = 48^\circ 36'\ 21{,}8966'' & \varphi' = 48^\circ 31'\ 12{,}4000'' \\
\multicolumn{2}{c}{l = 0^\circ 50'\ 55{,}5537'' = 3055{,}5537''} \\
\alpha = 98^\circ 21'\ 29{,}9583'' & \alpha' = 98^\circ 59'\ 40{,}6800'' \\
\log s = 4.801\ 8443{\cdot}0 & s = 63\,364{,}218^m
\end{array}\right\} \quad (4)$$

Endlich nehmen wir noch ein grösseres Beispiel mit nicht runden Zahlen, welches auch schon anderwärts mehrfach benützt worden ist.

V. P = Berlin. P' = Königsberg.

$$\left.\begin{array}{ll}
\varphi = 52^\circ 30'\ 16{,}7'' & \varphi' = 54^\circ 42'\ 50{,}6'' \\
\multicolumn{2}{c}{l = 7^\circ 6'\ 0'' = 25\,560''} \\
\alpha = 59^\circ 33'\ 0{,}6892'' & \alpha' = 65^\circ 16'\ 9{,}3650'' \\
\log s = 5.724\ 2591{\cdot}353 & s = 529\,979{,}578^m
\end{array}\right\} \quad (5)$$

§ 74. Reihen-Entwicklungen nach Potenzen von s.

(Bezeichnungen nach Fig. 1. S. 391.)

Die drei Differential-Gleichungen, welche wir in § 69. S. 379 entwickelt haben, sind, wenn wir nun den Längenunterschied mit l bezeichnen, folgende:

$$ds \cos\alpha = M\, d\varphi \tag{1}$$

$$ds \sin\alpha = N \cos\varphi\, dl \tag{2}$$

$$d\alpha = dl \sin\varphi \tag{3}$$

Dabei ist M der Meridian-Krümmungs-Halbmesser und N der Quer-Krümmungs-Halbmesser für die Breite φ, d. h. wie immer nach § 32. S. 197:

$$M = \frac{c}{V^3}\ ,\quad N = \frac{c}{V}\ ,\quad \text{wobei } V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2\varphi} \tag{4}$$

Wenn man diese Bezeichnung V einführt, und zugleich $d\,l$ aus (3) mittelst (2) eliminiert, so erhält man aus (1), (2) und (3):

$$\frac{d\,\varphi}{d\,s} = \frac{1}{c}\,V^3 \cos\alpha \tag{5}$$

$$\frac{d\,l}{d\,s} = \frac{1}{c}\,V\,\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} \tag{6}$$

$$\frac{d\,\alpha}{d\,s} = \frac{1}{c}\,V \sin\alpha \operatorname{tang}\varphi \tag{7}$$

Hierauf kann man eine Entwicklung nach dem Maclaurin schen Satze gründen, ganz entsprechend der früheren sphärischen Entwicklung von § 65. Wir haben bis zur fünften Potenz:

$$\varphi' - \varphi = \left.\frac{d\,\varphi}{d\,s}\right]s + \left.\frac{d^2\varphi}{d\,s^2}\right]\frac{s^2}{2} + \left.\frac{d^3\varphi}{d\,s^3}\right]\frac{s^3}{6} + \left.\frac{d^4\varphi}{d\,s^4}\right]\frac{s^4}{24} + \left.\frac{d^5\varphi}{d\,s^5}\right]\frac{s^5}{120} + \cdots \tag{8}$$

$$l = \left.\frac{d\,l}{d\,s}\right]s + \left.\frac{d^2 l}{d\,s^2}\right]\frac{s^2}{2} + \left.\frac{d^3 l}{d\,s^3}\right]\frac{s^3}{6} + \left.\frac{d^4 l}{d\,s^4}\right]\frac{s^4}{24} + \left.\frac{d^5 l}{d\,s^5}\right]\frac{s^5}{120} + \cdots \tag{9}$$

$$\alpha' - \alpha = \left.\frac{d\,\alpha}{d\,s}\right]s + \left.\frac{d^2\alpha}{d\,s^2}\right]\frac{s^2}{2} + \left.\frac{d^3\alpha}{d\,s^3}\right]\frac{s^3}{6} + \left.\frac{d^4\alpha}{d\,s^4}\right]\frac{s^4}{24} + \left.\frac{d^5\alpha}{d\,s^5}\right]\frac{s^5}{120} + \cdots \tag{10}$$

Da wir bei den fortgesetzten Differentiierungen stets auch die Ableitung von V brauchen (vgl. hiezu auch das frühere § 34. S. 208), schicken wir diese voran:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2\varphi} \quad , \quad \frac{d\,V}{d\,\varphi} = -\frac{e'^2 \sin\varphi\cos\varphi}{V} \tag{11}$$

Zur Abkürzung werden wir immer schreiben:

$$e'^2\cos^2\varphi = \eta^2 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{tang}\varphi = t \tag{12}$$

und damit wird (11): $\quad V^2 = 1 + \eta^2 \qquad \dfrac{d\,V}{d\,\varphi} = -\dfrac{\eta^2}{V}\,t \qquad (13)$

$$\frac{d\,V}{d\,s} = \frac{d\,V}{d\,\varphi}\frac{d\,\varphi}{d\,s} = -\,\eta^2\,\frac{V^2}{c}\cos\alpha\,t \tag{14}$$

Nun leiten wir (5) weiter ab:

$$\frac{d\,\varphi}{d\,s} = \frac{V^3}{c}\cos\alpha \quad , \quad \frac{d^2\varphi}{d\,s^2} = \frac{3\,V^2}{c}\frac{d\,V}{d\,s}\cos\alpha - \frac{V^3}{c}\sin\alpha\,\frac{d\,\alpha}{d\,s}$$

also wegen (14) und (7):

$$\frac{d^2\varphi}{d\,s^2} = -\,3\,\eta^2\,\frac{V^4}{c^2}\cos^2\alpha\,t - \frac{V^4}{c^2}\sin^2\alpha\,t$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\,s^2} = -\,\frac{V^4}{c^2}\,(\sin^2\alpha\,t + 3\cos^2\alpha\,\eta^2\,t) \tag{15}$$

Wenn wir dieses weiter ableiten, so ist es nützlich, die Funktion η^2, welche nach (12) Funktion von φ ist, stets so zu behandeln (ebenso wie früher S. 208):

$$\frac{d\,\eta^2}{d\,\varphi} = -\,2\,\eta^2\,t \qquad \text{allgemeiner}\ \frac{d\,\eta^n}{d\,\varphi} = -\,n\,\eta^n\,t \tag{16}$$

In dieser Weise leiten wir (15) nochmals ab (mit Beachtung, dass $V^3 = V\,(+\eta^2)$):

$$\frac{d^3\varphi}{d\,s^3} = -\,\frac{4\,V^3}{c^2}\left(-\,\eta^2\,\frac{V^2}{c}\cos\alpha\,t\right)\left\{\sin^2\alpha\,t + 3\cos^2\alpha\,\eta^2\,t\right\}$$

$$-\,\frac{V^4}{c^2}\left\{2\sin\alpha\cos\alpha\,\frac{V}{c}\sin\alpha\,t^2 + \sin^2\alpha\,(1 + t^2)\,\frac{V}{c}\cos\alpha\,(1 + \eta^2)\right.$$

$$\left.-\,6\cos\alpha\sin\alpha\,\frac{V}{c}\sin\alpha\,t\,\eta^2\,t + 3\cos^2\alpha\,(-\,2\,\eta^2\,t^2 + \eta^2\,(1 + t^2))\,\frac{V}{c}\cos\alpha\,(1 + \eta^2)\right\}$$

Wenn man dieses ordnet, so findet man:

$$\frac{d^3\varphi}{ds^3} = -\frac{V^5 \cos\alpha}{c^3}\left\{\sin^2\alpha(1+3t^2+\eta^2-9\eta^2t^2)+\cos^2\alpha(3\eta^2-3\eta^2t^2+3\eta^4-15\eta^4t^2)\right\} \quad (17)$$

In gleicher Weise werden auch die anderen Ableitungen behandelt, so dass wir bis zur dritten Ordnung einschliesslich erhalten:

$$\frac{d^2 l}{ds^2} = \frac{2V^2}{c^2\cos\varphi}\sin\alpha\cos\alpha\, t \quad (18)$$

$$\frac{d^3 l}{ds^3} = \frac{2V^3}{c^3\cos\varphi}\left\{\sin\alpha\cos^2\alpha\,(1+3t^2+\eta^2)-\sin^3\alpha\, t^2\right\} \quad (19)$$

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{V^2}{c^2}\sin\alpha\cos\alpha\,(1+2t^2+\eta^2) \quad (20)$$

$$\frac{d^3\alpha}{ds^3} = \frac{V^3}{c^3}\left\{\sin\alpha\cos^2\alpha\, t\,(5+6t^2+\eta^2-4\eta^4)-\sin^3\alpha\, t\,(1+2t^2+\eta^2)\right\} \quad (21)$$

Ehe wir weiter entwickeln, wollen wir abkürzende Bezeichnungen einführen, wobei wir uns zu merken haben, dass $\frac{c}{V} = N$ der Quer-Krümmungs-Halbmesser für die Breite φ ist. Wir setzen dann:

$$\frac{\varrho}{N}\, s\sin\alpha = \frac{\varrho}{c}\, V s\sin\alpha = v \quad (22)$$

$$\frac{\varrho}{N}\, s\cos\alpha = \frac{\varrho}{c}\, V s\cos\alpha = u \quad (23)$$

Dabei ist s die geodätische Linie linear (in Metern) gemessen und nach S. 193:

$$\log\frac{\varrho}{c} = 8.508\,3274{\cdot}897 \quad , \quad \log\frac{c}{\varrho} = 1.491\,6725{\cdot}103 \quad (24)$$

Weitere Entwicklungen bis zur fünften Ordnung.

Ohne die Einzelheiten der Differentiierungen anzugeben, stellen wir im folgenden die weiteren Differential-Quotienten zusammen und zwar bis zur 4ten Ordnung mit allen Gliedern die überhaupt auftreten, bei der 5ten Ordnung nur noch mit den Gliedern ohne η^2, d. h. mit den sphärischen Gliedern. Um die Abkürzungen v und u nach (22) und (23) anwenden zu können, setzen wir links immer s, s^2, s^3 u. s. w. als Faktor zu, und nehmen auch den konstanten Faktor V^2 bei φ, und $\cos\varphi$ bei l auf die linke Seite herüber.

$$\frac{d\varphi}{ds}\frac{s}{V^2} = +u$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}\frac{s^2}{V^2} = -v^2 t - u^2(3\eta^2 t)$$

$$\frac{d^3\varphi}{ds^3}\frac{s^3}{V^2} = -v^2 u\,(1+3t^2+\eta^2-9\eta^2t^2) - 3u^3\eta^2(1-t^2+\eta^2-5\eta^2t^2)$$

$$\frac{d^4\varphi}{ds^4}\frac{s^4}{V^2} = +v^4 t\,(1+3t^2+\eta^2-9\eta^2t^2) - 2v^2u^2 t\,(4+6t^2-13\eta^2-9\eta^2t^2-17\eta^4 + 45\eta^4t^4) + u^4 t\,\eta^2(12+69\eta^2-45\eta^2t^2+57\eta^4-105\eta^4t^2)$$

$$\frac{d^5\varphi}{ds^5}\frac{s^5}{V^2} = +v^4 u\,(1+30t^2+45t^4) + 2v^2u^3(4+40t^2+30t^4)$$

$$\frac{d\,l}{d\,s}\,s\,\cos\varphi = +\,v$$

$$\frac{d^2\,l}{d\,s^2}\,s^2\cos\varphi = +\,2\,v\,u\,t$$

$$\frac{d^3\,l}{d\,s^3}\,s^3\cos\varphi = +\,2\,v\,u^2\,(1+3\,t^2+\eta^2) - 2\,v^3\,t^2$$

$$\frac{d^4\,l}{d\,s^4}\,s^4\cos\varphi = 8\,v\,u^3\,t\,(2+3\,t^2+\eta^2-\eta^4) - 8\,v^3\,u\,(1+3\,t^2+\eta^2)$$

$$\frac{d^5\,l}{d\,s^5}\,s^5\cos\varphi = 8\,v\,u^4\,(2+15\,t^2+15\,t^4) - 8\,v^3\,u^2\,(1+20\,t^2+30\,t^4) + 8\,v^5\,t^2\,(1+3\,t^2)$$

$$\frac{d\,\alpha}{d\,s}\,s = v\,t$$

$$\frac{d^2\,\alpha}{d\,s^2}\,s^2 = v\,u\,(1+2\,t^2+\eta^2)$$

$$\frac{d^3\,\alpha}{d\,s^3}\,s^3 = v\,u^2\,t\,(5+6\,t^2+\eta^2-4\,\eta^4) - v^3\,t\,(1+2\,t^2+\eta^2)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^4\,\alpha}{d\,s^4}\,s^4 = {} & v\,u^3\,(5+28\,t^2+24\,t^4+6\,\eta^2+8\,\eta^2\,t^2-3\,\eta^4+4\,\eta^4\,t^2-4\,\eta^6+24\,\eta^6\,t^2)\\ & - v^3\,u\,(1+20\,t^2+24\,t^4+2\,\eta^2+8\,\eta^2\,t^2+\eta^4+12\,\eta^4\,t^2)\end{aligned}$$

$$\frac{d^5\,\alpha}{d\,s^5}\,s^5 = v\,u^4\,t\,(61+180\,t^2+120\,t^4) - v^3\,u^2\,t\,(58+280\,t^2+240\,t^4) + v^5\,t\,(1+20\,t^2+24\,t^4)$$

Mehr als diese Glieder wird man fast nie brauchen. Übrigens haben wir in der vorigen 3. Auflage 1890 S. 392 die Glieder bis zur 5ten Ordnung mit allen Zusätzen η^2 u. s. w. und dann noch 6te Ordnung wenigstens sphärisch, d. h. ohne η^2 gegeben.

Zur Abkürzung kann man etwa bis zur 4ten Ordnung sphärisch gehen, und dann auch schon in dritter Ordnung nur noch η^2 mitnehmen und alle η^4 weglassen.

Damit bekommen wir folgende zur praktischen Anwendung zugerichtete Formeln, in welchen u und v die Bedeutungen von (22) und (23) haben:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varphi'-\varphi}{V^2} = u & - \frac{1}{2\varrho}\,v^2\,t - \frac{3}{2\varrho}\,u^2\,\eta^2\,t\\ & - \frac{v^2\,u}{6\varrho^2}(1+3\,t^2+\eta^2-9\,\eta^2\,t^2) + \frac{u^3}{2\varrho^2}\eta^2\,(t^2-1-\eta^2+5\,\eta^2\,t^2)\\ & + \frac{v^4}{24\,\varrho^3}\,t\,(1+3\,t^2) - \frac{v^2\,u^2}{6\,\varrho^3}\,t\,(2+3\,t^2)\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

$$\left.\begin{aligned}l\cos\varphi = v & + \frac{1}{\varrho}\,v\,u\,t\\ & - \frac{v^3}{3\,\varrho^2}\,t^2 + \frac{v\,u^2}{3\,\varrho^2}\,(1+3\,t^2+\eta^2)\\ & - \frac{v^3\,u}{3\,\varrho^3}\,t\,(1+3\,t^2) + \frac{v\,u^3}{3\,\varrho^3}\,t\,(2+3\,t^2)\end{aligned}\right\}\quad(26)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha' - \alpha = v\,t + \frac{v\,u}{2\,\varrho}(1 + 2\,t^2 + \eta^2) \\ - \frac{v^3}{6\,\varrho^2}\,t\,(1 + 2\,t^2 + \eta^2) + \frac{v\,u^2}{6\,\varrho^2}\,t\,(5 + 6\,t^2 + \eta^2) \\ - \frac{v^3\,u}{24\,\varrho^3}(1 + 20\,t^2 + 24\,t^4) + \frac{v\,u^3}{24\,\varrho^3}(5 + 28\,t^2 + 24\,t^4)\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Die hiebei nötigen konstanten Logarithmen sind:

$$\left.\begin{aligned}&\log\frac{1}{\varrho} = 4.685\,5750 \;, && \log\frac{1}{2\,\varrho} = 4.384\,5449 \;, && \log\frac{3}{2\,\varrho} = 4.861\,6661 \\ &\log\frac{1}{2\,\varrho^2} = 9.070\,120 \;, && \log\frac{1}{3\,\varrho^2} = 8.894\,028 \;, && \log\frac{1}{6\,\varrho^2} = 8.592\,998 \\ &\log\frac{1}{3\,\varrho^3} = 3.57960 \;, && \log\frac{1}{6\,\varrho^3} = 3.27857 \;, && \log\frac{1}{24\,\varrho^3} = 2.67651\end{aligned}\right\} (28)$$

Wenn man in (25), (26), (27) alle η^2 weglässt, so bekommt man wieder die sphärischen Formeln (27)—(29) § 64. S. 359, wie es sein muss.

Mit diesen konstanten Coëfficienten kann man auch unsere Hilfstafeln Seite [47]—[51] des Anhangs benützen.

Wir wollen unser kleines sphäroidisches Normal-Beispiel (1) § 73. S. 391 in dieser Weise berechnen:

Gegeben $\varphi = 49°\,30'\,0''$ $\alpha = 32°\,25'\,21{,}5909''$ $\log s = 5{,}121\,6103.1$

hiezu von Seite [21] des Anhangs $\log\,[2] = 8.508\,9420 \cdot 3$ und $\log V^2 = 0.0012290 \cdot 7$

Im übrigen giebt die Ausrechnung nach dem angegebenen Verfahren, in ähnlicher Weise wie bei dem sphärischen Beispiel § 64. S. 360:

log [2]	8.508 9420·3	*log* [2]	8.508 9420·3
„ *s*	5.121 6103·1	„ *s*	5.121 6103·1
„ *sin α*	9.729 2947·4	„ *cos α*	9.926 4021·9
log v	3.359 8470·8	*log u*	3.556 9545·3

Die weitere Ausrechnung hat folgendes gegeben:

Breite.		*Länge.*		*Azimut.*	
$+ V^2 u =$	+ 3615,6269″	$v =$	+ 3526,1653″	$v\,t =$	+ 2681,3172″
$- v^2 \ldots$	— 14,9269	$+ v\,u \ldots$	+ 72,1660	$+ v\,u \ldots$	+ 74,9467
$- u^2 \eta^2 \ldots$	— 0,3146	$- v^3 \ldots$	— 0,1986	$- v^3 \ldots$	— 0,2063
$- u^2 v \ldots$	— 0,3774	$+ v\,u^2 \ldots$	+ 1,8371	$+ v\,u^2 \ldots$	+ 1,8061
$+ u^3 \eta^2 \ldots$	+ 0,0006	$- v^3 u \ldots$	— 0,0152	$- v^3 u \ldots$	— 0,0152
$+ v^4 \ldots$	+ 0,0008	$+ v\,u^3 \ldots$	+ 0,0452	$+ v\,u^3 \ldots$	+ 0,0455
$- v^2 u^2 \ldots$	— 0,0093				
$\varphi' - \varphi =$	3600,0001″	$\lambda = +$	3599,9998″	$\alpha' - \alpha =$	2757,8940″
$= 1°\,0'$	0,0001	$= 0°\,59'$	59,9998	$= 45'$	57,8940
soll	0,0000	soll	60,0000	soll	57,8942

Meridianbogenlänge.

Unsere Formeln enthalten auch den besonderen Fall der Meridianbogen-Rektifizierung, wenn das Azimut $\alpha =$ Null wird. Setzen wir dann auch den zugehörigen Wert $s = m$, so werden wir aus (25) folgendes erhalten bis zur dritten Ordnung:

$$\frac{\varphi' - \varphi}{V^2} = \frac{m}{N} - \frac{3}{2}\eta^2 t \frac{m^2}{N^2} + \frac{m^3}{N^3}\frac{\eta^2}{2}(t^2 - 1 - \eta^2 + 5\eta^2 t^2) \qquad (29)$$

Dieses ist die Umkehrung der früheren Formel (37) in § 35. S. 218, wie sich deutlicher zeigt, wenn man jene Formel so schreibt:

$$\frac{m}{N} = \frac{\varphi' - \varphi}{V^2} + \left(\frac{\varphi' - \varphi}{V^2}\right)^2 \frac{3}{2}\eta^2 t - \left(\frac{\varphi' - \varphi}{V^2}\right)^3 \frac{\eta^2}{2}(t^2 - 1 - \eta^2 - 4\eta^2 t^2) \qquad (30)$$

Dass diese beiden Formeln (29) und (30) unter sich übereinstimmen, kann man leicht durch genäherte Auflösung nachweisen.

Die erste Entwicklung nach Potenzen der geodätischen Linie (bis s^3 einschliesslich) zur Übertragung von Breiten, Längen und Azimuten, ist gegeben von Legendre in den Memoiren der Pariser Akademie von 1806. Diese Legendreschen Formeln sind bei der badischen Landesvermessung benützt worden. Helmert, höhere Geodäsie I. 1880, S. 296—300 giebt die Entwicklungen bis zur dritten Ordnung mit e^2 und dann noch 4.—5. Ordnung sphärisch, mit Litteraturangaben S. 300. Um die in vorstehendem § 74. behandelten Reihenentwicklungen praktisch im Grossen anzuwenden, müsste man bequeme und genaue Coëfficienten-Tabellen herstellen, wobei in den Reihen (25)—(27) die Coëfficienten mit *allen* Gliedern η^2 einzuführen wären.

Von der Vermessung des Staates New-York und von der Küsten- und Landesvermessung der Vereinigten Staaten wird ein solches Verfahren angegeben in einem Berichte in der „Zeitschr. f. Verm." 1890, S. 177—179.

Bei der preussischen Landesaufnahme sind Formeln von ähnlichem Charakter im Gebrauche, die wir schon in § 39. S. 228 und § 59. S. 331 erwähnt haben, Schreiber, „Rechnungsvorschriften" u. s. w.: Die zugehörigen Entwicklungen sind amtlich nicht veröffentlicht, aber in Jordan-Steppes, „Deutsches Vermessungswesen I", 1881, S. 113—121. Man kann diese Schreibersche Theorie kurz bezeichnen als eine sphäroidische Weiterführung der Gaussschen sphärischen Behandlung des Polardreiecks nach Fig. 3. § 60. S. 343. Die praktische Anwendung der Schreiberschen Rechenvorschriften verlang die Ausrechnung von 19 Gliedern ähnlicher Art wie die 19 Glieder der Formeln (25)—(27).

§ 75. Näherungs-Formeln bis s^3.

Wie die Ausrechnungen am Schlusse des vorigen § 74. S. 396 zeigen, kann man mit den Potenzreihen bis zur 4ten Ordnung bei Entfernungen bis zu rund 100km oder Breiten- und Längen-Differenzen bis zu 1° eine Genauigkeit bis zu etwa 0,0001″ erreichen.

Die Rechnung ist aber etwas umständlich, und würde nur etwa durch Beigabe ausführlicher Coëfficienten-Tabellen die nötige Geschmeidigkeit erlangen, man hat in der Breite 7 Glieder und in Länge und Azimut je 6 Glieder.

Anders steht die Sache, wenn man nur Näherungswerte auf etwa 0,1″ genau berechnen will, welche nach dem später zu beschreibenden Verfahren von § 77. noch verbessert werden sollen. In diesem Falle rechnet man nur die Hauptglieder mit dem Coëfficienten [2] streng, nebst V^2 bei der Breite, im übrigen nimmt man nur noch die sphärischen Glieder (setzt also $\eta^2 = 0$) und kann dann die Coëfficienten-Tabelle unseres Anhangs Seite [47]—[51] benützen.

In diesem Sinne haben wir die Ausrechnung auf S. 398 gemacht, in den Hauptgliedern nur 6stellig, dann 5- und 4stellig. Die Genauigkeit geht auf 0,01″ und 0,03″ in Breite und Länge, und auf 0,10″ im Azimut, was alles als erste Näherung für späteren Gebrauch in § 77. vollauf genügend ist.



Geographische Coordinaten.

Näherungs-Berechnung bis zur dritten Ordnung.

Gegeben $\varphi = 49°\,30'\,0{,}0''$ $\alpha = 32°\,25'\,21{,}5''$ $\log s = 5.121\,610$

Hilfstafel S. [21] giebt für φ:

$\log V^2 = 0.001\,229$

$\log tang\,\varphi = \log t = 0.068\,501$

$\log t^2 = 0.137\,002$

$\log \cos\varphi = 9.812\,544$

$\log [2]$	8.508 942	$\log [2]$	8.508 942
$\log \sin\alpha$	9.729 295	$\log \cos\alpha$	9.926 402
$\log s$	5.121 610	$\log s$	5.121 610
$\log v$	3.359 847	$\log u$	3.556 954
$\log v^2$	6.719 694	$\log u^2$	7.113 908
$\log v^3$	0.079 541		

$$\varphi' - \varphi = V^2 u - \frac{V^2}{2\varrho} v^2 t - \frac{V^2}{6\varrho^2} v^2 u (1 + 3t^2) - \frac{3}{2}\frac{V^2}{\varrho} u^2 e'^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

$\log V^2$	0.001 229	$-V^2$	0.00123_n	$-V^2$	0.0012_n	$-V^2$	0.0012_n
$\log u$	3.556 954	v^2	6.71969	v^2	6.7197	u^2	7.1139
$V^2 u$	3.558 183	t	0.06850	u	3.5570	$3e'^2 : 2\varrho$	2.6861
$+3615{,}63''$		$1 : 2\varrho$	4.38454	$1 + 3t^2$	0.7088	$\sin\varphi$	9.8810
$= +1°\,0'\,15{,}63''$				$1 : 6\varrho^2$	8.5930	$\cos\varphi$	9.8125
			1.17396_n		9.5797_n		9.4947_n
			$-14{,}93''$		$-0{,}38''$		$-0{,}31''$

$$l = \frac{v}{\cos\varphi} + \frac{v\,u\,t}{\varrho\cos\varphi} - \frac{v^3 t^2}{3\varrho^2\cos\varphi} + \frac{v\,u^2(1 + 3t^2)}{3\varrho^2\cos\varphi}$$

$\log v$	3.359 847	$v \sec\varphi$	3.54730	$-v\sec\varphi$	3.5473_n	$v\sec\varphi$	3.5473
$\log \sec\varphi$	0.187 456	u	3.55695	v^2	6.7197	u^2	7.1139
$v\sec\varphi$	3.547 303	t	0.06850	t^2	0.1370	$1 + 3t^2$	0.7088
$+3526{,}17''$		$1 : \varrho$	4.68557	$1 : 3\varrho^2$	8.8940	$1 : 3\varrho^2$	8.8940
$= +0°\,58'\,46{,}17''$			1.85832_n		9.2980_n		0.2640
			$+72{,}16''$		$-0{,}20''$		$+1{,}84''$

$$\alpha' - \alpha = v\,t + \frac{v\,u}{2\varrho}(1 + 2t^2) - \frac{v^3 t}{6\varrho^2}(1 + 2t^2) + \frac{v\,u^2 t}{6\varrho^2}(5 + 6t^2)$$

$\log v$	3.359 847	v	3.35985	$-v\,t$	3.4283_n	$v\,t$	3.4283
$\log t$	0.068 501	u	3.55695	v^2	6.7197	u^2	7.1139
$v\,t$	3.428 348	$1 + 2t^2$	0.57306	$1 + 2t^2$	0.5731	$5 + 6t^2$	1.1214
$+2681{,}32$		$1 : 2\varrho$	4.38454	$1 : 6\varrho^2$	8.5930	$1 : 6\varrho^2$	8.5930
$= +44'\,41{,}32''$			1.87440		9.3141_n		0.2566
			$+74{,}89''$		$-0{,}21''$		$+1{,}81''$

Zusammenfassung:

$\varphi = 49°\,30'\;\;0{,}00'' - 14{,}93''$	$+0°\,58'\,46{,}17'' - 0{,}20''$	$\alpha = 32°\,25'\,21{,}50'' - 0{,}21''$
$+\;\;1\;\;\;0\;\;15{,}63\; - \;\;0{,}38$	$+\;\;1\;\;12{,}16$	$+\;\;0\;\;44\;\;41{,}32$
$-\;\;0{,}31$	$+\;\;\;\;1{,}84$	$+\;\;\;\;1\;\;14{,}89$
		$+\;\;\;\;\;\;1{,}81$
$+50°\,30'\,15{,}63'' - 15{,}62''$	$+1°\;\;0'\;\;0{,}17'' - 0{,}20''$	$+33°\,11'\,19{,}52'' - 0{,}21''$
$\varphi' = 50°\,30'\;\;0{,}01''$	$l = +0°\,59'\,59{,}97''$	$\alpha' = 33°\,11'\,19{,}31''$
soll $0{,}00''$	soll $60{,}00''$	soll $19{,}41''$

§ 76. Sphärische Mittelbreiten-Formeln.

Obgleich die sphärischen Mittelbreiten-Formeln nach Gauss schon in unserem früheren § 62. entwickelt sind, wollen wir doch, ehe auf die sphäroidischen Formeln dieser Art übergegangen wird, nochmals die Sache sphärisch betrachten.

Wenn wir also hier noch eine zweite Herleitung der sphärischen Mittelbreiten-Formeln vornehmen, so geschieht es nicht bloss in dem Sinne einer Versicherung der ersten Herleitung, sondern vielmehr zum Zweck der Vorbereitung entsprechender sphäroidischer Formeln, mit welchen wir uns im folgenden § 77. beschäftigen werden.

In Fig. 1. betrachten wir 3 Punkte mit den Breiten φ_1, φ, φ_2, wobei φ der Mittelwert ist, d. h.:

$$\varphi_2 - \varphi = \varphi - \varphi_1 \quad , \quad \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi \qquad (1)$$

Fig. 1.

Da die Breiten-Unterschiede $\varphi - \varphi_1$ und $\varphi_2 - \varphi$ hiernach gleich sein sollen, so werden für einen Bogen, welcher die drei Parallelen zu den Breiten φ_1, φ, φ_2 schneidet, die Abstände σ_1 und σ_2, deren Summe $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$ sei, nicht gleich, aber auch nicht sehr ungleich werden, und ähnlich verhält es sich mit den zugehörigen Längen-Unterschieden λ_1 und λ_2, deren Summe $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$ sei.

Die Azimute, welche der Bogen in den Breiten φ_1, φ und φ_2 hat, seien bezw. α_1, α_0 und α_2, und es werden dabei ähnliche Verhältnisse stattfinden, wie bei den Längen-Unterschieden, d. h. es werden $\alpha_0 - \alpha_1$ und $\alpha_2 - \alpha_0$ nicht sehr verschieden sein; das Mittel aus α_1 und α_2 sei mit α bezeichnet, d. h.:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \alpha \qquad (2)$$

Dieses Mittel wird nicht gleich α_0, aber auch nicht sehr viel von α_0 verschieden sein.

Eine frühere Abkürzung sei hier wieder benützt, nämlich:

$$tang\, \varphi = t \qquad (3)$$

und nun wenden wir die Potenzreihe für den Breiten-Unterschied (27) § 64. S. 359 auf unsern Fall zweifach an, und erhalten:

$$\varphi_2 - \varphi = \sigma_2 \cos \alpha_0 - \frac{\sigma_2^2}{2} \sin^2 \alpha_0\, t - \frac{\sigma_2^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3\, t^2) \qquad (4)$$

$$\varphi_1 - \varphi = - \sigma_1 \cos \alpha_0 - \frac{\sigma_1^2}{2} \sin^2 \alpha_0\, t + \frac{\sigma_1^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3\, t^2) \qquad (5)$$

Diese zwei Gleichungen geben subtrahiert:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (\sigma_2 + \sigma_1) \cos \alpha_0 - \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{2} \sin^2 \alpha_0\, t - \frac{\sigma_2^3 + \sigma_1^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3\, t^2) \quad (6)$$

Ferner giebt wegen der Gleichheit der Breiten-Unterschiede nach (1) die Addition von (4) und (5):

$$0 = (\sigma_2 - \sigma_1)\cos\alpha_0 - \frac{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}{2}\sin^2\alpha_0\, t - \frac{\sigma_2^3 - \sigma_1^3}{6}\sin^2\alpha_0\cos\alpha_0\,(1 + 3\,t^2) \tag{7}$$

Dieses ist eine Gleichung zur Bestimmung der Differenz $\sigma_2 - \sigma_1$, und da man sofort sieht, dass diese Differenz von der Ordnung σ^2 ist, kann man in (7) das letzte Glied weglassen, und im zweiten Gliede $\sigma_2^2 = \sigma_1^2 \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2$ setzen, so dass man damit aus (7) erhält:

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{\sigma^2}{4}\,\frac{\sin^2\alpha_0}{\cos\alpha_0}\,t \tag{8}$$

Wenn man diese Gleichung mit $\sigma_2 + \sigma_1 = \sigma$ multipliziert, so erhält man auch die Quadrat-Differenz:

$$\sigma_2^2 - \sigma_1^2 = \frac{\sigma^3}{4}\,\frac{\sin^2\alpha_0}{\cos\alpha_0}\,t \tag{9}$$

Dieses (9) setzt man in (6), zugleich darf man dort im letzten Gliede $\sigma_2^3 = \sigma_1^3 = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^3$ setzen, und dadurch erhält man:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sigma\cos\alpha_0 - \frac{\sigma^3}{8}\,\frac{\sin^4\alpha_0}{\cos\alpha_0}\,t^2 - \frac{\sigma^3}{24}\sin^2\alpha_0\cos\alpha\,(1 + 3\,t^2) \tag{10}$$

Diese Gleichung müssen wir zunächst so stehen lassen und nun mit den Azimuten beginnen. Hiezu haben wir in (29) § 64. S. 359 die nötige Gleichung, welche auf unseren Fall zweifach angewendet giebt:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_0 = \sigma_2\sin\alpha_0\,t + \frac{\sigma_2^2}{2}\sin\alpha_0\cos\alpha_0\,(1 + 2\,t^2) - \frac{\sigma_2^3}{6}\sin^3\alpha_0\,t\,(1 + 2\,t^2) \\ + \frac{\sigma_2^3}{6}\sin\alpha_0\cos^2\alpha_0\,t\,(5 + 6\,t^2) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_0 = -\sigma_1\sin\alpha_0\,t + \frac{\sigma_1^2}{2}\sin\alpha_0\cos\alpha_0\,(1 + 2\,t^2) + \frac{\sigma_1^3}{6}\sin^3\alpha_0\,t\,(1 + 2\,t^2) \\ - \frac{\sigma_1^3}{6}\sin\alpha_0\cos^2\alpha_0\,t\,(5+6t^2) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Auch diese Gleichungen (11) und (12) werden subtrahiert und addiert; zuerst giebt die Subtraktion:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 = (\sigma_2 + \sigma_1)\sin\alpha_0\,t + \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{2}\sin\alpha_0\cos\alpha_0\,(1 + 2\,t^2) \\ - \frac{\sigma_2^3 + \sigma_1^3}{6}\sin^3\alpha_0\,t\,(1 + 2\,t^2) + \frac{\sigma_2^3 + \sigma_1^3}{6}\sin\alpha_0\cos^2\alpha_0\,t\,(5 + 6\,t^2) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Bei der Addition von (11) und (12) lassen wir die Differenzen dritter Ordnung $\sigma_2^3 - \sigma_1^3$ ganz fort, da dieselben auf Glieder von der Ordnung σ^4 führen würden; indem wir dann auch das Mittel-Azimut $= \alpha$ setzen, wie in (2) angenommen wurde, erhalten wir aus (11) und (12) durch Addition:

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} - \alpha_0 = \alpha - \alpha_0 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\sin\alpha_0\,t + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}{4}\sin\alpha_0\cos\alpha_0\,(1 + 2\,t^2)$$

und setzt man hier noch die Differenz $\sigma_2 - \sigma_1$ nach (8) ein, so erhält man:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{\sigma^2}{8}\,\frac{\sin^3\alpha_0}{\cos\alpha_0}\,t^2 + \frac{\sigma^2}{8}\sin\alpha_0\cos\alpha_0\,(1 + 2\,t^2) \tag{14}$$

Hieraus bilden wir zu verschiedenem Gebrauche:

$$\sin \alpha_0 = \sin \alpha - \frac{\sigma^2}{8} \sin^3 \alpha \, t^2 - \frac{\sigma^2}{8} \sin \alpha \cos^2 \alpha \, (1 + 2 t^2) \tag{15}$$

$$\cos \alpha_0 = \cos \alpha + \frac{\sigma^2}{8} \frac{\sin^4 \alpha}{\cos \alpha} t^2 + \frac{\sigma^2}{8} \sin^2 \alpha \cos \alpha \, (1 + 2 t^2) \tag{16}$$

In diesen (15) und (16) ist in den Gliedern mit σ^2 schlechthin α statt des aus (14) sich ergebenden α_0 geschrieben, weil nach (14) sich α und α_0 selbst nur um Glieder von der Ordnung σ^2 unterscheiden.

Nun kehren wir wieder zu der Gleichung (10) zurück, setzen im ersten Gliede daselbst (16) ein, und erhalten, da die quadratischen Glieder sich heben:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sigma \cos \alpha + \frac{\sigma^3}{24} \sin^2 \alpha \cos \alpha \, (2 + 3 t^2) \tag{17}$$

Auch die Gleichung (13) lässt sich nun weiter führen; wir schreiben diese Gleichung zunächst von neuem mit Zusammenziehung der σ_2 und σ_1:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha_0 \, t + \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \, (1 + 2 t^2)$$
$$- \frac{\sigma^3}{24} \sin^3 \alpha_0 \, t \, (1 + 2 t^2) + \frac{\sigma^3}{24} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \, t \, (5 + 6 t^2)$$

Hier hat man zuerst $\sigma_2^2 - \sigma_1^2$ nach (9) einzusetzen, wodurch man erhält, indem man zugleich in den Gliedern mit σ^3 statt α_0 den Wert α schreibt:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha_0 \, t + \frac{\sigma^3}{8} \sin^3 \alpha \, t \, (1 + 2 t^2)$$
$$- \frac{\sigma^3}{24} \sin^3 \alpha \, t \, (1 + 2 t^2) + \frac{\sigma^3}{24} \sin \alpha \cos^2 \alpha \, t \, (5 + 6 t^2)$$

Auch hat man noch im ersten Gliede $\sin \alpha_0$ durch $\sin \alpha$ zu ersetzen, was durch (15) geschieht; und wenn man zusammenfasst und ordnet, so erhält man:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha \, t + \frac{\sigma^3}{24} \sin \alpha \, t \left(\sin^2 \alpha \, (2 + t^2) + 2 \cos^2 \alpha \right) \tag{18}$$

Nun bleibt als dritte Aufgabe nur noch die Bestimmung des Längen-Unterschiedes λ. Hiezu haben wir nach (28) § 64. S. 359 in zweifacher Anwendung:

$$\lambda_2 \cos \varphi = \sigma_2 \sin \alpha_0 + \sigma_2^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \, t - \frac{\sigma_2^3}{3} \sin^3 \alpha_0 \, t^2 + \frac{\sigma_2^3}{3} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \, (1 + 3 t^2)$$

$$- \lambda_1 \cos \varphi = - \sigma_1 \sin \alpha_0 + \sigma_1^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \, t + \frac{\sigma_1^3}{3} \sin^3 \alpha_0 \, t^2 - \frac{\sigma_1^3}{3} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \, (1 + 3 t^2)$$

Durch Subtraktion bekommt man, sofort die Glieder dritter Ordnung zusammennehmend, und in diesen Gliedern α statt α_0 schreibend:

$$\lambda \cos \varphi = \sigma \sin \alpha_0 + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \sin \alpha \cos \alpha \, t - \frac{\sigma^3}{12} \sin^3 \alpha \, t^2 + \frac{\sigma^3}{12} \sin \alpha \cos^2 \alpha \, (1 + 3 t^2)$$

Wenn man wieder, wie in den beiden vorigen Fällen, $\sigma_2^2 - \sigma_1^2$ nach (9) und $\sin \alpha_0$ nach (15) einsetzt, so erhält man:

$$\lambda \cos \varphi = \sigma \sin \alpha + \frac{\sigma^3}{24} \sin \alpha \, (\sin^2 \alpha \, t^2 - \cos^2 \alpha) \tag{19}$$

Die Differenz $\lambda_2 - \lambda_1$ haben wir hiebei nicht gebraucht; der Gleichförmigkeit wegen wollen wir jedoch diese Differenz auch angeben, nämlich:

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \sin \varphi = \frac{\sigma^2}{4} \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} t + \frac{\sigma^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha \, t \tag{20}$$

Unsere gestellte Aufgabe ist in den Gleichungen (17), (18), (19) gelöst, die wir in etwas anderer Form nun zusammenstellen:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sigma \cos \alpha \left(1 + \frac{1}{24}(2\,\sigma^2 \sin^2 \alpha + 3\,\sigma^2 \sin^2 \alpha \tan^2 \varphi)\right) \tag{21}$$

$$\lambda = \frac{\sigma \sin \alpha}{\cos \varphi} \left(1 + \frac{1}{24}(\sigma^2 \sin^2 \alpha \tan^2 \varphi - \sigma^2 \cos^2 \alpha)\right) \tag{22}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha \tan \varphi \left(1 + \frac{1}{24}(2\,\sigma^2 + \sigma^2 \sin^2 \alpha \tan^2 \varphi)\right) \tag{23}$$

Hier kann man in den Korrektions-Gliedern setzen:

$$\sigma \cos \alpha = \beta \qquad \sigma \sin \alpha = \lambda \cos \varphi \qquad \sigma \sin \alpha \tan \varphi = \gamma \tag{24}$$

wobei β ein Näherungs-Wert für $\varphi_2 - \varphi_1$ und γ ein Näherungs-Wert für $\alpha_2 - \alpha_1$ sein soll. Ausserdem bestehen die Näherungs-Gleichungen

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi \quad , \quad \sigma^2 + \gamma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \tag{25}$$

Wenn man dieses in (21) und (22) berücksichtigt und die Gleichungen umstellt, dann (22) und (23) dividiert, so erhält man:

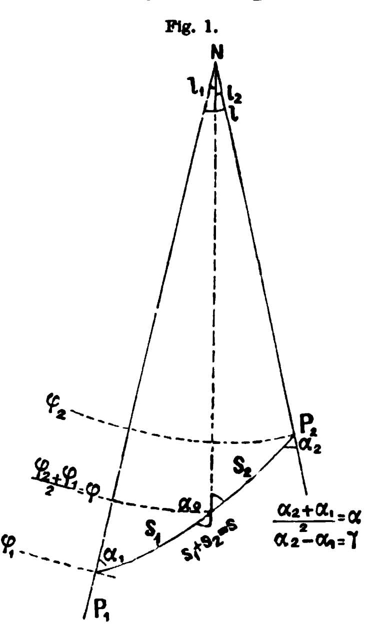
$$\sigma \cos \alpha = (\varphi_2 - \varphi_1)\left(1 - \frac{1}{24}(3\,\lambda^2 - \lambda^2 \cos^2 \varphi)\right) \tag{26}$$

$$\sigma \sin \alpha = \lambda \cos \varphi \left(1 - \frac{1}{24}(\lambda^2 \sin^2 \varphi - \beta^2)\right) \tag{27}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{1}{24}(3\,\beta^2 + 2\,\lambda^2 \cos^2 \varphi)\right) \tag{28}$$

Dieses sind dieselben Gleichungen wie (17), (16), (18) § 62. S. 350; und es sind also jene Gleichungen hiemit zum zweitenmale hergeleitet.

§ 77. Sphäroidische Mittelbreiten-Formeln.



Dasselbe, was wir im vorigen § 76. sphärisch gemacht haben, müssen wir nun auch sphäroidisch mit der geodätischen Linie thun.

Wir werden dabei eine Entwicklung bekommen, welche der sphärischen Entwicklung ganz entsprechend ist, welche sogar alle früheren Glieder von § 76. wieder enthält, aber noch weitere Glieder von der Ordnung η^2 und η^4 hinzubringen wird, und da wir in § 76. eine gute Vorbereitung haben, können wir uns mit der neuen Entwicklung kurz fassen.

Die Bezeichnungen nehmen wir wieder im wesentlichen wie in § 62., indem die nebenstehende Fig. 1. sich von der früheren Fig. 1. S. 349 nur dadurch unterscheidet, dass überall s statt σ, und bei den Längen l statt λ steht.

Unter s verstehen wir eine geodätische Linie, linear gemessen, und unter S die entsprechende Reduktion auf Centriwinkel durch Division mit dem Quer-Krümmungs-Halbmesser N d. h. wir wollen setzen:

$$\frac{s}{N} = S \quad \text{oder} \quad \frac{s}{N}\varrho = S \tag{1}$$

je nachdem in analytischem oder geometrischem Masse gerechnet wird. Wir wollen auch wieder als Abkürzung nehmen:

$$\frac{s \sin \alpha}{N} = S \sin \alpha = v \quad \text{und} \quad \frac{s \cos \alpha}{N} = S \cos \alpha = u \tag{1 a}$$

Damit erhalten wir aus der Breiten-Formel (25) § 74. S. 395 als Anwendung auf den nördlichen Teil unserer Fig. 1. folgendes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi_2 - \varphi}{V^2} = S_2 \cos \alpha_0 - \frac{S_2^2}{2} t (\sin^2 \alpha_0 + 3\eta^2 \cos^2 \alpha_0) \\ \frac{S_2^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3t^2 + \eta^2 - 9\eta^2 t^2) \\ \frac{S_2^3}{6} \cos^3 \alpha_0 (3\eta^2 - 3\eta^2 t^2 + 3\eta^4 - 15\eta^4 t^2) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die entsprechende Formel für $\varphi_1 - \varphi$ hat überall $-S_1$ statt S_2, also:

$$\frac{\varphi_1 - \varphi}{V^2} = -S_1 \cos \alpha_0 - S_1^2 \ldots + \frac{S_1^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos_0 \ldots + \frac{S_1^3}{6} \cos^3 \alpha_0 \ldots \tag{2 a}$$

Diese beiden Gleichungen geben subtrahiert:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = (S_2 + S_1) \cos \alpha_0 - \frac{S_2^2 - S_1^2}{2} t (\sin^2 \alpha_0 + 3\eta^2 \cos^2 \alpha_0) \\ - \frac{S_2^3 + S_1^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3t^2 + \eta^2 - 9\eta^2 t^2) \\ - \frac{S_2^3 + S_1^3}{6} \cos^3 \alpha_0 (3\eta^2 - 3\eta^2 t^2 + 3\eta^4 - 15\eta^4 t^2) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ferner giebt die Addition von (3) und (3 a):

$$0 = (S_2 - S_1) \cos \alpha_0 - \frac{S_2^2 + S_1^2}{2} t (\sin^2 \alpha_0 + 3\eta^2 \cos^2 \alpha_0)$$

also:

$$S_2 - S_1 = \frac{S^2}{4} t \left(\frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0} + 3\eta^2 \cos \alpha_0 \right) \tag{4}$$

Dieses (4) in (3) eingesetzt giebt nach Ordnung der Glieder:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = S \cos \alpha_0 - \frac{S^3}{24} \Big(3 \frac{\sin^4 \alpha_0}{\cos \alpha_0} t^2 + \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3t^2 + \eta^2 + 9\eta^2 t^2) \\ + \cos^3 \alpha_0 (3\eta^2 - 3\eta^2 t^2 + 3\eta^4 + 12\eta^4 t^4) \Big) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ehe wir dieses weiter verfolgen, machen wir dieselbe Behandlung auch mit den Azimuten, d. h. nach (27) § 74. S. 396:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_0 = S_2 \sin \alpha_0 t + \frac{S_2^2}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2t^2 + \eta^2 \\ - \frac{S_2^3}{6} \sin^3 \alpha_0 t (1 + 2t^2 + \eta^2) + \frac{S_2^3}{6} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 t (5 + 6t^2 + \eta^2 - 4\eta^4) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\alpha_1 - \alpha_0 = -S_1 \sin \alpha_0 t + \frac{S_1^2}{2} \ldots \quad + \frac{S_1^3}{6} \sin^3 \alpha_0 \ldots \quad - \frac{S_1^3}{6} \sin \alpha_0 \ldots \tag{7}$$

Hievon brauchen wir zunächst nur die Addition, d. h.:

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} - \alpha_0 \quad \text{oder} \quad \alpha - \alpha_0 = \frac{S_2 - S_1}{2} \sin \alpha_0 t + \frac{S_2^2 + S_1^2}{4} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2t^2 + \eta^2) \tag{8}$$

Die Differenz $S_2 - S_1$ von (4) hier in (8) eingesetzt giebt:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{S^2}{8}\left(\frac{\sin^3 \alpha_0}{\cos \alpha_0} t^2 + \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2 + \eta^2 + 3 \eta^2 t^2)\right) \tag{9}$$

Damit werden die mehrfach gebrauchten $S \sin \alpha_0$ und $S \cos \alpha_0$:

$$S \sin \alpha_0 = S \sin \alpha - \frac{S^3}{8}\left(\sin^3 \alpha\, t^2 + \sin \alpha \cos^2 \alpha (1 + 2 t^2 + \eta^2 + 3 \eta^2 t^2)\right) \tag{10}$$

$$S \cos \alpha_0 = S \cos \alpha + \frac{S^3}{8}\left(\frac{\sin^4 \alpha}{\cos \alpha} t^2 + \sin^2 \alpha \cos \alpha (1 + 2 t^2 + \eta^2 + 3 \eta^2 t^2)\right) \tag{11}$$

Wenn man dieses (11) in (5) einsetzt, wobei man in den Gliedern mit S^3 schlechthin α statt α_0 schreiben darf, so erhält man:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = S \cos \alpha \left\{1 + \frac{S^2}{24} \sin^2 \alpha (2 + 3 t^2 + 2 \eta^2) - \frac{S^2}{8} \cos^2 \alpha\, \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 + 4 \eta^2 t^2)\right\} \tag{12}$$

Wir bilden nun auch die Subtraktion von (6) und (7):

$$\alpha_2 - \alpha_1 = (S_2 + S_1) \sin \alpha_0\, t + \frac{S_2^2 - S_1^2}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2 + \eta^2)$$

$$- \frac{S_2^3 + S_1^3}{6}\left(\sin^3 \alpha_0\, t (1 + 2 t^2 + \eta^2) - \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0\, t (5 + 6 t^2 + \eta^2 - 4 \eta^4)\right)$$

Hier ist wieder $S_2 - S_1$ nach (4) zu berücksichtigen; dieses giebt:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = S \sin \alpha_0\, t + \frac{S^3}{24} t \left(\sin^3 \alpha_0 (2 + 4 t^2 + 2 \eta^2)\right.$$

$$\left. + \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (5 + 6 t^2 + 10 \eta^2 + 18 \eta^2 t^2 + 5 \eta^4)\right)$$

und wenn man endlich noch $S \sin \alpha_0$ nach (10) einsetzt, wobei in den höheren Gliedern α_0 mit α schlechthin verwechselt werden darf, so erhält man:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = S \sin \alpha\, t \left\{1 + \frac{S^2}{24} \sin^2 \alpha (2 + t^2 + 2 \eta^2) + \frac{S^2}{24} \cos^2 \alpha (2 + 7 \eta^2 + 9 \eta^2 t^2 + 5 \eta^4)\right\} \tag{13}$$

Es bleibt nun noch die Formel für l zu entwickeln, wozu wir in zweifacher Anwendung von (26) § 74. S. 395 haben:

$$+ l_2 \cos \varphi = S_2 \sin \alpha_0 + S_2^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0\, t - \frac{S_2^3}{3}\left(\sin^3 \alpha_0\, t^2 - \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (1 + 3 t^2 + \eta^2)\right) \tag{14}$$

$$- l_1 \cos \varphi = - S_1 \sin \alpha_0 + S_1^2 \ldots \quad + \frac{S_1^3}{3}\left(\ldots \right) \tag{15}$$

Die Differenz hievon giebt (da $l_2 + l_1 = l$, und $S_2 + S_1 = S$ ist):

$$l \cos \varphi = S \sin \alpha_0 + (S_2^2 - S_1^2) \sin \alpha_0 \cos \alpha_0\, t - \frac{S_2^3 + S_1^3}{3}\left(\sin^3 \alpha_0\, t^2 - \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (1 + 3 t^2 + \eta^2)\right)$$

Hier ist wieder $S_2 - S_1$ nach (4) und $S \sin \alpha_0$ nach (10) zu berücksichtigen, wodurch man erhalten wird:

$$l \cos \varphi = S \sin \alpha + \frac{S^3}{24} \sin \alpha \left\{\sin^2 \alpha\, t^2 - \cos^2 \alpha (1 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2)\right\} \tag{16}$$

Wenn man von (14) und (15) auch die Summe bildet, so bekommt man eine Gleichung, welche jetzt nicht nötig ist, aber später noch nützlich sein wird, nämlich:

$$(l_2 - l_1) \cos \varphi = \frac{S^2}{4} \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} t + \frac{S^2}{4} \sin \alpha \cos \alpha\, t (2 + 3 \eta^2) \tag{17}$$

Die Gleichungen (12), (13) und (16) enthalten die Lösung der gestellten Aufgabe; man kann jedoch durch Division von (13) und (16) auch noch eine vierte Gleichung bilden:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = l \sin \varphi \left\{1 + \frac{S^2}{24}\left(\sin^2 \alpha\,(2 + 2\,\eta^2) + \cos^2 \alpha\,(3 + 8\,\eta^2 + 5\,\eta^4)\right)\right\} \quad (18)$$

Dabei kann man auch in dem Gliede mit $\sin^2 \alpha$ schreiben:

$$2 + 2\,\eta^2 = 2\,(1 + \eta^2) = 2\,V^2 \quad (18\,a)$$

Die ersten Näherungen von (12) und (16) sind:

$$\frac{s}{N} \cos \alpha = S \cos \alpha = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = \frac{b}{V^2} \quad (19)$$

$$\frac{s}{N} \sin \alpha = S \sin \alpha = l \cos \varphi \quad (20)$$

Dabei soll b nur als Abkürzung für $\varphi_2 - \varphi_1$ dienen.

Damit lassen sich die Formeln (12), (16) und (18) so schreiben:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = \frac{s \cos \alpha}{N}\left(1 + \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{24}(2 + 3\,t^2 + 2\,\eta^2) + \frac{b^2}{8\,V^4}\eta^2\,(t^2 - 1 - \eta^2 - 4\,\eta^2 t^2)\right) \quad (21)$$

$$l \cos \varphi = \frac{s \sin \alpha}{N}\left(1 + \frac{l^2 \sin^2 \varphi}{24} - \frac{b^2}{24\,V^4}(1 + \eta^2) - 9\,\eta^2\,t^2)\right) \quad (22)$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = l \sin \varphi \left(1 + \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{12}\,V^2 + \frac{b^2}{24\,V^4}(3 + 8\,\eta^2 + 5\,\eta^4)\right) \quad (23)$$

Nun wollen wir die Coëfficienten der gefundenen Formeln besonders bezeichnen und herausheben, und dabei auch die nötigen ϱ zusetzen. Zuerst nehmen wir für die Glieder erster Ordnung die schon zu anderen Zwecken mehrfach eingeführten Haupt-Coëfficienten:

$$\frac{\varrho}{N} = [2] \quad , \quad \frac{\varrho}{M} \quad \text{oder} \quad \frac{\varrho}{N}\,V^2 = [1] \quad (24)$$

Es ist also wegen der Bedeutung von S wie bei (22)—(24) § 74. S. 394:

$$v = S \sin \alpha = [2]\,s \sin \alpha \quad , \quad u = S \cos \alpha = [1]\,s \cos \alpha \quad (25)$$

Zugleich wollen wir noch folgende weitere Coëfficienten festsetzen:

$$\left.\begin{array}{ll} [3] = \dfrac{\mu}{24\,\varrho^2} & [4] = \dfrac{\mu}{24\,\varrho^2}\,\dfrac{1 + \eta^2 - 9\,\eta^2\,t^2}{V^4} \\ [5] = \dfrac{\mu}{24\,\varrho^2}\,(2 + 3\,t^2 + 2\,\eta^2) & [6] = \dfrac{\mu}{8\,\varrho^2}\,\eta^2\,\dfrac{t^2 - 1 - \eta^2 - 4\,\eta^2\,t^2}{V^4} \\ [7] = \dfrac{\mu}{12\,\varrho^2}\,V^2 & [8] = \dfrac{\mu}{24\,\varrho^2}\,\dfrac{3 + 8\,\eta^2 + 5\,\eta^4}{V^4} \end{array}\right\} \quad (26)$$

Dabei bedeutet μ den logarithmischen Modulus für Einheiten der 7ten Stelle $\log \mu = 6.637\,7843$, und wir können dazu auch gleich ausrechnen:

$$\log \frac{\mu}{8\,\varrho^2} = 5{\cdot}105\,8441 \quad , \quad \log \frac{\mu}{12\,\varrho^2} = 4{\cdot}929\,7528 \quad , \quad \log \frac{\mu}{24\,\varrho^2} = 4{\cdot}628\,7228 \quad (27)$$

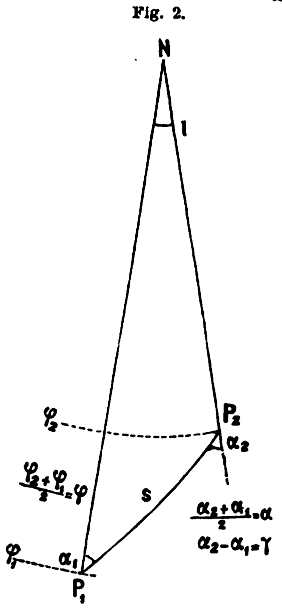
Mit diesen Abkürzungen werden die Formeln (21)—(25) so dargestellt:

$$l = [2]\,\frac{s \sin \alpha}{\cos \varphi}\left(1 + \frac{[3]}{\mu}\,l^2 \sin^2 \alpha - \frac{[4]}{\mu}\,b^2\right) \quad (28)$$

Fortsetzung s. S. 408.

Sphäroidische Mittelbreiten-Formeln.

Fig. 2.



Gegeben $\varphi_1 = 49^\circ 30'$ $\quad \varphi_2 = 50^\circ 30'$ $\quad l = 1^\circ 0'$

$\varphi = 50^\circ 0' 0''$ $\quad b = 1^\circ = 3600''$ $\quad l = 1^\circ = 3600''$.

Gesucht sind s, α_1 und α_2.

Die Hilfstafeln des Anhangs geben mit $\varphi = 50^\circ 0'$:

Seite [32]: $\log [1] = 8.510\,1335{\cdot}3$ $\quad \log [2] = 8.508\,9295{\cdot}0$

Seite [54] giebt mit $\varphi = 50^\circ 0'$:

$\log [3] = 4.6287$ $\quad \log [4] = 4.6119$ | $\log [5] = 5.4257$ $\quad \log [6] = 2.151$ | $\log [7] = 4.9310$ $\quad \log [8] = 5.1066$

Gebrauchsformeln.

$$\log s \sin \alpha = \log \frac{l \cos \varphi}{[2]} - [3]\, l^2 \sin^2 \varphi + [4]\, b^2$$

$$\log s \cos \alpha = \log \frac{\Delta \varphi}{[1]} - [5]\, l^2 \cos^2 \varphi - [6]\, b^2$$

$$\log \Delta \alpha = \log l \sin \varphi + [7]\, l^2 \cos^2 \varphi + [8]\, b^2$$

Länge

$\log l$	3.556 3025·0
$\log \cos \varphi$	9.808 0675·0
$\log l \cos \varphi$	3.364 3700·0
$\log [2]$	8.508 9295·0
$\log \frac{l \cos \varphi}{[2]}$	4.855 4405·0
$\log l^2 \cos^2 \varphi$	6.7287

$l^2 \sin^2 \varphi$	6.8811	b^2	7.1126
$-[3]$	4.6287_n	$+[4]$	4.6119
	1.5098_n		1.7245

$-32{\cdot}35 \quad +53{\cdot}02$ ⏟ $+20{\cdot}67$

	4.855 4405·0
$s \sin \alpha$	4.855 4425·7
$s \cos \alpha$	5.046 1546·8
$\operatorname{tang} \alpha$	9.809 2878·9

$\alpha = 32^\circ 48' 20{,}458''$

$\frac{\Delta \alpha}{2} = 0^\circ 22' 58{,}947''$

$\alpha_2 = 33^\circ 11' 19{,}405''$

$\alpha_1 = 32^\circ 25' 21{,}511''$

Breite

$\log b$	3.556 3025·0
$\log [1]$	8 510 1335·3
$\log \frac{b}{[1]}$	5.046 1689·7

$\log b^2$ | 7.1126

$l^2 \cos^2 \varphi$	6.7287	b^2	7.1126
$-[5]$	5.4257_n	$-[6]$	2.151_n
	2.1544_n		9.2636_n

$-142{\cdot}72 \quad -0{\cdot}18$ ⏟ $-142{\cdot}90$

	5.046 1689·7
$s \cos \alpha$	5.046 1546·8

$s \sin \alpha$	4.855 4425·7	$s \cos \alpha$	5.046 1546·8
$\sin \alpha$	9.733 8322·5	$\cos \alpha$	9.924 5443·7
$\log s$	5.121 6103·2	$\log s$	5.121 6103·1

$s = 132\,315{,}38^m$

Azimut

$\log l$	3.556 3025·0
$\log \sin \varphi$	9.884 2539·7
$\log l \sin \varphi$	3.440 5564·7

$\log l^2 \sin^2 \varphi$ | 6.8811

$l^2 \cos^2 \varphi$	6.7287	b^2	7.1126
$+[7]$	4.9310	$+[8]$	5.1066
	1.6597		2.2192

$+45{\cdot}68 \quad +165{\cdot}67$ ⏟ $+211{\cdot}35$

3.440 5564·7

3.440 5776·0

$\Delta \alpha = 2757{,}8942''$

$\Delta \alpha = 0^\circ 45' 57{,}8942''$

$\frac{\Delta \alpha}{2} = 0^\circ 22' 58{,}9471''$

Sphäroidische Mittelbreiten-Formeln

mit indirekter Auflösung.

Gegeben $log\, s = 5{,}121\ 6103{\cdot}1$ $\quad \varphi_1 = 49° \ 30' \ 0{,}0000''$ $\quad \alpha_1 = 32° \ 25' \ 21{,}511''$

Genähert $l = 1° \ 0' \ 0{,}1''$ $\quad \varphi_2 = 50° \ 30' \ 0{,}1''$ $\quad \alpha_2 = 33° \ 11' \ 19{,}5''$

$= 3600{,}1''$ $\quad \varphi \ = 50° \ 0' \ 0{,}05''$ $\quad \alpha \ = 32° \ 48' \ 20{,}5055''$

Mit $\varphi = 50° \ 0' \ 0{,}0''$ geben die Hilfstafeln des Anhangs

Seite [32]: $log\,[1] = 8.510\ 1335{\cdot}3$ $\quad log\,[2] = 8.508\ 9295{\cdot}0$

und die Hilfstafel Seite [54] giebt:

$log[3] = 4.6287$ $\quad log[4] = 4.6119$ | $log[5] = 5.4257$ $\quad log\,[6] = 2.151$ | $log\,[7] = 4.9310$ $\quad log[8] = 5{,}1066$

Gebrauchsformeln.

$$log\, l = log\left(\frac{[2]\, s \sin \alpha}{\cos \varphi}\right) + [3]\, l^2 \sin^2 \varphi - [4]\, b^2$$

$$log\, \varDelta\varphi = log\Big([1]\, s \cos \alpha\Big) + [5]\, l^2 \cos^2 \varphi + [6]\, b^2$$

$$log\, \varDelta\alpha = log\Big([2]\, s \sin \alpha \tan \varphi\Big) + [7]\, l^2 \cos^2 \varphi + [8]\, b^2 + [3]\, l^2 \sin^2 \varphi - [4]\, b^2$$

Länge

$log\, s$	5.121 6103·1
$log\,[2]$	8.508 9295·0
$log \sin \alpha$	9.733 8324·0
$[2]\, s \sin \alpha$	3.364 3722·1
$log \cos \varphi$	9.808 0673·7
$log\,(l)$	3·556 3048·4

$log\,([2]\, s \sin \alpha)^2 = log\, l^2 \cos^2 \varphi = 6.7287$

$l^2 \sin^2 \varphi$	6.8811	b^2	7.1126
$+[3]$	4.6287	$-[4]$	4.6119_n
	1.5088		1.7245_n

$+32{\cdot}35 \quad -53{\cdot}02$

$-20{\cdot}67$

$log\,(l)$	3.556 3048·4
	− 20.7
$log\, l$	3.556 3027·7

$l = 3600{,}0022''$
soll 0,0000

Breite

$log\, s$	5.121 6103·1
$log\,[1]$	8.510 1335·3
$log \cos \alpha$	9.924 5443·0
$[1]\, s \cos \alpha$ $= log\, b$	3.556 2881·4

$log\, b^2 = 7.1126$

$l^2 \cos^2 \varphi$	6.7287	b^2	7.1126
$+[5]$	5.4257	$+[6]$	2.151
	2.1544		9.264

$+142{\cdot}72 \quad +0{\cdot}18$

$+142{\cdot}90$

$log\,(b)$	3.556 2881·4
	+ 142·9
$log\, \varDelta\varphi$	3.556 3024·3

$\varDelta\varphi = 3599{,}9994''$
soll 0,0000

Azimut

$log\, s$	5.121 6103·1
$log\,[2]$	8.508 9295·0
$log \sin \alpha$	9.733 8324·0
$log \tan \varphi$	0.076 1866·8
$log\,(\varDelta\alpha)$	3.440 5588·9

$= log\, l \sin \varphi$

$log\, l^2 \sin^2 \varphi = 6.8811$

$l^2 \cos^2 \varphi$	6.7287	b^2	7.1126
$+[7]$	4.9310	$+[8]$	5.1066
	1.6597		2.2192

$+45{\cdot}68 \quad +165{\cdot}67$

$\left.\begin{matrix} +211{\cdot}35 \\ -\ 20{\cdot}67 \end{matrix}\right\} +190{\cdot}68$

$log\,(\varDelta\alpha)$	3.440 5588·9
	+ 190·7
$log\, \varDelta\alpha$	3.440 5779·6

$\varDelta\alpha = 2757{,}896$
soll ,894

Fortsetzung von S. 405.

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\,\varphi = [1]\, s \cos \alpha \left(1 + \frac{[5]}{\mu} l^2 \cos^2 \alpha + \frac{[6]}{\mu} b^2\right) \tag{29}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 - \Delta\,\alpha = l \sin \varphi \left(1 + \frac{[7]}{\mu} l^2 \cos^2 \alpha + \frac{[8]}{\mu} b^2\right) \tag{30}$$

und $$\Delta\,\alpha = [2]\, s \sin \alpha \operatorname{tang} \varphi \left(1 + \frac{[7]}{\mu} l^2 \cos^2 \alpha + \frac{[8]}{\mu} b^2 + \frac{[3]}{\mu} l^2 \sin^2 \alpha - \frac{[4]}{\mu} b^2\right) \tag{31}$$

Dazu auch die Umkehrungen:

$$s \sin \alpha = \frac{l \cos \varphi}{[2]} \left(1 - \frac{[3]}{\mu} l^2 \sin^2 \alpha + \frac{[4]}{\mu} b^2\right) \tag{32}$$

$$s \cos \alpha = \frac{\Delta\,\varphi}{[1]} \left(1 - \frac{[5]}{\mu} l^2 \cos^2 \alpha - \frac{[6]}{\mu} b^2\right) \tag{33}$$

$$\Delta\,\alpha = l \sin \varphi \left(1 + \frac{[7]}{\mu} l^2 \cos^2 \varphi + \frac{[8]}{\mu} b^2\right) \tag{34}$$

Daraus folgen die logarithmischen Gebrauchsformeln, wie sie in dem Zahlenbeispiel auf S. 406 und 407 obenan gestellt sind.

Umkehrung der Mittelbreiten-Formeln.

Wenn φ_1, α_1 und s gegeben und φ_2, α_2 und l gesucht sind, so kann man die Mittelbreiten-Formeln nicht unmittelbar anwenden, wohl aber mittelbar durch Einführung von Näherungs-Werten, wie schon am Schlusse von § 62. S. 353 bei den sphärischen Mittelbreiten-Formeln mit Gauss' eigenen Worten angegeben ist. Was die nötigen Näherungswerte betrifft, so kann man die Längen und Breiten schon aus dem Netzbilde der Triangulierung entnehmen und damit auch die Meridian-Konvergenzen $= \lambda \sin \varphi$ ebenso genau; wir wollen aber annehmen, man habe das ganze Netz vorläufig nach den Formeln dritter Ordnung von § 75. S. 398 durchgerechnet, was ungefähr von ähnlicher Bedeutung ist wie das vorläufige Durchrechnen einer Triangulierung für die Zwecke von Centrierungen, sphärischen Excessen u. dergl. Kurz, wir wollen annehmen, man habe Breiten, Längen und Azimute auf etwa 0,1″ genau und dann genügt eine oder höchstens zwei Durchrechnungen nach S. 407, um alles bis auf 0,0001″ zum Stimmen zu bringen.

Jedenfalls kann man alle Coëfficenten-Logarithmen *log* [1], *log* [2] u. s. w. sofort mit der vorläufigen Mittelbreite φ hinreichend endgiltig genau aus den Hilfstafeln von S. [30]—[35] und S. [52]—[54] entnehmen und damit die Rechnung von S. 407 durchführen.

Die Schlusswerte kommen auf S. 407 noch mit Fehlern innerhalb 0,001″ in Breite und Azimut heraus, welche durch eine abermalige Durchrechnung vollends getilgt werden müssen.

Es könnte hiernach scheinen, dass das Verfahren umständlich und mühsam sei, das ist aber nicht der Fall, denn die Wiederholung erstreckt sich nur auf die drei Logarithmen $\log \sin \alpha$, $\log \cos \alpha$, $\log \operatorname{tang} \varphi$; alles andere, namentlich die Korrektionen zweiter Ordnung bleiben stehen. Erst wenn Breite und Azimut stimmen, wird auch die Länge nachgeholt.

Das Beispiel S. 407 zeigt, dass man mit jeder Durchrechnung um etwa zwei Stellen weiter kommt, und dazu ist das Beispiel ein sehr grosses, mit $\Delta\varphi$ und $l = 1°$ und $s = 132^{km}$; in der Praxis sind die Seiten viel kürzer und dann geht die Näherungs-Konvergenz auch noch viel rascher.



Die Entwicklung sphäroidischer Mittelbreiten-Formeln und ihrer Umkehrung bildet den Inhalt der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“ von Gauss, zweite Abhandlung, Göttingen 1846. Gauss hat hier den ungemein nützlichen Grundsatz des Mittel-Arguments bei Reihen-Entwicklungen auf Geodäsie mit schönstem Erfolge angewendet, und eine zweifach unabhängige Begründung gegeben, erstens durch die konforme Flächen-Abbildung und zweitens durch unmittelbare Reihen-Entwicklung nach Potenzen der geodätischen Linie.

Die von Gauss beigegebene Coëfficienten-Tabelle erstreckt sich aber nur von 51°—54° Breite. Eine Ausdehnung dieser Tabelle auf 45°—55° gaben wir in den früheren Auflagen dieses Buches, und eine Tafel der Gaussschen Coëfficienten-Logarithmen *log* (1), *log* (2) ... *log* (6) in der ganzen Ausdehnung von $\varphi = 34°$ bis $\varphi = 70°$ wurde berechnet von *Biek*, und veröffentlicht in der russischen Übersetzung von Jordan, „Handbuch der Vermessungskunde“ S. 652—665 (vgl. das genauere Citat S. 229).

Was im vorstehenden § 77. gegeben ist, beruht auf dem Gaussschen Gedanken, ist aber nach Entwicklung und Coëfficienten-Darstellung in andere Form gebracht, weil es uns schien, dass die Gausssche Form der Korrektions-Glieder mit *drei* Elementen s, β und τ (τ = Meridian-Konvergenz) ohne λ, in mancher Beziehung nicht günstig ist.

§ 78. Weitere Formeln für Soldnersche Coordinaten.

Die Formeln von § 55. zur Berechnung von φ und λ aus Soldnerschen x und y und umgekehrt gehen nur bis zur dritten Ordnung, und sind auch bezüglich der sphäroidischen Zusätze mit η^2 u. s. w. unscharf; man bekommt genauere Formeln einfach dadurch, dass man in den Formeln (25)—(27) § 74. S. 395 das Ausgangs-Azimut $\alpha = 90°$ und die Entfernung $s = y$ setzt, also

$$v = \frac{s \sin \alpha}{N} = \frac{y}{N} \quad \text{und} \quad u = \frac{s \cos \alpha}{N} = 0 \tag{1}$$

Die in § 74. mit φ bezeichnete Ausgangs-Breite nimmt dann die Bedeutung der Fusspunktsbreite an und soll daher ebenso wie in § 55. nun mit φ_1 bezeichnet werden und die Breite des Punktes x, y, welche in § 74. mit φ' bezeichnet war, sei nun φ (vgl. Fig. 1. S. 410) und mit alledem geben die Formeln (25)—(27) von § 74 mit Ergänzung bis s^5 nun folgendes (ohne ϱ):

$$\frac{\varphi - \varphi_1}{V^2} = -\frac{y^2 t}{2 N^2} + \frac{y^4 t}{24 N^4}(1 + 3 t^2) \tag{2}$$

$$\lambda \cos \varphi_1 = \frac{y}{N} - \frac{y^3}{3 N^3} t^2 + \frac{y^5 t^2}{15 N^5}(1 + 3 t^2) \tag{3}$$

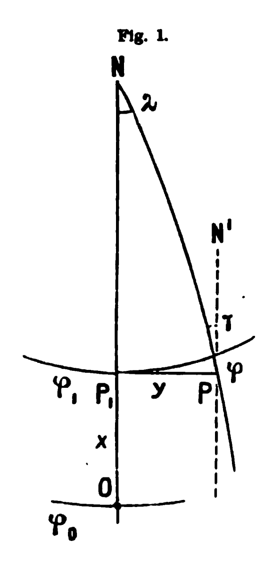
$$\gamma = \frac{y}{N} t - \frac{y^3 t}{6 N^3}(1 + 2 t^2 + \eta^2) + \frac{y^5 t}{120 N^5}(1 + 20 t^2 + 24 t^4) \tag{4}$$

Dabei gehören V^2 und $N = c : V$ und $t = tang\, \varphi_1$ alle zur Fusspunktsbreite φ_1 entsprechend Fig. 1. S. 410. Diese Formeln sind bis y^4 nicht wesentlich anders als die früheren (7), (9), (11) § 55. S. 304. Bei φ ist noch ein Glied mit y^4 hinzugekommen und bei γ noch ein kleiner Zusatz η^2 und dann sind noch die Glieder 5 ter Ordnung bei λ und γ dazu gekommen. Es sind also die früheren Formeln von § 55. mit ihrer elementaren sphäroidischen Herleitung von § 54. innerhalb ihres beabsichtigten Anwendungsbereiches genügend nachgewiesen.

In der „Bayerischen Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, 1873“, S. 542—546 sind solche weitgehende Formeln wegen der grossen Ordinaten in Bayern (vgl. S. 327) angewendet.

Nach diesem wollen wir noch in anderem Sinne eine Weiterentwicklung zu Soldnerschen Coordinaten geben, die wir schon früher in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1894

S. 33—42 und 147—152 behandelt haben, nämlich Aufstellung von Formeln, welche φ, λ und γ lediglich als Funktion der Veränderlichen x und y geben, indem die Ursprungsbreite φ_0 des Systems als Konstante in alle Coëfficienten eingeht. Bei nur einigermassen grossen Abscissen x wird diese Form nicht unmittelbar nützlich sein, aber z. B. bei den kleinen Geltungsbereichen der preussischen 40 Katastersysteme können die neuen Formeln neben andern mit Vorteil gebraucht werden.



Unter Annahme der Bezeichnungen zur nebenstehenden Fig. 1. wollen wir die allgemeinen Formeln (25)—(27) § 74. S. 395 auf den Fall von Fig. 1. zweifach anwenden, nämlich erstens zum Übergang von P_0 auf P_1 mit $\alpha = 0$ und $s = x$ und zweitens zum Übergang von P_1 auf P mit $\alpha = 90°$ und $s = y$.

Der erste Übergang giebt, mit Weglassung der ϱ aus (25), S. 395, indem wir zugleich $\varphi_1 - \varphi_0 = \delta$ setzen:

$$\frac{\delta}{V_0^2} = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{V_0^2} = \frac{x}{N_0} - \frac{3}{2}\frac{x^2}{N_0^2}\eta_0^2 t_0 + \frac{x^3}{2 N_0^3}\eta_0^2 (t_0^2 - 1) \tag{5}$$

dabei sollen V_0, N_0, η_0, t_0 sich sämtlich auf die Nullbreite φ_0 beziehen. Bei x^3 in (5) ist η_0^4 vernachlässigt.

Die beiden anderen Formeln (26) und (27) S. 395 geben mit $\alpha = 0$ nur $\lambda = 0$ und $\alpha' - \alpha = 0$, d. h. nichts neues; dagegen giebt die zweite Anwendung, mit $\alpha = 90°$ und $s = y$, zum Übergang von P_1 auf P aus den drei Grundgleichungen (25)—(27) S. 395 (mit Weglassung der ϱ):

$$\frac{\varphi - \varphi_1}{V_1^2} = -\frac{y^2}{2 N_1^2} t_1 + \frac{y_4}{24 N_1^4} t_1 (1 + 3 t_1^2) \tag{6}$$

$$\lambda \cos \varphi_1 = \frac{y}{N_1} - \frac{y^3}{3 N_1^3} t_1^2 \tag{7}$$

$$\gamma = \frac{y}{N_1} t_1 - \frac{y^3}{6 N_1^3} t_1 (1 + 2 t_1^2 + \eta_1^2) \tag{8}$$

Hier ist überall φ_1 auf φ_0 zu reduzieren, wozu die Beziehung (5) dient, indem damit z. B. $t_1 = \operatorname{tang} \varphi_1$ entwickelt werden muss.

Indem wir dieses thun und $\operatorname{tang} \varphi_0$ kurz mit t_0 bezeichnen, auch $\varphi_1 - \varphi_0 = \delta$ setzen, wie schon bei (5), haben wir goniometrisch nach § 28. S. 167:

$$t_1 = t_0 \left(1 + \frac{\delta}{t_0}(1 + t_0^2) + \delta^2 (1 + t_0^2)\right) \tag{9}$$

dieses genügt, während wir $\cos \varphi_1$ bis zur dritten Ordnung brauchen:

$$\cos \varphi_1 = \cos \varphi_0 \left(1 - \delta t_0 - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{6} t_0\right)$$

und die Umkehrung, wie auch schon auf S. 167 angegeben:

$$\frac{1}{\cos \varphi_1} = \frac{1}{\cos \varphi_0}\left(1 + \delta t_0 + \frac{\delta^2}{2}(1 + 2 t_0^2) + \frac{\delta^3}{6} t_0 (5 + 6 t_0^2)\right) \tag{10}$$

Um auch V zu entwickeln, welches als Bestandteil von $N = c : V$ mehrfach vorkommt, brauchen wir die schon in § 34. S. 208 unten bei (i) gemachte Vorbereitung, wieder mit $\varphi_1 - \varphi_0 = \delta$:

$$\frac{V_1}{V_0} = 1 - \frac{\delta \eta_0^2 t_0}{V_0^2} - \frac{\delta^2}{2}\frac{\eta_0^2}{V_0^4}(1 - t_0^2 + \eta_0^2) \tag{11}$$

Nun sind wir genügend vorbereitet, um die Formel (6) zu behandeln, und wir bemerken zuerst, dass das letzte Glied derselben, weil von 4. Ordnung, schlechthin mit N_0 statt N_1 und t_0 statt t_1 geschrieben werden kann, und der Anfang von (6) gestaltet sich so:

$$\frac{\varphi - \varphi_1}{V_0^2} \frac{V_0^2}{V_1^2} = - \frac{y^2}{2 N_0^2} t_0 \frac{N_0^2}{N_1^2} \frac{t_1}{t_0} + \frac{y^4}{24 N_0^4} t_0 (1 + 3 t_0^2)$$

Da aber $N_0 = c : V_0$ und $N_1 = c : V_1$ ist, hat man, mit Näherung im zweiten Gliede:

$$\frac{\varphi - \varphi_1}{V_0^2} = - \frac{y^2}{2 N_0^2} t_0 \frac{V_1^4}{V_0^4} \frac{t_1}{t_0} + \frac{y^4}{24 N_0^4} t_0 (1 + 3 t_0^2) \tag{12}$$

hier ist nach (11) und (9) hinreichend genau:

$$\frac{V_1^4}{V_0^2} \frac{t_1}{t_0} = \left(1 - 4 \delta \frac{\eta_0^2 t_0}{V_0^2} - \delta^2 \eta_0^2 \ldots\right) \left(1 + \frac{\delta}{t_0} (1 + t_0^2) + \delta^2 (1 + t_0^2)\right)$$

$$= 1 + \frac{\delta}{V_0^2 t_0} \left(1 + t_0^2 + \eta_0^2 - 3 \eta_0^2 t_0^2\right) + \delta^2 (1 + t_0^2)$$

und mit Einsetzung aus (5):

$$\frac{V_1^4}{V_0^4} \frac{t_1}{t_0} = 1 + \frac{x}{N_0 t_0} (1 + t_0^2 + \eta_0^2 - 3 \eta_0^2 t_0^2) + \frac{x^2}{N_0^2} (1 + t_0^2) \tag{13}$$

Dieses (13) in (12) gesetzt giebt:

$$\frac{\varphi - \varphi_1}{V_0^2} = - \frac{y^2}{2 N_0^2} t_0 - \frac{y^2 x}{2 N_0^3} (1 + t_0^2 + \eta_0^2 - 3 \eta_0^2 t_0^2) - \frac{y^2 x^2}{2 N_0^4} t_0 (1 + t_0^2) + \frac{y^4}{24 N_0^4} t_0 (1 + 3 t_0^2) \tag{14}$$

Nun kann man aus (14) und (5) den gesuchten Breitenunterschied zusammensetzen, wobei wir aber zur Abkürzung nur noch N statt N_0, t statt t_0 u. s. w. schreiben wollen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi - \varphi_0}{V^2} = \frac{x}{N} - \frac{y^2}{2 N^2} t - \frac{3}{2} \frac{x^2}{N^2} \eta^2 t - \frac{y^2 x}{2 N^3} (1 + t^2 + \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) \\ + \frac{x^3}{2 N^3} \eta^2 (t^2 - 1) - \frac{y^2 x^2}{2 N^4} t (1 + t^2) + \frac{y^4}{24 N^4} t (1 + 3 t^2) \end{aligned}\right\} \tag{14a}$$

da $V^2 = N : M$ und $M N = r^2$ ist, kann man das auch so schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta\varphi = \varphi - \varphi_0 = \frac{x}{M} - \frac{y^2}{2 r^2} t - \frac{3}{2} \frac{x^2}{r^2} \eta^2 t - \frac{y^2 x}{2 r^2 N} (1 + t^2 + \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) \\ + \frac{x^3}{2 r^2 N} \eta^2 (t^2 - 1) - \frac{y^2 x^2}{2 N^2 r^2} t (1 + t^2) + \frac{y^4}{24 N^2 r^2} t (1 + 3 t^2) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Dieses ist die Schlussformel für $\varphi - \varphi_0$, für welche wir insofern eine Probe haben, als mit $y = 0$ die frühere Formel (29) von § 74. S. 397 wieder erscheinen muss. Dieses ist hinreichend der Fall, wie man am besten in (14a) sieht, indem nur das Glied mit $x^3 \eta^2 (t^2 - 1)$ von dem Gliede mit $m^3 \eta^2$ in (29) § 74. S. 397 in höheren Gliedern mit η^2 in der Klammer abweicht, was schon bei (5) S. 410 bemerkt wurde.

Auf ähnlichem Wege wie (15) erhalten wurde, haben wir nun auch (7) zu behandeln:

$$\lambda = \frac{y}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{y^3}{3 N_1^3} \frac{t_1^2}{\cos \varphi_1}$$

$$\lambda = \frac{y}{N_0 \cos \varphi_0} \frac{V_1}{V_0} \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_1} - \frac{y^3}{3 N_1^3} \frac{t_1^2}{\cos \varphi_1} \tag{16}$$

Hierbei ist nach (10) und (11), indem man beide Reihen zusammen multipliziert, und wie bei (14a) und (15) nur noch t statt t_0 u. s. w. schreibt:

$$\frac{V_1}{V_0}\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi_1} = 1 + \frac{\delta}{V^2}t + \frac{\delta^2}{2\,V^4}(1 + 2\,t^2 + \eta^2 + 3\,\eta^2 t^2) + \frac{\delta^3}{6\,V^6}t\,(5 + 6\,t^2) \tag{17}$$

Das letzte Glied von (16) giebt bei der Reduktion auf φ_0 zwei Glieder, nämlich wegen (9) und (10), mit Weglassung des unteren Zeigers $_0$:

$$\frac{y^3}{3\,N_1^3}\frac{t_1^2}{\cos\varphi_1} = \frac{y^3}{3\,N^3}\frac{t^2}{\cos\varphi}\left(1 + \frac{2\,\delta}{t}(1 + t^2)\right)\left(1 + \delta\,t\right)$$

$$= \frac{y^3}{3\,N^3}\frac{t^2}{\cos\varphi} + \frac{y^3\,t\,\delta}{3\,N^3}(2 + 3\,t^2) \tag{18}$$

Nun muss man (17) und (18) in (16) einsetzen, und zugleich nach (5) berücksichtigen:

$$\frac{\delta}{V^2} = \frac{x}{N} - \frac{3}{2}\frac{x^3}{N^2}\eta^2\,t, \qquad \frac{\delta^2}{V^4} = \frac{x^2}{N^3} - \frac{3\,x^3}{N^3}\eta^2\,t \tag{19}$$

Thut man dieses alles, so wird man aus (16)—(19) erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{y}{N\cos\varphi} + \dfrac{y\,x\,t}{N^2\cos\varphi} + \dfrac{y\,x^2}{2\,N^3\cos\varphi}(1 + 2\,t^2 + \eta^2) \\ \quad - \dfrac{y^3}{3\,N^3}\dfrac{t^2}{\cos\varphi} + \dfrac{y\,x^3\,t}{6\,N^4\cos\varphi}(5 + 6\,t^2) - \dfrac{y^3\,x\,t}{3\,N^4\cos\varphi}(2 + 3\,t^2) \end{array}\right\} \tag{20}$$

Um auch noch die Meridian-Konvergenz nach (8) zu entwickeln, haben wir (6) zunächst mit Absonderung von t_0 und N_0:

$$\gamma = \frac{y}{N_0}t_0\frac{V_1}{V_0}\frac{t_1}{t_0} - \frac{y^3}{6\,N_1^3}t_1(1 + 2\,t_1^2 + \eta_1^2) \tag{21}$$

Hier wollen wir nur bis zur dritten Ordnung gehen, weil die Meridian-Konvergenz nicht so scharf erforderlich ist wie die Breite und Länge; also nach (9) und (11) durch Ausmultiplizieren:

$$\frac{V_1}{V_0}\frac{t_1}{t_0} = 1 + \frac{\delta}{V^2\,t}(1 + t^2 + \eta^2) + \frac{\delta^2}{V^4}(1 + t^2) \tag{22}$$

Hier ist wieder δ nach (19) einzusetzen, wodurch man (21) und (22) bis zur dritten Ordnung genügend erhält (mit Weglassung der Zeiger $_0$):

$$\gamma = \frac{y}{N}t + \frac{y\,x}{N^2}(1 + t^2 + \eta^2) + \frac{y\,x^2}{N^3}(1 + t^2) - \frac{y^3}{6\,N^3}t\,(1 + 2\,t^2) \tag{23}$$

Nun haben wir in (15), (20), (23) die Lösung unserer Aufgabe, nämlich $\varphi - \varphi_0$, λ und γ als konvergierende Reihen nach Potenzen von x und y darzustellen. Es ist nur noch zu bemerken, dass in den Formeln (15), (20), (23) überall der für analytische Entwicklung weggelassene Faktor ϱ zur numerischen Anwendung zugesetzt werden muss, also z. B. in (23) $\gamma = \frac{y}{N}\varrho\,t + \frac{y\,x}{N^2}\varrho\,(1 + t^2 + \eta^2)$ u. s. w.

Wir wollen nun unsere Formeln (15), (20), (23) anwenden auf den Fall des Coordinaten-Systems Celle, für welches wir haben:

$$\varphi_0 = 52^\circ\,37'\,32{,}6709'' \quad , \quad \tan\varphi_0 = t$$

$$\left.\begin{array}{l|l|l} \log \sin \varphi_0 = 9.900\,1963{\cdot}4 & \log \cos \varphi_0 = 9.783\,2021{\cdot}9 & \log t = 0.1169941{\cdot}5 \\ \log V^2 = 0.001\,0739{\cdot}2 & \log \cos^2 \varphi_0 = 9.566\,4043{\cdot}8 & \log t^2 = 0.2339883{\cdot}0 \\ \log M = 6.804\,4867{\cdot}7 & \log N = 6.805\,5606{\cdot}9 & \log r = 6.8050237{\cdot}3 \\ \log \eta^2 = 7.393\,7231{\cdot}6 & \log \eta^2 t^2 = 7.627\,7114{\cdot}6 & \log r^2 = 13.6100474{\cdot}6 \\ \eta^2 = 0{,}002\,4758{\cdot}48 & \eta^2 t^2 = 0{,}004\,243341 & t^2 = 1{,}7139111588 \\ \log \varrho = 5.314\,4251{\cdot}3 & \log \frac{\varrho}{M} = 8.509\,9383{\cdot}6 & \log \frac{\varrho}{N} = 8.5088644{\cdot}5 \\ & = \log [1] & = \log [2] \end{array}\right\} \quad (24)$$

Wenn man damit alle Coëfficienten von [15], [20], [23] ausrechnet, überall das nötige ϱ zusetzt, welches in [1] und [2] enthalten ist, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi - \varphi_0 = [8.509\,9383{\cdot}6]x - [1.520\,3418]\,y^2 - [9.391\,186]\,x^2 \\ - [5.029\,738]\,x\,y^2 + [1.845\,154]\,x^3 - [8.34389]\,x^2 y^2 + [7.61833]\,y^4 \end{array}\right\} \quad (25)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = [8.725\,6622{\cdot}6]\,y + [2.037\,0957]\,y\,x + [5.459\,944]\,y\,x^2 \\ - [4.871\,408]\,y^3 + [8.83204]\,y\,x^3 - [8.80266]\,y^3 x \end{array}\right\} \quad (26)$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma = [8.625\,8586{\cdot}0]\,y + [2.137\,2921]\,y\,x + [5.44\,8333]\,y\,x^2 \\ - [4.882\,776]\,y^3 \end{array}\right\} \quad (27)$$

Die Formeln (15), (20), (23) müssen auch umgekehrt werden, d. h. es muss x, y und γ auch als Funktion von φ und λ dargestellt werden.

Aus (19) § 55. S. 305 haben wir, da $[2] = \varrho : N$ u. s. w. ist:

$$y = \lambda\, N_1 \cos \varphi_1 + \frac{\lambda^3}{3} N_1 \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1 \quad (28)$$

Dieses in (6) eingesetzt liefert:

$$\frac{\varphi - \varphi_1}{V_1^2} = - \frac{\lambda^2}{2} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + \frac{\lambda^4}{24} \sin \varphi_1 \cos^3 \varphi_1 (1 - 5\,t^2) \quad (29)$$

Von (20) und (22) § 55. S. 305 haben wir:

$$y = \lambda\, N \cos \varphi - \frac{\lambda^3}{6} N \sin^2 \varphi \cos \varphi \quad (30)$$

und

$$\gamma = \lambda \sin \varphi + \frac{\lambda^3}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi \quad (31)$$

Um auch (29) auf φ statt φ_1 zu bringen, hat man in erster Näherung:

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{\lambda^2}{2} V^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi$$

und damit weiter aus (29):

$$\frac{\varphi_1 - \varphi}{V^2} = \frac{\lambda^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\lambda^4}{24} \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2) \quad (32)$$

Der Übergang von φ_1 auf φ_0 ist schon früher in (13) § 35. S. 218 gemacht, nämlich:

$$x = M(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{3}{2} \frac{M}{V^2} \eta^2 t (\varphi_1 - \varphi_0)^2 + \frac{M}{2\,V^4} \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 + 4\,\eta^2 t^2)(\varphi_1 - \varphi_0)^3 \quad (33)$$

Dabei ist $\varphi_1 - \varphi_0 = (\varphi - \varphi_0) - (\varphi - \varphi_1)$. Das letzte Glied in (33) enthält auch alle Glieder mit η^2, welche bei der entsprechenden Formel (15) nicht mehr genommen sind.

Nun hat man nur noch φ durch φ_0 zu ersetzen, d. h. indem $\varphi - \varphi_0 = \Delta\varphi$ gesetzt wird, nach S. 166:

$$\sin\varphi = \sin(\varphi_0 + \Delta\varphi) = \sin\varphi_0 + \Delta\varphi\cos\varphi_0 - \frac{\Delta\varphi^2}{2}\sin\varphi_0$$

$$\cos\varphi = \qquad \cos\varphi_0 - \Delta\varphi\sin\varphi_0 - \frac{\Delta\varphi^2}{2}\cos\varphi_0$$

Wenn man dieses in (30)—(32) einsetzt und auch im übrigen den genügend angegebenen Gang einhält, so wird man finden:

$$\left.\begin{aligned} x = M\Delta\varphi &+ \frac{1}{2}N\sin\varphi\cos\varphi\,\lambda^2 + \frac{3}{2}\frac{M\eta^2 t}{V^2}\Delta\varphi^2 \\ &+ \frac{1}{2}M\cos^2\varphi\,(1 - t^2 + \eta^2)\,\lambda^2\Delta\varphi \\ &+ \frac{1}{2}M\frac{\eta^2}{V^4}(1 - t^2 + \eta^2 + 4\,\eta^2 t^2)\,\Delta\varphi^3 - N\sin\varphi\cos\varphi\,\lambda^2\Delta\varphi^2 \\ &+ \frac{1}{24}N\sin\varphi\cos^3\varphi\,(5 - t^2)\,\lambda^4 \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

$$\left.\begin{aligned} y = N\cos\varphi\,\lambda - M\sin\varphi\,\lambda\,\Delta\varphi &- \frac{M\cos\varphi}{2\,V^2}(1 + \eta^2 + 3\,\eta^2 t^2)\,\lambda\,\Delta\varphi^2 \\ &- \frac{1}{6}N\sin^2\varphi\cos\varphi\,\lambda^3 - \frac{1}{6}N\sin\varphi\cos^2\varphi\,(2 - t^2)\,\lambda^3\Delta\varphi \\ &+ \frac{1}{6}M\sin\varphi\,\lambda\,\Delta\varphi^3 \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

$$\gamma = \lambda\sin\varphi + \lambda\frac{\Delta\varphi}{\varrho}\cos\varphi - \frac{\lambda\,\Delta\varphi^2}{2\,\varrho^2}\sin\varphi + \frac{\lambda^3}{3\,\varrho^2}\sin\varphi\cos^2\varphi \quad (36)$$

Auch die Einsetzung der Konstanten von Celle nach (24) lässt sich ausführen und giebt:

$$\left.\begin{aligned} x = [1.4900616{\cdot}4]\,\Delta\varphi &+ [5.5590789]\,\lambda^2 + [3.8613711]\,\Delta\varphi^2 \\ &- [9.978721]\,\Delta\varphi\,\lambda^2 - [7.793405]\,\Delta\varphi^3 \\ &- [5.23126]\,\Delta\varphi^2\lambda^2 + [3.93411]\,\lambda^4 \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

$$\left.\begin{aligned} y = [1.2743377{\cdot}4]\,\lambda &- [6.0758328]\,\Delta\varphi\,\lambda - [0.3488631]\,\Delta\varphi^2\lambda \\ &- [9.667729]\,\lambda^3 \\ &- [3.69281]\,\Delta\varphi\,\lambda^3 + [4.66883]\,\Delta\varphi^3\lambda \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

$$\gamma = [9.9001963{\cdot}4]\,\lambda + [4.468\,777]\,\lambda\,\Delta\varphi - [8.97032]\,\lambda\,\Delta\varphi^2 + [8.36063]\,\lambda^3 \quad (39)$$

Zwei Zahlenbeispiele und noch verschiedene weitere Einzelheiten hiezu sind in der „Zeitschr. f. Verm." 1894, S. 40—41 und S. 150—153 gegeben, wovon hier abgesehen wird.

Über die ganze Anordnung dieser Auflösungsform, welche schon etwa 1820 von Schleiermacher in Hessen angewendet wurde („Zeitschr. f. Verm." 1884, S. 421—434) ist im allgemeinen zu sagen, dass sie im Vergleich mit der Bohnenberger schen Form von § 55. S. 308—309 kaum eine Rechenersparung bringt, und zur allgemeinen Anwendung noch Hilfstafeln für die Hauptglieder erster Ordnung und noch manches andere verlangen würde.

Trotzdem haben wir das Verfahren in unserem System Celle mit Vorliebe angewendet. Wir haben nach den Formeln (25)—(27) und (37)—(39) autographierte Schemata angelegt, in welchen alle konstanten Coëfficienten mit vorgedruckt sind, so dass man nur noch eine Logarithmentafel braucht, um einen Fall auszurechnen; dazu hat man die durchschlagende Probe, dass Hin- und Her-Rechnung stimmen muss. So sind z. B. auch die meisten der in § 58. erwähnten Rechnungen dieser Art gemacht.

Gerade die Unabhängigkeit von allen tabellarischen und litterarischen Hilfsmitteln sichert dem Verfahren Beliebtheit in Fällen, wo man nicht viele Punkte auf *ein*mal, aber immer wieder dann und wann den einen und anderen Fall, vorzunehmen hat.

Es ist auch noch ein Umstand zu erwähnen, betreffend die Nullpunktsbreiten φ_0, welche zur Zeit meist unrunde Zahlen sind, so dass man z. B. in Preussen die Coëfficienten für alle 40 Systeme einzeln ausrechnen müsste, während für runde Zahlen $\varphi_0 = 52^0\,0'$, $\varphi_0 = 52°\,30'$ u. s. w. die Sache besser würde.

Näherungsformeln für Coordinaten-Differenzen.

Wenn man auf beschränktem Gebiete nur zunächst von *einem* Punkte sowohl die rechtwinkligen Coordinaten x, y, als auch die geographischen Coordinaten φ, λ kennt, so kann man für benachbarte Punkte die Differenzen $\varDelta x$, $\varDelta y$ einerseits und $\varDelta\varphi$, $\varDelta\lambda$ andererseits durch Näherungsformeln aus einander ableiten.

Wir nehmen hierzu die Formeln (8^z) und (10^z) § 55. S. 305:

$$\varphi = \varphi_0 + [1]\,x - \frac{([2]\,y)^2}{2\,\varrho}\,V^2\,tang\,\varphi \tag{a}$$

$$\lambda = \frac{[2]\,y}{cos\,\varphi} + \left(\frac{[2]\,y}{cos\,\varphi}\right)^3 \frac{1}{6\,\varrho^2}\,sin^2\,\varphi \tag{b}$$

Diese Formeln hat man zu differentiieren, man erhält also aus (a):

$$\varDelta\,\varphi = [1]\,\varDelta\,x - \frac{[2]^2}{\varrho}\,y\,V^2\,tang\,\varphi\,\varDelta\,y + \ldots \tag{c}$$

In der zweiten Formel (b) können wir in erster Näherung das zweite Glied weglassen, und im ersten Gliede von (*b*) setzen wir

$$\varphi = \varphi_c + [1]\,\varDelta\,x$$

d. h. wir zählen von einer konstanten Breite φ_c, welche einem Zentralpunkte entspricht.

Damit wird $cos\,\varphi = cos\,\varphi_c - [1]\,\varDelta\,x\,sin\,\varphi_c = cos\,\varphi_c\left(1 - [1]\,\frac{\varDelta\,x}{\varrho}\,tang\,\varphi_c\right)$

also

$$\lambda = \frac{[2]\,y}{cos\,\varphi_c}\left(1 + \frac{[1]\,\varDelta\,x}{\varrho}\,tang\,\varphi_c\right)$$

$$\varDelta\,\lambda = \frac{[2]}{cos\,\varphi_c}\,\varDelta\,y - \frac{[2]\,[1]\,y}{\varrho\,cos\,\varphi_c}\,tang\,\varphi_c\,\varDelta\,x + \ldots \tag{d}$$

In (c) und (d) haben wir die gesuchten Beziehungen zwischen $\varDelta\,\varphi$, $\varDelta\,\lambda$ einerseits und $\varDelta\,x$, $\varDelta\,y$ andererseits. Diese Beziehungen sind nur roh genähert, indem schon die Glieder mit $\varDelta\,x^2$ und $\varDelta\,y^2$ weggelassen sind.

Zur praktischen Anwendung wird man die Konstanten [1], [2], y, φ_c (und $\varphi_1 = \varphi_c$) einem Zentralpunkte entsprechend wählen, von welchem aus man nachher die $\varDelta\,\varphi$, $\varDelta\,\lambda$, $\varDelta\,x$, $\varDelta\,y$ zu rechnen beabsichtigt.

Wir haben dieses Verfahren 1891 mehrfach angewendet, als viele Punkte der Stadt Hannover für die Landesaufnahme nach φ und λ zu berechnen waren, d. h. wir haben die Formeln (c) und (d) lediglich zu summarischer Kontrolle neben anderen strengeren Formeln benützt.

I. *Aegidius* als Zentralpunkt hat

$$\lambda = 27°\,24'\,24{,}6290'' \qquad \varphi_c = 52°\,22'\,14{,}961''$$
$$y = -\,23271{,}81^m \qquad x = -\,28308{,}40^m$$

$$\varDelta\,\lambda = [8.723\,156]\,\varDelta\,y - [6.39851]\,\varDelta\,x \quad , \quad \varDelta\,\varphi = [6.1842]\,\varDelta\,y + [8.509\,948]\,\varDelta\,x$$



II. *Hochschule* als Zentralpunkt.

$$\lambda = 27^\circ\, 23'\, 8{,}233'' \qquad \varphi_c = 52^\circ\, 23'\, 1{,}328''$$
$$y = -\,24709\,77^m \qquad x = -\,26868{,}28^m$$
$$\Delta\lambda = [8.723\,277]\,\Delta y - [6.42\,486]\,\Delta x \quad , \quad \Delta\varphi = [6.2105]\,\Delta y + [8.509\,947]\,\Delta x$$

III. *Dreifaltigkeit* als Zentralpunkt.

$$\lambda = 27^\circ\, 25'\, 15{,}744'' \qquad \varphi_c = 52^\circ\, 22'\, 59{,}973''$$
$$y = -\,22298{,}58^m \qquad x = -\,26921{,}72^m$$
$$\Delta\lambda = [8.723\,273]\,\Delta y - [6.38076]\,\Delta x \quad , \quad \Delta\varphi = [6.1659]\,\Delta y + [8.509\,947]\,\Delta x$$

Nehmen wir z. B. Welfenkaserne mit $y = -\,23180{,}99_m$ und $x = -\,26485{,}30_m$ und rechnen nach II und nach III, so finden wir

II von Hochschule aus: $\lambda = 27^\circ\, 24'\, 28{,}971''$ $\varphi = 52^\circ\, 23'\, 13{,}970''$

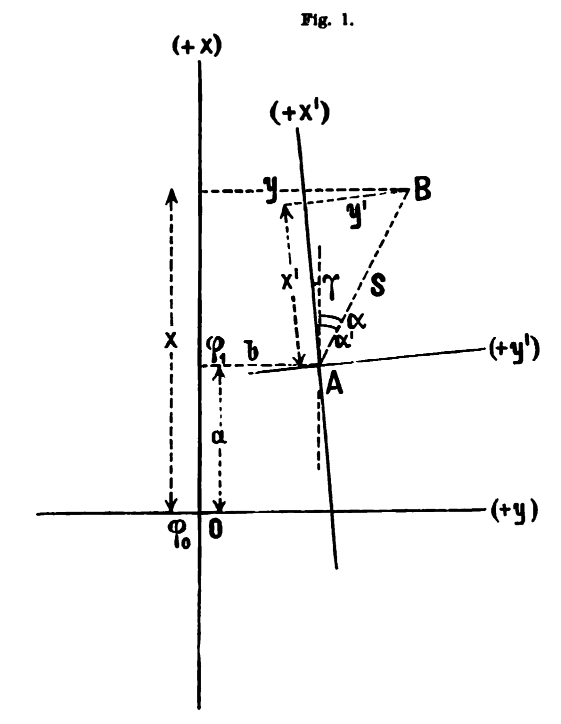
III von Dreifaltigkeit aus: $27^\circ\, 24'\, 28{,}981''$ $52^\circ\, 23'\, 13{,}965''$

Jedenfalls genügt das Verfahren, wenn man rasch einen Punkt von Hannover nur etwa auf 0,1″ für Topographie, Vergleichung mit astronomischer Bestimmung u. s. w. haben will, was manchmal vorkommt.

§ 79. Coordinaten-Umformung.

An den Grenzen zweier Coordinaten-Gebiete wird es oft vorkommen, dass man die Coordinaten des einen Systems in die des anderen Systems umzurechnen wünscht.

Fig. 1.



Ohne irgend welche neue Formeln zu entwickeln, kann man Coordinaten verschiedener rechtwinkliger Systeme auf dem Ellipsoid dadurch in einander umformen, dass man den Umweg über geographische Coordinaten (geographische Breiten und Längen) nimmt.

Es sei z. B. in nebenstehender Fig. 1. der Ursprung O eines rechtwinkligen Systemes mit $+x$ nach Norden, $+y$ nach Osten und ein Punkt A habe in diesem System die Coordinaten a und b. Dieser Punkt A wird zum Ursprunge eines Systemes gemacht, dessen $+x'$-Axe im Meridian von A nach Norden liegt und die Meridian-Konvergenz γ in A gegen den ersten Ursprung O bildet. Irgend ein anderer Punkt B habe im ersten Systeme die Coordinaten x, y und im zweiten Systeme die Coordinaten x' y'.

Denkt man sich das Ganze auf dem Ellipsoid liegend, so kann man bei gegebener Breite φ_0 des Ursprungs O auch die Breiten- und Längenunterschiede der Punkte A und B, und die Meridian-Konvergenzen berechnen, nach den Formeln von § 55. oder § 78.

Wir wollen beispielshalber setzen (Zahlenbeispiel „Zeitschr. f. Verm." 1891, S. 164):

$$\text{Punkt } O, \varphi_0 = 48^0\,0'\,0'' \tag{1}$$
$$\text{„} \quad B, \; y = -100\,000^m, x = -100\,000^m \tag{2}$$
$$\text{„} \quad A, \; b = -200\,000^m, a = -200\,000^m \tag{3}$$

Indem diese Coordinaten alle negativ sind, haben wir A und B beide südwestlich vom Ursprung O zu denken.

Wir rechnen nach der Tafel S. [55]:

	Punkt B	Punkt A
$\varphi = 48° \, 0'$	$B = 5\,317\,885{,}233^m$	$B = 5\,317\,885{,}233^m$
	$x = -100\,000$	$a = -200\,000$
	5 217 885,233	5 117 885,233
durch Interpolation	$\varphi_1 = 47°\,6'\,1{,}6896''$	$\varphi_1 = 46°\,12'\,2.8698''$

Dieses sind die Fusspunktsbreiten, zu welchen aus S. [31], [30] und S. [19] entnommen wird:

$log\,[2] = 8.509\,0025{\cdot}3$	$log\,[2] = 8.509\,0253{\cdot}3$
$log\; V^2 = 0.001\,3501$	$log\; V^2 = 0.001\,3957$

Die weitere Rechnung geht nach § 55. S. 309, was allerdings für die grossen Werte a und $b = 200\,000^m$ kaum ausreicht, doch im wesentlichen noch genügt. Es fand sich

$$\left.\begin{array}{ll|l} \lambda = -\;\;1°\,19'\;\;2{,}378'' & & \lambda_0 = -\;\;2°\,35'\,26{,}337'' \\ \varphi = \;\;\;47°\;\;5'\,34{,}414'' & & \varphi_0 = \;\;\;46°\,10'\,17{,}124'' \\ & & \gamma \;= -\;\;1°\,52'\,10{,}36'' \end{array}\right\} \tag{4}$$

Nun wird A als neuer Coordinaten-Nullpunkt genommen, weshalb die zugehörigen φ und λ im vorstehenden mit φ_0 und λ_0 bezeichnet sind, dieselben geben auch die Differenzen

$$\begin{array}{ll} \lambda - \lambda_0 = +\,1^0\,16'\,23{,}959'' & \varphi - \varphi_0 = +\,0^0\,55'\,17{,}290'' \\ \Delta\lambda \;= +\,4583{,}959'' & \Delta\varphi \;= +\,3317{,}290'' \end{array} \tag{5}$$

Nun kann man umgekehrt aus $\Delta\lambda$ und $\Delta\varphi$ nach (5) die rechtwinkligen Coordinaten von B in Bezug auf A berechnen (nach dem Schema von § 55. S. 309) nämlich:

$$\text{Punkt } B \qquad y' = +\,96659{,}79^m \quad , \quad x' = +\,103\,209{,}21^m \tag{6}$$

Damit ist die erste Berechnungsart erledigt; wir haben keine anderen Formeln und Entwicklungen anzuwenden gehabt, als die zu vielen anderen Zwecken ohnehin nötigen Beziehungen zwischen rechtwinkligen und geographischen Coordinaten.

Indessen gestattet unsere Aufgabe auch noch eine zweite einfachere Behandlung, zu der wir nun übergehen:

Wenn die Coordinatensysteme als eben betrachtet werden, so hat man bekanntlich die Umwandlungsformeln:

$$y' = (y - b)\,cos\,\gamma + (x - a)\,sin\,\gamma \tag{7}$$
$$x' = (x - a)\,cos\,\gamma - (y - b)\,sin\,\gamma \tag{8}$$

und entsprechende Formeln sind nun noch mit Gliedern von der Ordnung $1 : r^2$ zu bilden.

Die Soldner'schen Formeln von § 46. (14)—(16) S. 261 lassen sich in zweifacher Weise auf unseren Fall anwenden, nämlich nach der Fig. 1. S. 416.

System O:

$$y - b = s \sin \alpha - \frac{(x-a)^2 b}{2 r^2} - \frac{(x-a)^2 (y-b)}{6 r^2} \tag{9}$$

$$x - a = s \cos \alpha + \frac{(x-a) y^2}{2 r^2} - \frac{(x-a)(y-b)^2}{6 r^2} \tag{10}$$

Im System A:

$$y' = s \sin \alpha' - \frac{x'^2 y'}{6 r^2} \tag{11}$$

$$x' = s \cos \alpha' + \frac{x' y'^2}{3 r^2} \tag{12}$$

Dabei ist $\alpha' = \alpha + \gamma$, also:

$$\sin \alpha' = \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \tag{13}$$

$$\cos \alpha' = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \tag{14}$$

Damit kann man $\sin \alpha'$ und $\cos \alpha'$ eliminieren, und Verbindungen zwischen (9) und (11) sowie zwischen (10) und (12) herstellen.

$$y' = s \sin \alpha \cos \gamma + s \cos \alpha \sin \gamma - \frac{x'^2 y'}{6 r^2}$$

Dann wegen (8) und (9):

$$y' = \left((y-b) + \frac{(x-a)^2 b}{2 r^2} + \frac{x-a)^2 (y-b)}{6 r^2}\right) \cos \gamma$$

$$+ \left((x-\alpha) - \frac{x-\alpha}{2 r^2} y^2 + \frac{x-a}{6 r^2} (y-b)^2\right) \sin \gamma - \frac{x'^2 y'}{6 r^2}$$

Wenn man dabei bedenkt, dass γ nach (11) oder (12) § 55. S. 304 selbst von der Ordnung $\frac{1}{r}$ ist und dass man daher in den höheren Gliedern $\sin \gamma = 0$ und $\cos \gamma = 1$ setzen darf, so wird man finden:

$$y' = (y-b) \cos \gamma + (x-a) \sin \gamma$$

$$+ \frac{(x-a)^2 b}{2 r^2} + \frac{(x-a)^2 (y-b)}{6 r^2} - \frac{x'^2 y'}{6 r^2}$$

Im letzten Gliede ist es aber genügend, $x' = x - a$ und $y' = y - b$ zu setzen, so dass nur übrig bleibt:

$$y' = (y-b) \cos \gamma + (x-a) \sin \gamma + \frac{(x-a)^2 b}{2 r^2} \tag{15}$$

und auf ganz ähnlichem Wege findet man auch:

$$x' = (x-a) \cos \gamma - (y-b) \sin \gamma + \frac{(x-a) b (b - 2 y)}{2 r^2} \tag{16}$$

Diese Endformeln unterscheiden sich von den im Eingang für ebene Coordinaten angegebenen Formeln (7) und (8) nur durch einfache Zusatzglieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$.

Um diese Formeln (15) und (16) auf das Zahlenbeispiel (1) (2) (3) anzuwenden, muss man zuerst die Meridiankonvergenz γ nach (4) benützen, d. h., wenn die übrige zu (4) gehörige Rechnung nicht gemacht wird, hat man γ für sich nach S. 309 zu bestimmen:

$$\gamma = -1^\circ\, 52'\, 10{,}36'' \tag{17}$$

Weiter hat man aus (2) und (3):

$$y - b = + 100\,000^m \qquad x - a \;= + 100\,000^m$$
$$b = - 200\,000 \qquad b - 2\,y = 0$$

Dazu für rund $\varphi = 47°$ nach Seite [18] $log\,\frac{1}{r^2} = 6.390\,515$.

Damit rechnet man nach den Formeln (15) und (16):

$$y' = + 99946{,}770 - 3262{,}392 - 24{,}576 = + \quad 96659{,}802^m$$
$$x' = + 99946{,}770 + 3262{,}392 - \quad 0{,}000 = + 103\,209{,}162^m$$

Dieses soll mit dem früheren (6) stimmen, was bei y' auf $0{,}01^m$ und bei x' auf $0{,}05^m$ der Fall ist. Diese kleinen Widersprüche mögen wohl darauf beruhen, dass, wie schon bei (4) bemerkt wurde, die a und $b = 200\,000^m$ für unsere Formeln etwas zu gross sind.

Für kleinere Verhältnisse, etwa für die Grenzverwandlungen zwischen den 40 Preussischen Katastersystemen sind die Formeln jedenfalls genügend.

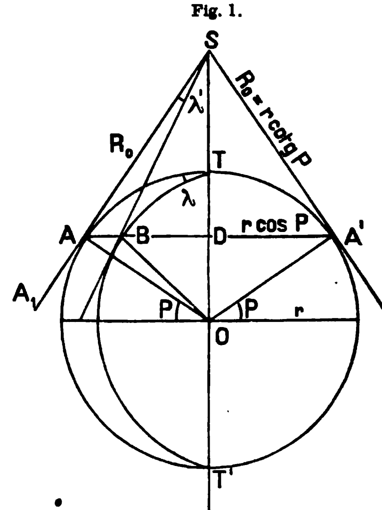
§ 80. Sphärische konforme Kegelprojektion.

Wenn ein Land seine Haupterstreckung von West nach Ost hat, so eignet sich eine Meridian-Axe nicht als Hauptvermessungs-Axe, sondern es ist darnach zu trachten, die Hauptaxe in die West-Ost-Richtung zu bringen.

Eines der Mittel, welche dazu führen, ist die Kegelprojektion, und namentlich die konforme Kegelprojektion, welche in Mecklenburg durch *Paschen* zu diesem Zwecke angewendet worden ist.

Wir werden diese Projektion zuerst sphärisch und dann im nächsten § 81. auch noch sphäroidisch behandeln.

Fig. 1.



In Fig. 1. ist O der Mittelpunkt der als Kugel vom Halbmesser r angenommenen Erde, welche längs eines Parallelkreises AA' durch einen Kegel berührt wird, dessen Spitze S in der verlängerten Erdaxe liegt.

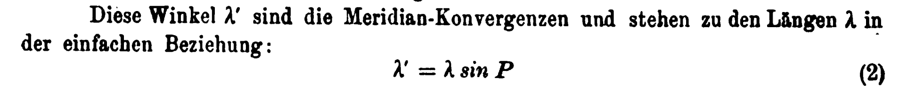
Wenn für den Berührungskreis AA' die Normalbreite $= P$ ist, so sieht man sofort ein, dass die Kegelmantellinie sein wird

$$S\,A = R_0 = r\,cotg\,P \qquad (1)$$

Dieser Kegel ist in Fig. 2. S. 420 abgewickelt dargestellt, so dass $S\,A = R_0$ dieselbe Länge wie $S\,A$ in Fig. 1. ist, und $A''\,A\,B$ als Kreisbogen um den Mittelpunkt S die kongruente Abbildung des Parallelkreisbogens $A\,B\,A'$ von Fig. 1. vorstellt.

Auf dem Kreise $A''\,A\,B$ Fig. 2. werden die Bögen $A\,B$ in natürlichem Masse von Fig. 1. nach Fig. 2 hinübergetragen, so dass auch die Winkel λ' bei S in beiden Figuren dieselben werden.

Diese Winkel λ' sind die Meridian-Konvergenzen und stehen zu den Längen λ in der einfachen Beziehung:



$$\lambda' = \lambda\,sin\,P \qquad (2)$$



Aus (4) und (5) zusammen hat man:

$$\log R - \log R_0 = \sin P \left\{ \log \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{P}{2}\right) - \log \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \right\}$$

oder in Quotientenform:

$$\log \frac{R}{R_0} = \sin P \log \frac{\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{P}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)} \tag{6}$$

Man kann dieses auch noch auf eine andere Form bringen, denn es ist bekanntlich:

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \qquad \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \operatorname{tang}^2 \frac{x}{2}$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

und mit $x = 90^\circ + P$ oder mit $x = 90^\circ + \varphi$ giebt dieses:

$$\operatorname{tang}^2\left(45^\circ + \frac{P}{2}\right) = \frac{1 + \sin P}{1 - \sin P} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang}^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

also wird (6):

$$\log \frac{R}{R_0} = \frac{\sin P}{2} \log \frac{(1 + \sin P)(1 - \sin \varphi)}{(1 - \sin P)(1 + \sin \varphi)} \tag{7}$$

oder wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht:

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{1 + \sin P}{1 - \sin P} \, \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}\right)^{\frac{\sin P}{2}} \tag{8}$$

Nach diesen Formeln (6), (7) oder (8) kann man zu jedem Werte φ das zugehörige R berechnen, nachdem R_0 schon aus (1) erhalten worden ist. Auch das dazu gehörende Vergrösserungsverhältnis m kann aus (3) berechnet werden und damit schiene alles erledigt, aber die Rechnung nach diesen geschlossenen Formeln ist mühsam und ungenau, wenn sie nicht mit 10stelligen Logarithmen geführt wird. Es kommt weniger auf R selbst an, als auf die Differenz $R_0 - R$, und diese werden wir besser erlangen durch eine Reihen-Entwicklung, zu welcher wir nun übergehen.

Nach dem Maclaurinschen Satze wird jedenfalls folgende Form bestehen:

$$R = R_0 + \left.\frac{dR}{d\varphi}\right] \Delta\varphi + \left.\frac{d^2 R}{d\varphi^2}\right] \frac{\Delta\varphi^2}{2} + \left.\frac{d^3 R}{d\varphi^3}\right] \frac{\Delta\varphi^3}{6} + \left.\frac{d^4 R}{d\varphi^4}\right] \frac{\Delta\varphi^4}{24} \tag{9}$$

Wir wollen aber nicht geradezu die Funktion R von (8) differentiieren, sondern das Konstante absondern und deswegen setzen:

$$\frac{R}{R_0} = \frac{F}{F_0} \tag{10}$$

Oder wegen (8) sollen die F und F_0 folgende Bedeutungen haben:

$$F = \left(\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}\right)^{\frac{1}{2} \sin P} \quad \text{und} \quad F_0 = \left(\frac{1 - \sin P}{1 + \sin P}\right)^{\frac{1}{2} \sin P} \tag{11}$$

Nun giebt (10) durch Ableitung:

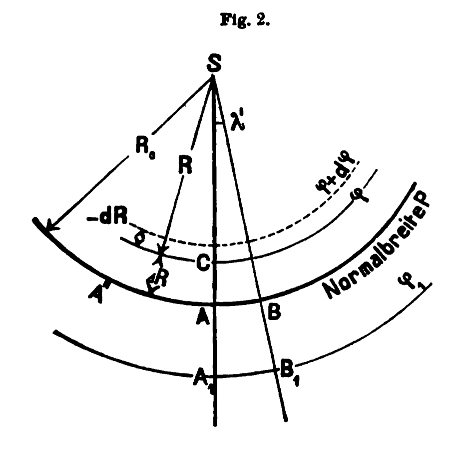
$$\frac{1}{R_0} \frac{dR}{d\varphi} = \frac{1}{F_0} \frac{dF}{d\varphi} \tag{12}$$

und damit kann man die Maclaurinsche Reihe (9) auch so schreiben:

$$\frac{R}{R_0} = 1 + \frac{1}{F_0} \left.\frac{dF}{d\varphi}\right] \Delta\varphi + \frac{1}{F_0} \left.\frac{d^2 F}{d\varphi^2}\right] \frac{\Delta\varphi^2}{2} + \frac{1}{F_0} \left.\frac{d^3 F}{d\varphi^3}\right] \frac{\Delta\varphi^3}{6} + \frac{1}{F_0} \left.\frac{d^4 F}{d\varphi^4}\right] \frac{\Delta\varphi^4}{24} \tag{13}$$

Denn es ist für die Normalbreite P der Parallelkreis-Halbmesser in Fig. 1. $DA = r \cos P$, also $AB = r \cos P \lambda$, folglich $\lambda' = AB : R_0$, was mit $R_0 = r \cotg P$ aus (1) sofort zu der Gleichung (2) führt. Damit können wir alle Meridiane als gerade Radialstrahlen von S aus in Fig. 2. abbilden, aber wir haben erst *einen* Parallelkreis, nämlich denjenigen für die Normalbreite P. Die anderen Parallelkreise sollen auch als Kreise um den Mittelpunkt S dargestellt werden, z. B. soll in Fig. 2. der Kreis vom Halbmesser $SC = R$ der Breite φ entsprechen, und man könnte als einfachstes Gesetz hiefür annehmen, $AC = r(\varphi - P)$ zu machen, so dass auch alle Meridianbögen in Fig. 2 in richtiger Grösse dargestellt würden.

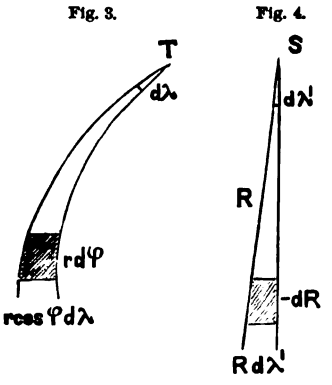
Fig. 2.



Es giebt das in der That eine Kegelprojektion, aber nicht eine konforme, welche ein anderes Gesetz der Meridianbogenabbildung verlangt. Dazu betrachten wir in Fig. 3 und Fig. 4. die Differentialfiguren für ein unendlich kleines geographisches Trapez und dessen Abbildung.

Wenn das Trapez auf der Kugel zwischen den Breiten φ und $\varphi + d\varphi$, sowie zwischen zwei Meridianen mit dem Längenunterschied $d\lambda$ liegt, so hat es den Meridianbogen $r\,d\varphi$ und den Parallelbogen $r \cos \varphi\, d\lambda$; und das Abbild in Fig. 4. hat entsprechend $-dR$ und $R\,d\lambda'$ und zwar $-dR$, weil das Wachsen von R dem Wachsen am φ entgegengesetzt ist.

Fig. 3. Fig. 4.



Nun sollen die beiden unendlich kleinen Trapeze Fig. 3. im Urbild und Fig. 4. im Abbilde einander *ähnlich* sein, also, wenn zugleich das Vergrösserungsverhältnis mit m bezeichnet wird, hat man:

$$m = -\frac{dR}{r\,d\varphi} = \frac{R\,d\lambda'}{r \cos \varphi\, d\lambda}$$

oder weil $\lambda' = \lambda \sin P$ noch (2) ist, giebt dieses:

$$m = -\frac{dR}{r\,d\varphi} = \frac{R \sin P}{r \cos \varphi} \tag{3}$$

$$-\frac{dR}{R} = \sin P \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

Dieses ist die Differentialgleichung für das Gesetz der Änderung von R, deren Integration alsbald giebt:

$$-\log R = \sin P \log tang \left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) + \ldots \tag{4}$$

Um die Integrations-Konstante zu bestimmen, setzen wir fest, dass für die Normalbreite P der Kegelstrahl die Länge $- R_0$ annehmen soll, d. h.

$$-\log R_0 = \sin P \log tang \left(45° + \frac{P}{2}\right) + \ldots \tag{5}$$

Aus (4) und (5) zusammen hat man:

$$\log R - \log R_0 = \sin P \left\{ \log tang\left(45^\circ + \frac{P}{2}\right) - \log tang\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)\right\}$$

oder in Quotientenform:

$$\log \frac{R}{R_0} = \sin P \log \frac{tang\left(45^\circ + \frac{P}{2}\right)}{tang\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)} \tag{6}$$

Man kann dieses auch noch auf eine andere Form bringen, denn es ist bekanntlich:

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \qquad \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = tang^2 \frac{x}{2}$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

und mit $x = 90^\circ + P$ oder mit $x = 90^\circ + \varphi$ giebt dieses:

$$tang^2\left(45^\circ + \frac{P}{2}\right) = \frac{1 + \sin P}{1 - \sin P} \quad \text{und} \quad tang^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

also wird (6):

$$\log \frac{R}{R_0} = \frac{\sin P}{2} \log \frac{(1 + \sin P)(1 - \sin \varphi)}{(1 - \sin P)(1 + \sin \varphi)} \tag{7}$$

oder wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht:

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{1 + \sin P}{1 - \sin P} \, \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}\right)^{\frac{\sin P}{2}} \tag{8}$$

Nach diesen Formeln (6), (7) oder (8) kann man zu jedem Werte φ das zugehörige R berechnen, nachdem R_0 schon aus (1) erhalten worden ist. Auch das dazu gehörende Vergrösserungsverhältnis m kann aus (3) berechnet werden und damit schiene alles erledigt, aber die Rechnung nach diesen geschlossenen Formeln ist mühsam und ungenau, wenn sie nicht mit 10stelligen Logarithmen geführt wird. Es kommt weniger auf R selbst an, als auf die Differenz $R_0 - R$, und diese werden wir besser erlangen durch eine Reihen-Entwicklung, zu welcher wir nun übergehen.

Nach dem Maclaurinschen Satze wird jedenfalls folgende Form bestehen:

$$R = R_0 + \frac{dR}{d\varphi}\bigg] \Delta\varphi + \frac{d^2 R}{d\varphi^2}\bigg] \frac{\Delta\varphi^2}{2} + \frac{d^3 R}{d\varphi^3}\bigg] \frac{\Delta\varphi^3}{6} + \frac{d^4 R}{d\varphi^4}\bigg] \frac{\Delta\varphi^4}{24} \tag{9}$$

Wir wollen aber nicht geradezu die Funktion R von (8) differentiieren, sondern das Konstante absondern und deswegen setzen:

$$\frac{R}{R_0} = \frac{F}{F_0} \tag{10}$$

Oder wegen (8) sollen die F und F_0 folgende Bedeutungen haben:

$$F = \left(\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}\right)^{\frac{1}{2} \sin P} \quad \text{und} \quad F_0 = \left(\frac{1 - \sin P}{1 + \sin P}\right)^{\frac{1}{2} \sin P} \tag{11}$$

Nun giebt (10) durch Ableitung:

$$\frac{1}{R_0} \frac{dR}{d\varphi} = \frac{1}{F_0} \frac{dF}{d\varphi} \tag{12}$$

und damit kann man die Maclaurinsche Reihe (9) auch so schreiben:

$$\frac{R}{R_0} = 1 + \frac{1}{F_0} \frac{dF}{d\varphi}\bigg] \Delta\varphi + \frac{1}{F_0} \frac{d^2 F}{d\varphi^2}\bigg] \frac{\Delta\varphi^2}{2} + \frac{1}{F_0} \frac{d^3 F}{d\varphi^3}\bigg] \frac{\Delta\varphi^3}{6} + \frac{1}{F_0} \frac{d^4 F}{d\varphi^4}\bigg] \frac{\Delta\varphi^4}{24} \tag{13}$$

Nun müssen wir die 4 ersten Ableitungen der Funktion F von (11) bilden und beginnen:

$$\frac{dF}{d\varphi} = \frac{\sin P}{2}\left(\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right)^{\frac{\sin P}{2}-1}\left\{\frac{-\cos\varphi\,(1+\sin\varphi)-(1-\sin\varphi)\cos\varphi}{(1+\sin\varphi)^2}\right\}$$
$$= \frac{\sin P}{2}\left(\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right)^{\frac{\sin P}{2}-1}\left\{\frac{-2\cos\varphi}{(1+\sin\varphi)^2}\right\}$$
$$= -\sin P\left(\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right)^{\frac{\sin P}{2}}\quad\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\,\frac{\cos\varphi}{(1+\sin\varphi)^2}$$

Also mit Wiedereinsetzung von F selbst nach (11):

$$\frac{dF}{d\varphi} = -\sin P\,F\,\frac{\cos\varphi}{1-\sin^2\varphi} = \frac{-\sin P\,F}{\cos\varphi} \tag{14}$$

Diese auf etwas umständlichem Wege erlangte erste Ableitung, die sich so kurz darstellt, kann man auch unmittelbar aus (10) und (12) und (4) entnehmen, was insofern natürlich ist, als in (14) nichts anderes als die Rückwärts-Differentiierung der vorhergegangenen Integration ist.

Die Weiter-Differentiierung von (14) giebt:

$$\frac{d^2F}{d\varphi^2} = -\frac{\sin P}{\cos^2\varphi}\left(\frac{dF}{d\varphi}\cos\varphi + F\sin\varphi\right)$$
$$\frac{d^2F}{d\varphi^2} = +\sin P\,F\,\frac{\sin P-\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \tag{15}$$
$$\frac{d^3F}{d\varphi^3} = \sin P\left\{-\frac{F\sin P}{\cos\varphi}\,\frac{\sin P-\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + F\,\frac{-\cos^3\varphi+(\sin P-\sin\varphi)\,2\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^4\varphi}\right\}$$
$$\frac{d^3F}{d\varphi^3} = F\sin P\left\{\frac{\sin P-\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\,(2\sin\varphi-\sin P)-\frac{1}{\cos\varphi}\right\} \tag{16}$$

Nochmals abgeleitet:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^4F}{d\varphi^4} = \frac{-F\sin^2 P}{\cos\varphi}&\left\{\frac{\sin P-\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\,(2\sin\varphi-\sin P)-\frac{1}{\cos\varphi}\right\}\\ +F\sin P&\left\{+\left(\frac{3\sin P\sin\varphi}{\cos^4\varphi}-\frac{\cos^4\varphi+3\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\cos^6\varphi}\right)\left(2\sin\varphi-\sin P\right)\right.\\ &\left.\qquad+\frac{\sin P-\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\,2\cos\varphi-\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right\}\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Dieses könnte man noch weiter ordnen, da wir aber hier abbrechen, ist es nicht nötig; wir müssen nämlich nun nach dem Maclaurinschen Schema (13) diejenigen besonderen Werte unserer vier Ableitungen bestimmen, welche gelten für $\Delta\varphi = 0$, oder was dasselbe ist $\varphi = P$. Beginnen wir mit (14) und (15), so haben wir alsbald:

$$\left.\frac{dF}{d\varphi}\right] = -F_0\tan P \qquad\text{und}\qquad \left.\frac{d^2F}{d\varphi^2}\right] = 0 \tag{18}$$

Auch (16) und (17) reduzieren sich sehr mit $\varphi = P$, sie geben:

$$\left.\frac{d^3F}{d\varphi^3}\right] = -F_0\tan P \qquad\text{und}\qquad \left.\frac{d^4F}{d\varphi^4}\right] = -F_0\tan^2 P \tag{19}$$

Setzt man alles dieses in das Maclaurinsche Schema (13) ein, so erhält man:

$$\frac{R}{R_0} = 1-\Delta\varphi\tan P-\frac{\Delta\varphi^3}{6}\tan P-\frac{\Delta\varphi^4}{24}\tan^2 P \tag{20}$$

Wir wollen zur Abkürzung setzen:

$$tang\, P = t \quad \text{und} \quad R_0 - R = \varDelta R \tag{21}$$

Damit wird die vorhergehende Reihe (20):

$$\varDelta R = R_0 \varDelta \varphi\, t + R_0 \frac{\varDelta \varphi^3}{6} t + R_0 \frac{\varDelta \varphi^4}{24} t^2 \tag{22}$$

Rechtwinklige Coordinaten x, y.

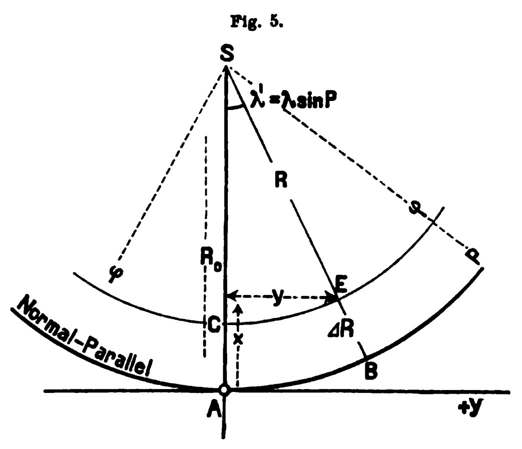


Fig. 5.

Der Mittelmeridian AS unserer Abbildung wird als x-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems genommen, mit einer y-Axe, welche in A den Normalparallelkreis AB berührt, wie in Fig. 5. gezeichnet ist.

Wenn nun irgend ein Punkt E die Länge λ gegen den Mittelmeridian und die Breite φ hat, so kennt man auch die Meridian-Konvergenz $ASE = \lambda' = \lambda \sin P$ u. die meridionale Strecke $BE = \varDelta R$ nach Gleichung (22), folglich hat man nach Fig. 5:

$$x = R_0 - R \cos \lambda' \quad \text{und} \quad y = R \sin \lambda' \tag{23}$$

Man könnte nach diesen Formeln unmittelbar rechnen; besser aber sind Reihen-Entwicklungen, welche sich sehr leicht geben:

$$\frac{x}{R_0} = 1 - \frac{R}{R_0} \cos \lambda' = 1 - \frac{R}{R_0}\left(1 - \frac{\lambda^2 \sin^2 P}{2} + \frac{\lambda^4 \sin^4 P}{24}\right)$$

und wenn man $\frac{R}{R_0}$ aus (20) einsetzt, so bekommt man:

$$\frac{x}{R_0} = 1 - \left(1 - \varDelta \varphi\, t - \frac{\varDelta \varphi^3}{6} t - \frac{\varDelta \varphi^4}{24} t^2\right)\left(1 - \frac{\lambda^2 \sin^2 P}{2} + \frac{\lambda^4 \sin^4 P}{24}\right)$$

Die Multiplizierung mit Vernachlässigung der Glieder über der 4ten Ordnung giebt:

$$\frac{x}{R_0} = \varDelta \varphi\, t + \frac{\lambda^2 \sin^2 P}{2} - \frac{\varDelta \varphi\, \lambda^2 \sin^2 P}{2} t + \frac{\varDelta \varphi^3}{6} t - \frac{\lambda^4 \sin^4 P}{24} + \frac{\varDelta \varphi^4}{24} t^2 \tag{24}$$

aber nach (1) ist $R_0\, t = R_0\, tang\, P = r$, also:

$$\frac{x}{r} = \varDelta \varphi + \frac{\lambda^2}{2} \sin P \cos P - \frac{\varDelta \varphi\, \lambda^2 \sin^2 P}{2} + \frac{\varDelta \varphi^3}{6} - \frac{\lambda^4 \sin^3 P \cos P}{24} + \frac{\varDelta \varphi^4 t}{24} \tag{25}$$

In gleicher Weise bekommt man auch die Reihe für y, denn es ist zunächst:

$$\sin \lambda' = \sin(\lambda \sin P) = \lambda \sin P - \frac{\lambda^3 \sin^3 P}{6}$$

und nach (20):

$$\frac{R}{R_0} = 1 - \varDelta \varphi\, t - \frac{\varDelta \varphi^3}{6} t - \frac{\varDelta \varphi^4}{24} t^2$$

also nach (23):

$$\frac{y}{R} = \left(\lambda \sin P - \frac{\lambda^3 \sin^3 P}{6}\right)\left(1 - \varDelta\varphi\, t - \frac{\varDelta\varphi^3}{6} t - \frac{\varDelta\varphi^4}{24} t^2\right)$$

$$\frac{y}{R} = \lambda \sin P - \varDelta\varphi\, \lambda \sin P t - \frac{\lambda^3}{6} \sin^3 P + \frac{\varDelta\varphi\, \lambda^3 \sin^3 P t}{6} - \frac{\varDelta\varphi^3 \lambda \sin P t}{6}$$

$$\frac{y}{r} = \lambda \cos P - \varDelta\varphi\, \lambda \sin P - \frac{\lambda^3}{6} \sin^2 P \cos P + \frac{\varDelta\varphi\, \lambda^3 \sin^3 P}{6} - \frac{\varDelta\varphi^3\, \lambda \sin P}{6} \tag{26}$$

Es fehlen noch die Umkehrungen dieser Gleichungen zur Bestimmung von $\varDelta\varphi$ und λ aus gegebenem x und y. Dazu hat man zunächst nach dem Anblick von Fig. 5. die geschlossenen Formeln:

$$R^2 = (R_0 - x)^2 + y^2 \quad \text{und} \quad tang\, \lambda' = \frac{y}{R_0 - x} \tag{27}$$

Also aufgelöst nach (21):

$$R^2 = (R_0 - \varDelta R)^2 = R_0^2 - 2 R_0 \varDelta R + \varDelta R^2 = R_0^2 - 2 R_0 x + x^2 + y^2$$

$$\frac{\varDelta R}{R_0} - \frac{\varDelta R^2}{2 R_0^2} = \frac{x}{R_0} - \frac{x^2}{2 R_0^2} - \frac{y^2}{2 R_0^2} \tag{28}$$

Nach (22) ist:

$$\frac{\varDelta R}{R_0} = \varDelta\varphi\, t + \frac{\varDelta\varphi^3}{6} t + \frac{\varDelta\varphi^4}{24} t^2 \tag{29}$$

also auch hinreichend genau

$$\frac{\varDelta R^2}{R_0^2} = \varDelta\varphi^2 t^2 + \frac{\varDelta\varphi^4}{3} t^2 \tag{30}$$

also wieder mit dem vorhergehenden (29) eingesetzt in (28):

$$\varDelta\varphi\, t - \frac{\varDelta\varphi^2 t^2}{2} + \frac{\varDelta\varphi^3}{6} t - \frac{\varDelta\varphi^4}{8} t^2 = \frac{x}{R_0} - \frac{x^2}{2 R_0^2} - \frac{y^2}{2 R_0^2} \tag{31}$$

Diese Gleichung soll durch allmähliche Näherung nach $\varDelta\varphi$ aufgelöst werden. Jedenfalls ist in erster Näherung:

$$\varDelta\varphi\, t = \frac{x}{R_0} + x^2 \ldots \quad \text{also} \quad \varDelta\varphi^2 t^2 = \frac{x^2}{R_0^2} + x^3 \ldots$$

$$\varDelta\varphi\, t - \frac{x^2}{2 R_0^2} + \ldots \qquad = \frac{x}{R_0} - \frac{x^2}{2 R_0^2} - \frac{y^2}{2 R_0^2} + \ldots$$

Zweite Näherung $\qquad \varDelta\varphi\, t = \frac{x}{R_0} - \frac{y^2}{2 R_0^2} + \ldots$

$$\varDelta\varphi^2 t^2 = \frac{x^2}{R_0^2} - \frac{x y^2}{R_0^3} \quad , \quad \varDelta\varphi^3 t^3 = \frac{x^3}{R_0^3}$$

Also von neuem bis zur dritten Ordnung:

$$\varDelta\varphi\, t - \frac{x^2}{2 R_0^2} + \frac{x y^2}{2 R_0^3} + \frac{x^3}{6 R_0^3 t^2} = \frac{x}{R_0} - \frac{x^2}{2 R_0^2} - \frac{y^2}{2 R_0^2}$$

$$\varDelta\varphi\, t = \frac{x}{R_0} - \frac{y^2}{2 R_0^2} - \frac{x y^2}{2 R_0^3} - \frac{x^3}{6 R_0^3 t^2}$$

Damit bis zur 4 ten Ordnung:

$$\varDelta\varphi^2 t^2 = \frac{x^2}{R_0^2} - \frac{x y^2}{R_0^3} - \frac{x^2 y^2}{R_0^4} - \frac{x^4}{3 R_0^4 t^2} + \frac{y^4}{4 R_0^4}$$

$$\varDelta\varphi^3 t^3 = \frac{x^3}{R_0^3} - \frac{3}{2} \frac{x^2 y^2}{R_0^4} \quad \text{und} \quad \varDelta\varphi^4 t^4 + \frac{x^4}{R_0^4}$$

Alles dieses in (31) eingesetzt giebt die Schlussgleichung:

$$\Delta\varphi\, t - \frac{x^2}{2R_0^2} + \frac{x y^2}{2R_0^3} + \frac{x^2 y^2}{2R_0^4} + \frac{x^4}{6R_0^4 t^2} - \frac{y^4}{8R_0^4} + \frac{x^3}{6R_0^3 t^2} - \frac{x^2 y^2}{4R_0^4 t^2} - \frac{x^4}{8R_0^4 t^2}$$
$$= \frac{x}{R_0} - \frac{x^2}{2R_0^2} - \frac{y^2}{2R_0^2}$$

Diese Schlussgleichung kann man geradezu nach $\Delta\varphi\, t$ auflösen, nämlich:

$$\Delta\varphi\, t = \frac{x}{R_0} - \frac{y^2}{2R_0^2} - \frac{x y^2}{2R_0^3} - \frac{x^3}{6R_0^3 t^2} - \frac{x^2 y^2}{4R_0^4 t^2}\left(2t^2 - 1\right) - \frac{x^4}{24R_0^4 t^2} + \frac{y^4}{8R_0^4} \quad (32)$$

und weil $R_0 t = r$ ist, giebt dieses schliesslich:

$$\Delta\varphi = \frac{x}{r} - \frac{y^2}{2r^2}t - \frac{x y^2}{2r^3}t^2 - \frac{x^3}{6r^3} - \frac{x^2 y^2}{4r^4}t\left(2t^2 - 1\right) - \frac{x^4}{24r^4}t + \frac{y^4}{8r^4}t^3 \quad (33)$$

Um vollends λ nach (27) zu erhalten, brauchen wir mit $\lambda' = \lambda \sin P$:

$$\operatorname{tang}(\lambda \sin P) = \frac{y}{R_0 - x} = \frac{y}{R_0\left(1 - \frac{x}{R_0}\right)} = \frac{y}{R_0}\left(1 + \frac{x}{R_0} + \frac{x^2}{R_0^2} + \frac{x^3}{R_0^3}\right)$$

$$\lambda \sin P + \frac{\lambda^3 \sin^3 P}{3} = \frac{y}{R_0} + \frac{y x}{R_0^2} + \frac{y x^2}{R_0^3} + \frac{y x^3}{R_0^4}$$

Erste Näherung:

$$\lambda \sin P = \frac{y}{R_0} + \frac{y x}{R_0^2} + \ldots$$

$$\lambda^3 \sin^3 P = \frac{y^3}{R_0^3} + \frac{3 y^3 x}{R_0^4}$$

$$\lambda \sin P + \frac{1}{3}\left(\frac{y^3}{R_0^3} + \frac{3 y^3 x}{R_0^4}\right) = \frac{y}{R_0} + \frac{y x}{R_0^2} + \frac{y x^2}{R_0^3} + \frac{y x^3}{R_0^4}$$

$$\lambda \sin P = \frac{y}{R_0} + \frac{y x}{R_0^2} + \frac{y x^2}{R_0^3} - \frac{y^3}{3R_0^3} - \frac{y^3 x}{R_0^4} + \frac{y x^3}{R_0^4} \quad (34)$$

oder weil $R_0 t = R_0 \operatorname{tang} P = r$ ist, giebt dieses:

$$\lambda \cos P = \frac{y}{r} + \frac{y x}{r^2}t + \frac{y x^2}{r^3}t^2 - \frac{y^3}{3r^3}t^2 - \frac{y^3 x}{r^4}t^3 + \frac{y x^3}{r^4}t^3 \quad (35)$$

Damit ist alles für die Coordinaten nötige vorhanden; es fehlt nur noch die Reihe für m, dessen geschlossener Ausdruck nach (3) ist, mit $R_0 = r \operatorname{cotg} P$:

$$m = \frac{R \sin P}{r \cos\varphi} \quad \text{oder} \quad = \frac{R \cos P}{R_0 \cos\varphi} \quad (36)$$

hiezu hat man nach (20):

$$\frac{R}{R_0} = 1 - \Delta\varphi\, t - \frac{\Delta\varphi^3}{6}t \quad (37)$$

und weil $\varphi = P + \Delta\varphi$ ist, hat man nach § 28. S. 167:

$$\cos\varphi = \cos P\left(1 - \Delta\varphi\, t - \frac{\Delta\varphi_2}{2} + \frac{\Delta\varphi^3}{6}t\right)$$

Die Umkehrung giebt, wie ebenfalls schon auf S. 167 angegeben:

$$\frac{\cos P}{\cos\varphi} = 1 + \left(\Delta\varphi\, t + \frac{\Delta\varphi^2}{2} - \frac{\Delta\varphi^3}{6}t\right) + \left(\Delta\varphi\, t + \frac{\Delta\varphi^2}{2}\right)^2 + \left(\Delta\varphi\, t\right)^3$$

$$\frac{\cos P}{\cos\varphi} = 1 + \Delta\varphi\, t + \frac{\Delta\varphi^2}{2}\left(1 + 2t^2\right) + \frac{\Delta\varphi^3}{6}t\left(5 + 6t^2\right) \quad (38)$$

Die beiden Reihen (37) und (38) zusammen multipliziert geben:

$$m = 1 + \frac{\Delta\varphi^2}{2} + \frac{\Delta\varphi^3 t}{6} \tag{39}$$

Um dieses m auch als Funktion der Coordinaten x und y darzustellen, hat man aus (33):

$$\Delta\varphi = \frac{x}{r} - \frac{y^2}{2r^2}t$$

$$\Delta\varphi^2 = \frac{x^2}{r^2} - \frac{xy^2}{r^2}t \qquad \Delta\varphi^3 = \frac{x^3}{r^3}$$

Diese $\Delta\varphi^2$ und $\Delta\varphi^3$ in (39) eingesetzt geben:

$$m = 1 + \frac{x^2}{2r^2} - \frac{xy^2}{2r^3}t + \frac{x^3}{6r^3}t \tag{40}$$

$$\text{oder} \quad \frac{1}{m} = 1 - \frac{x^2}{2r^2} + \frac{xy^2}{2r^3}t - \frac{x^3}{6r^3}t \tag{41}$$

Für das praktische Rechnen wird man auch $\log m$ nehmen, was innerhalb dieser Grössenordnung sehr einfach ist, nämlich nach (40) und (41):

$$\log m = \frac{\mu x^2}{2r^2} - \frac{\mu xy^2}{2r^3}t + \frac{\mu x^3}{6r^3}t \tag{42}$$

$$\text{oder} \quad \log\frac{1}{m} = -\frac{\mu x^2}{2r^2} + \frac{\mu xy^2}{2r^3}t - \frac{\mu x^3}{6r^3}t \tag{43}$$

In erster Näherung, d. h. mit Beschränkung auf $\frac{1}{r^2}$ also Weglassung von $\frac{1}{r^3}$ sind diese Formeln (40)—(43) entsprechend den früheren (10) § 50. S. 281, wenn man x und y vertauscht, was auch ganz natürlich ist.

Obgleich für die meisten Zwecke diese Formeln (40)—(43) ausreichen, wollen wir doch auch noch die 4te Ordnung dazu entwickeln, wozu man nach (20) hat:

$$\frac{R}{R_0} = 1 - \Delta\varphi\, t - \frac{\Delta\varphi^3}{6}t - \frac{\Delta\varphi^4}{24}t^2 \tag{44}$$

und weil $\varphi = P + \Delta\varphi$, hat man nach § 28. S. 167:

$$\cos\varphi = \cos P\left(1 - \Delta\varphi\, t - \frac{\Delta\varphi^2}{2} + \frac{\Delta\varphi^3}{6}t + \frac{\Delta\varphi^4}{24}\right)$$

Die Umkehrung giebt:

$$\frac{\cos P}{\cos\varphi} = 1 + \left(\Delta\varphi\, t + \frac{\Delta\varphi^2}{2} - \frac{\Delta\varphi^3}{6}t - \frac{\Delta\varphi^4}{24}\right) + \left(\Delta\varphi\, t + \frac{\Delta\varphi^2}{2} - \frac{\Delta\varphi^3}{6}t\right)^2$$
$$+ \left(\Delta\varphi\, t + \frac{\Delta\varphi^2}{2}\right)^3 + \left(\Delta\varphi\, t\right)^4$$

Die Ausrechnung hievon, welche auch schon auf S. 167 angegeben wurde, ist bis zur 4ten Ordnung:

$$\frac{\cos P}{\cos\varphi} = 1 + \Delta\varphi t + \frac{\Delta\varphi^2}{2}\left(1 + 2t^2\right) + \frac{\Delta\varphi^3 t}{6}\left(5 + 6t^2\right) + \frac{\Delta\varphi^4}{24}\left(5 + 28t^2 + 24t^4\right) \tag{45}$$

Man hat die beiden Reihen (44) und (45) zu multiplizieren, um zu der Reihe für m zu gelangen, die Ausführung giebt:

$$m = 1 + \frac{\Delta\varphi^2}{2} + \frac{\Delta\varphi^3 t}{6} + \frac{\Delta\varphi^4}{24}\left(5 + 3t^2\right) \tag{46}$$

Um m auch als Funktion von x und y darzustellen hat man aus (38):

$$\Delta\varphi = \frac{x}{r} - \frac{y^2}{2r^2}t - \frac{xy^2}{2r^3}t^2 - \frac{x^3}{6r^3}$$

$$\Delta\varphi^2 = \frac{x^2}{r^2} - \frac{xy^2}{r^2}t - \frac{x^2y^2}{r^4}t^2 - \frac{x^4}{3r^4} + \frac{y^4}{4r^4}t^2$$

$$\Delta\varphi^3 = \frac{x^3}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{x^2y^2}{r^4}t \quad \text{und} \quad \Delta\varphi^4 = \frac{x^4}{r^4}$$

Dieses in (46) eingesetzt giebt:

$$m = 1 + \frac{x^2}{2r^2} - \frac{xy^2}{2r^3}t + \frac{x^3}{6r^3}t - \frac{3x^2y^2}{4r^4}t^2 + \frac{x^4}{24r^4}\left(1 + 3t^2\right) + \frac{y^4}{8r^4}t^2 \tag{47}$$

Die Umkehrung davon giebt:

$$\frac{1}{m} = 1 - \left(\frac{x^2}{2r^2} - \frac{xy^2}{2r^3}t + \ldots\right) + \left(\frac{x^2}{2r^2} - \ldots\right)^2$$

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{x^2}{2r^2} + \frac{xy^2}{2r^3}t - \frac{x^3}{6r^3}t + \frac{3x^2y^2}{4r^4}t^2 + \frac{x^4}{24r^4}\left(5 - 3t^2\right) - \frac{y^4}{8r^4}t^2 \tag{48}$$

Für das praktische Rechnen wird man auch $\log m$ nehmen:

$$l\,m = l\left(1 + \frac{x^2}{2r^2} - \frac{xy^2}{2r^3}t\ldots\right) = \frac{x^2}{2r^2} - \frac{xy^2}{2r^3}t + \ldots - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2r^2} - \ldots\right)^2 \tag{49}$$

$$\log m = \frac{\mu x^2}{2r^2} - \frac{\mu xy^2}{2r^3}t + \frac{\mu x^3}{6r^3}t - \frac{3}{4}\frac{\mu x^2y^2}{r^4}t^2 + \frac{\mu}{24r^4}\left(-2 + 3t^2\right) + \frac{\mu y^4}{8r^4}t^2 \tag{50}$$

Die hier auftretenden Glieder 4ter Ordnung werden wir später dazu benützen können, um sie auch den *sphäroidischen* Formeln, die wir an sich nur bis zur dritten Ordnung entwickeln werden, anzuhängen.

Die vorstehenden Formeln sind auch mit den bis zur 4ten Ordnung geführten sphärischen Formeln übereinstimmend, welche wir in der „Zeitschr. f. Verm." 1896, S. 129—141 entwickelt haben, wobei aber zu beachten ist, dass dort die Coordinaten nach Mecklenburger Art mit $+x$ nach Süden und $+y$ nach Westen gezählt sind („Zeitschr." 1896, S. 130), während wir hier, wie sonst üblich, $+x$ nach Norden und $+y$ nach Osten zählen, so dass z. B. unsere obenstehende Formel (47) für m übergeht in (52) S. 138 „Zeitschr." 1896, wenn man in x und in y die Vorzeichen ändert, so dass im ganzen nur die ungeraden Potenzen xy^2 und x^3 umschlagen, aber x^2 x^2y^2, x^4 und y^4 im Zeichen bleiben.

§ 81. Konforme Kegelprojektion des Ellipsoids.

Mecklenburgische Coordinaten.

Die Übertragung der sphärischen Betrachtungen des vorigen § 80. auf das Ellipsoid ist, soweit die Grundformeln in Betracht kommen, nicht schwierig. Wenn N der Quer-Krümmungs-Halbmesser für die Normalbreite P ist, so wird nach Fig. 1. S. 428 die Kegelstrahllänge:

$$R_0 = N \operatorname{cotg} P \tag{1}$$

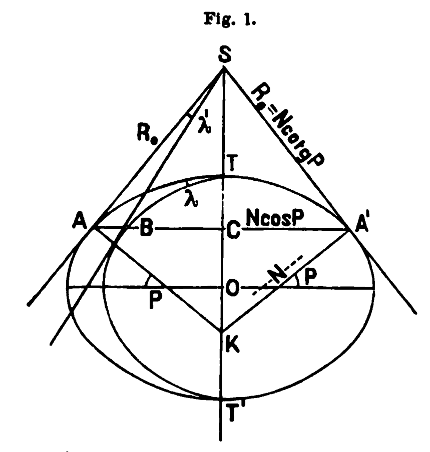
Die Meridian-Konvergenz-Formel bleibt dieselbe wie früher, nämlich:

$$\lambda' = \lambda \sin P \tag{2}$$

Auch die Ähnlichkeitsbedingung hat im wesentlichen die frühere Form, nämlich nach Fig. 2. und Fig. 3. S. 429:

$$m = -\frac{dR}{M\,d\varphi} = \frac{R\,d\lambda'}{N\cos\varphi\,d\lambda}$$

Fig. 1.



Es ist nur statt des früheren Kugel-Halbmessers r nun M für den Meridian und N für den Querbogen genommen. Auch die Einsetzung von (2) gestaltet sich wie früher und giebt:

$$m = -\frac{dR}{M\,d\varphi} = \frac{R\sin P}{N\cos\varphi} \tag{3}$$

$$-\frac{dR}{R} = \sin P\frac{M}{N}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

Für $\frac{M}{N}$ wollen wir nach (25) § 32. S. 197 setzen:

$$\frac{M}{N} = \frac{1-e^2}{W^2} = \frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi}$$

Also nach der vorhergehenden Gleichung:

$$-\frac{dR}{R} = \sin P\frac{(1-e^2)\,d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi} \tag{4}$$

Die Integration wird auf dem Wege der Teilbrüche gemacht, indem man zuerst so zerlegt:

$$\frac{1-e^2}{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} - \frac{1}{2}\frac{e^2\cos\varphi}{1+e\sin\varphi} - \frac{1}{2}\frac{e^2\cos\varphi}{1-e\sin\varphi}$$

Folglich wird das Integral von (4):

$$\int\frac{(1-e^2)\,d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi} = l\,tang\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{2}e\,l\,(1+e\sin\varphi) + \frac{1}{2}e\,l\,(1-e\sin\varphi)$$

$$= l\,tang\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{2}e\,l\,\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}$$

Die linke Seite von (4) giebt integriert $-l\,R$, und indem man auf beiden Seiten von den natürlichen Logarithmen l zu den gewöhnlichen Logarithmen log übergeht, hat man nun also als Integration von (4):

$$-\log R = \sin P\left\{\log tang\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{e}{2}\log\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right\} + \ldots$$

Zur Bestimmung der Integrations-Konstanten setzen wir fest, dass R_0 und P zusammengehörige Normalwerte sein sollen, also:

$$-\log R_0 = \sin P\left\{\log tang\left(45^\circ+\frac{P}{2}\right) + \frac{e}{2}\log\frac{1-e\sin P}{1+e\sin P}\right\} + \ldots$$

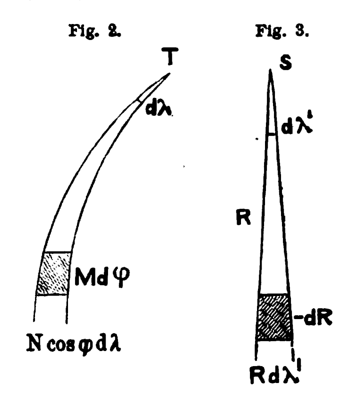
also durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen:

$$\log\frac{R}{R_0} = \sin P\log\frac{tang\left(45^\circ+\frac{P}{2}\right)}{tang\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)} + \frac{e}{2}\sin P\log\frac{1-e\sin P}{1+e\sin P}\,\frac{1+e\sin\varphi}{1-e\sin\varphi} \tag{5}$$

Auch den geschlossenen Ausdruck für m hat man aus (3):

$$m = \frac{R \sin P}{N \cos \varphi} \quad \text{oder} \quad m = \frac{R \cos P}{R_0 \cos \varphi} \tag{6}$$

Nun muss man alle die Reihenentwicklungen, welche wir im vorigen § 80. sphärisch gemacht haben, auch mit diesen sphäroidischen Formeln durchführen, doch kann das hier nicht ausführlich geschehen. Wir verweisen hiefür auf das Werk „Grossherzoglich Mecklenburgische Landes-Vermessung" V. Teil: Die konforme Kegelprojektion u. s. w. von Jordan, Mauck, Vogeler, Schwerin 1895 (vgl. § 59. S. 335).



Wir wollen die wichtigsten Formeln von dort ausziehen, aber mit einigen Änderungen:

Erstens hat Mecklenburg die Coordinatenzählung $+x$ nach Süden, $+y$ nach Westen, auch λ nach Westen positiv, während wir hier nach Fig. 5. § 80. S. 423 wie gewöhnlich $+x$ nach Norden, $+y$ nach Osten und auch λ nach Osten positiv zählen werden. Auch die geographische Breitenzählung, welche mecklenburgisch mit $P - \varphi = p$ nach Süden geht, nehmen wir nun $\varphi - P = \Delta\varphi$ nach Norden.

Zweitens ist in den Mecklenburgischen Formeln meist der Kegelstrahl R_0 als Konstante genommen, während wir nun, wegen der späteren Vergleichung mit anderen Formeln, den Quer-Krümmungs-Halbmesser N der Normalbreite als Hauptkonstante nehmen wollen, so dass wir haben: $R_0 = N \operatorname{cotg} P$, also $R_0 \operatorname{tang} P = N$ oder abgekürzt geschrieben: $R_0 t = N$.

Wir werden auch nicht alle sphäroidischen Glieder höherer Ordnung η^4 u. s. w. aus den Mecklenburgischen Formeln hier mitnehmen. Die Citate Meckl. S... beziehen sich auf die Seitenzahlen des im vorstehenden citierten Mecklenburgischen Werkes.

I. Breitenunterschied $\Delta\varphi$ und Längenunterschied λ als Funktion der Coordinaten x und y, Meckl. S. 23 und 22:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta\varphi}{V^2} = \frac{x}{N} - \frac{3x^2}{2N^2}\eta^2 t - \frac{y^2}{2N^2}t - \frac{xy^2t^2}{2N^3}\left(1 - 3\eta^2\right) - \frac{x^3}{6N^3}\left(1 + 4\eta^2 - 3\eta^2 t^2\right) \\ - \frac{x^2y^2t}{4N^4}\left(-1 + 2t^2\right) - \frac{x^4 t}{24N^4} + \frac{y^4t^3}{8N^4}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\lambda \cos P = \frac{y}{N} + \frac{yxt}{N^2} + \frac{yx^2t^2}{N^3} - \frac{y^3t^2}{3N^3} + \frac{yx^3t^3}{N^4} - \frac{y^3xt^3}{N^4} \tag{8}$$

II. Coordinaten x und y als Funktion von $\Delta\varphi$ und λ, Meckl. S. 19:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{N} = \frac{\Delta\varphi}{V^2} + \frac{3}{2}\frac{\Delta\varphi^2}{V^4}\eta^2 t + \frac{\lambda^2}{2}\sin P\cos P - \frac{\Delta\varphi\,\lambda^2}{2V^2}\sin^2 P + \frac{\Delta\varphi^3}{6V^6}\left(1 + 4\eta^2 - 3\eta^2t^2\right) \\ + \frac{\Delta\varphi^4 t}{24V^8} - \frac{\lambda^4}{24}\sin^3 P\cos P\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{y}{N} = \lambda\cos P - \frac{\lambda\,\Delta\varphi}{V^2}\sin P - \frac{3}{2}\frac{\lambda\,\Delta\varphi^2}{V^4}\cos P\, t^2\eta^2 - \frac{\lambda^3}{6}\sin^2 P\cos P \\ - \frac{\lambda\,\Delta\varphi^3\sin P}{6V^6}\left(1 + 4\eta^2 - 3\eta^2t^2\right) + \frac{\lambda^3}{6}\frac{\Delta\varphi}{V^2}\sin^3 P\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

In allen diesen Formeln ist gesetzt $t = tang\,P$, $V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 P$, $N = c : V$. Die sphärischen Bestandteile dieser Gleichungen müssen übereinstimmen mit (33), (35), (25), (26) des vorigen § 80.

Ausser dem im vorstehenden citierten amtlichen Mecklenburgischen Werke (dessen genauer Titel schon auf S. 336 angegeben ist) haben wir auch noch einige Ergänzungen zu berichten.

Die Reduktionen für Entfernungen und Richtungswinkel, welche wir hier weder in § 80. noch in § 81. entwickelt haben, sind in *erster* Näherung dieselben wie bei der konformen, meridionalen Projektion in § 50. Gleichungen (12) S. 282 und (31), (32) S. 284, jedoch mit Vertauschung der Bezeichnungen x und y. Die nächsten Glieder hiezu, welche zur praktischen Rechnung mit 7 stelligen Logarithmen bei den Richtungswinkeln auf 0,01″ ausreichen, sind in dem Mecklenburgischen Werke § 10. angegeben; mit Gliedern von der Ordnung $\frac{x^2 \Delta y}{r^3}$, $\frac{y^2 \Delta y}{r^3}$ und $\frac{y\,x\,\Delta x}{r^3}$.

Eine Ergänzung mit den Gliedern auch noch $\frac{\Delta y^3}{r^3}$ und $\frac{\Delta y^2 \Delta x}{r^3}$, welche äusserstenfalls noch 0,01″ erreichen, haben wir in „Zeitschr." 1895, S. 421—424 gegeben, und endlich, um jedem theoretischen Einwand zu begegnen, haben wir noch in „Zeitschr. f. Verm." 1896, S. 129—143 die ganze Entwicklung sphärisch, mit allen Gliedern 4ter Ordnung, d. h. $\frac{1}{r^4}$ auch noch dazu gemacht.

Hiernach haben die Mecklenburgischen Geodäten eine Kontroll-Diagonale von 285km Länge über ihr Land gerechnet („Zeitschr. für Verm." 1896, S. 240—248) mit 1° 30′ Breitenunterschied und 3° 30′ Längenunterschied, d. h. die Diagonale, welche wir auch schon unter den sphäroidischen Normalbeispielen in § 73. S. 392 angegeben haben. Diese Diagonale wurde zweifach berechnet, erstens als geodätische Linie mit reduzierten Breiten nach unseren neuen Formeln, welche in dem späteren Kapitel VIII. zu behandeln sein werden, und zweitens als Projektions-Gerade in der konformen Kegelprojektion, mit sphäroidischen Reduktionen. Folgendes ist die Vergleichung (nach „Zeitschr. f. Verm." 1896, S. 241, 242, 244, 248):

aus geographischen Coordinaten	aus rechtwinkligen Coordinaten	
$\varphi_1 = 53°\ 0'$, $\varphi_2 = 54°\ 30'$, $\lambda = 3°\ 30'$	$y_1 = +\ 67129{,}7368^m$ $x_1 = +\ 82986{,}8682^m$; $y_2 = -\ 161\,922{,}5986^m$ $x_2 = -\ 86318{,}9409^m$	
(Bezeichnungen nach Fig. 1. § 76. S. 399)	($+y$ nach Westen, $+x$ nach Süden)	
$S = 284\,835{,}8642^m$	$S = 284\,835{,}8648^m$	$+\ 0{,}0006^m$
$\log S = 5.4545\,946{\cdot}712$	$\log S = 5.4545\,946{\cdot}721$	$+\ 0{\cdot}009$
Azimut $\alpha_1 = 52°\ 43'\ 39{,}1835''$	*Azimut* $\alpha_1 = 52°\ 43'\ 39{,}1858''$	$+\ 0{,}0023''$
„ $\alpha_2 = 55°\ 33'\ 2{,}3646''$	„ $\alpha_2 = 55°\ 33'\ 2{,}3612''$	$-\ 0{,}0034''$

Die übrigbleibenden Fehler sind so weit ausser aller praktischen Schädlichkeit, dass damit die Mecklenburgische konforme Projektion nicht nur für die praktischen Vermessungszwecke, sondern für alle aus irgend welchen Gründen an sie zu stellenden Forderungen genügend nachgewiesen ist.

In rein praktischer Beziehung als Grundlage für topographische und Katastermessungen ist die Mecklenburgische Triangulierung mit ihrer konformen Projektion die beste von allen deutschen Landesvermessungen. Aus Veranlassung einer Gegen-



bemerkung hat Kammeringenieur Vogeler in Schwerin die Überlegenheit der Mecklenburgischen Projektion über andere deutsche, namentlich die sogen. Soldnersche Projektion in überzeugender und anschaulichster Weise dargelegt in „Zeitschr. f. Verm." 1896, S. 257—263.

§. 82. Queraxige sphärische Coordinaten.

In Fig. 1. ist die kugelförmige Erde in solcher Projektion dargestellt, dass der Äquator als Kreis $E D F D'$ erscheint, in dessen Mittelpunkt der Nordpol P projiziert ist. In einem Punkte O ist rechtwinklig zum Meridian $P O$ ein Grosskreisbogen $E O F$ gelegt, auf welchem eine Länge $O B = y$ abgemessen ist zur Bestimmung eines Punktes B, welcher mit $B A = x$ rechtwinklig zu $O B$ festgelegt wird. Es ist also im Sinne gewöhnlicher sphärischer Coordinaten y die Abscisse und x die Ordinate des Punktes A, wobei es aber gleichgiltig ist, wenn wir statt dessen nun y Ordinate und x Abscisse nennen,

Fig. 1.

Der Bogen $B A$ wird verlängert einen Punkt C treffen, welcher Pol des Bogens $E O F$ genannt wird, und es werden alle Bögen x, welche rechtwinklig auf der Axe $E O F$ stehen, sich in diesem Punkte C schneiden.

Wenn die Ursprungsbreite in O den Wert φ_0 hat, so ist auch der Bogen $C P = \varphi_0$, und um die geographischen Coordinaten von A zu erhalten, müssen wir noch $P A$ ziehen, welches mit dem Bogen $P A = 90°$ $- \varphi$ und dem Winkel $O P A = \lambda$ die geographische Breite φ und die geographische Länge λ von A bestimmt.

Zieht man dazu noch den Bogen $C A$ in Betracht, so hat man $C A = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{r}$ und bei A den Winkel $P A C = \gamma$ als Meridian-Konvergenz, sowie bei C den Winkel $P C A = \frac{y}{r}$.

Nun bietet das sphärische Dreieck $C P A$ alles was zur Lösung unserer Aufgabe nötig ist, nämlich Bestimmung von φ, λ, γ, aus gegebenen φ_0, y, x und umgekehrt.

Um zuerst φ zu bestimmen, haben wir die Cosinus-Gleichung:

$$\cos(90° - \varphi) = \cos\varphi_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{r}\right) + \sin\varphi_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{r}\right) \cos\frac{y}{r}$$

$$\sin\varphi = \cos\varphi_0 \sin\frac{x}{r} + \sin\varphi_0 \cos\frac{x}{r} \cos\frac{y}{r} \tag{1}$$

Zunächst nur bis zur dritten Ordnung entwickelt giebt dieses:

$$\sin\varphi = \cos\varphi_0 \left(\frac{x}{r} - \frac{x^3}{6 r^3}\right) + \sin\varphi_0 \left(1 - \frac{x^2}{2 r^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{2 r^2}\right)$$

$$sin\,\varphi = cos\,\varphi_0 \left(\frac{x}{r} - \frac{x^3}{6\,r^3}\right) + sin\,\varphi_0 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2\,r^2}\right)$$

$$sin\,\varphi - sin\,\varphi_0 = \frac{x}{r}\,cos\,\varphi_0 - \frac{x^2 + y^2}{2\,r^2}\,sin\,\varphi_0 - \frac{x^3}{6\,r^3}\,cos\,\varphi_0$$

Andererseits wird gesetzt $\varphi = \varphi_0 + \varDelta\,\varphi$ (2)

also nach S. 166, Taylor sche Reihe:

$$sin\,\varphi = sin\,\varphi_0 + \varDelta\,\varphi\,cos\,\varphi_0 - \frac{\varDelta\,\varphi^2}{2}\,sin\,\varphi_0 - \frac{\varDelta\,\varphi^3}{6}\,cos\,\varphi_0.$$

Die beiden letzten Gleichungen zusammen geben mit $tang\,\varphi_0 = t$

$$\varDelta\,\varphi - \frac{\varDelta\,\varphi^2}{2}\,t - \frac{\varDelta\,\varphi^3}{6} = \frac{x}{r} - \frac{x^2 + y^2}{2\,r^2}\,t - \frac{x^3}{6\,r^3}$$

Hieraus als erste Näherung:

$$\varDelta\,\varphi = \frac{x}{r} - \frac{y^2}{2\,r^2}\,t + \ldots$$

und dann in bekannter Weise fortgesetzt:

$$\varDelta\,\varphi = \frac{x}{r} - \frac{y^2}{2\,r^2}\,t - \frac{x\,y^2}{2\,r^3}\,t^2 \tag{3}$$

Um zur 4ten Ordnung zu gelangen, entwickeln wir aus (1) weiter:

$$sin\,\varphi = cos\,\varphi_0 \left(\frac{x}{r} - \frac{x^3}{6\,r^3}\right) + sin\,\varphi_0 \left(1 - \frac{x^2}{2\,r^2} + \frac{x^4}{24\,r^4}\right)\left(1 - \frac{y^2}{2\,r^2} + \frac{y^4}{24\,r^4}\right)$$

$$sin\,\varphi = cos\,\varphi_0 \left(\frac{x}{r} - \frac{x^3}{6\,r^3}\right) + sin\,\varphi_0 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2\,r^2} + \frac{x^4 + 6\,x^2\,y^2 + y^4}{24\,r^4}\right)$$

$$sin\,\varphi - sin\,\varphi_0 = cos\,\varphi_0 \left(\frac{x}{r} - \frac{x^2 + y^2}{2\,r^2}\,t - \frac{x^3}{6\,r^3} + \frac{x^4 + 6\,x^2\,y^2 + y^4}{24\,r^4}\,t\right)$$

Andererseits ist mit $\varphi = \varphi_0 + \varDelta\,\varphi$ nach S. 166:

$$sin\,\varphi = sin\,\varphi_0 + \varDelta\,\varphi\,cos\,\varphi_0 - \frac{\varDelta\,\varphi^2}{2}\,sin\,\varphi_0 - \frac{\varDelta\,\varphi^3}{6}\,cos\,\varphi_0 + \frac{\varDelta\,\varphi^4}{24}\,sin\,\varphi_0$$

Dieses mit dem Vorhergehenden verglichen giebt:

$$\varDelta\,\varphi - \frac{\varDelta\,\varphi^2}{2}\,t - \frac{\varDelta\,\varphi^3}{6} + \frac{\varDelta\,\varphi^4}{24}\,t = \frac{x}{r} - \frac{x^2 + y^2}{2\,r^2}\,t - \frac{x^3}{6\,r^3} + \frac{x^4 + 6\,x^2\,y^2 + y^4}{24\,r^4} \tag{4}$$

Da wir die Näherung bis zur dritten Ordnung in (3) bereits haben, so kann man daraus entwickeln:

$$\varDelta\,\varphi^2 = \frac{x^2}{r^2} - \frac{x\,y^2}{r^3}\,t - \frac{x^2\,y^2}{r^4}\,t^2 + \frac{y^4}{4\,r^4}\,t^2$$

$$\varDelta\,\varphi^3 = \frac{x^3}{r^3} - \frac{3}{2}\,\frac{x^2\,y^2}{r^4}\,t\,, \quad \varDelta\,\varphi^4 = \frac{x^4}{r^4}$$

Wenn man diese Ausdrücke in (4) einsetzt und ordnet, so bekommt man:

$$\varDelta\,\varphi = \frac{x}{r} - \frac{y^2}{2\,r^2}\,t - \frac{x\,y^2}{2\,r^3}\,t^2 - \frac{x^2\,y^2}{2\,r^4}\,t^3 + \frac{y^4}{24\,r^4}\,t\,(1 + 3\,t^2) \tag{5}$$

Damit haben wir $\varDelta\,\varphi$, und um zu λ zu gelangen, schreiben wir eine Contangentengleichung an in Bezug auf das Dreieck $C\,P\,A$, nämlich:

$$cotg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{r}\right) sin\,\varphi_0 = cos\,\varphi_0\,cos\,\frac{x}{r} + sin\,\frac{y}{r}\,cotg\,(180^\circ - \lambda)$$

$$tang\frac{x}{r}\sin\varphi_0 = \cos\varphi_0\cos\frac{y}{r} - \sin\frac{y}{r}\cotg\lambda$$

$$tang\,\lambda = \sin\frac{y}{r}\sec\varphi_0\frac{1}{\cos\frac{y}{r} - tang\frac{x}{r}\,tang\,\varphi_0} \qquad (6)$$

Der Nenner entwickelt giebt:

$$\cos\frac{y}{r} - tang\frac{x}{r}\,t = 1 - \frac{y^2}{2\,r^2} - \left(\frac{x}{r} + \frac{x^3}{3\,r^3}\right)t = 1 - \frac{x}{r}\,t - \frac{y^2}{2\,r^2} - \frac{x^3}{3\,r^3}\,t$$

davon die Reciproke entwickelt, wird:

$$1 + \left(\frac{x}{r}\,t + \frac{y^2}{2\,r^2} + \frac{x^3}{3\,r^3}\,t\right) + \left(\frac{x^2}{r^2}\,t^2 + \frac{x\,y^2}{r^3}\,t\right) + \frac{x^3}{r^3}\,t^3 \qquad (7)$$

Wenn man $\sin\frac{y}{r} = \frac{y}{r} - \frac{y^3}{6\,r^3}$ von (6) damit multipliziert und alle Glieder ordnet, so erhält man:

$$tang\,\lambda = \sec\varphi_0\left\{\frac{y}{r} + \frac{y\,x}{r^2}\,t + \frac{y^3}{3\,r^3} + \frac{y\,x^2}{r^3}\,t^2 + \frac{y\,x^3}{3\,r^4}\,t\,(1 + 3\,t^2) + \frac{5}{6}\,\frac{y^3\,x}{r^4}\,t\right\} \qquad (8)$$

Da $\lambda = tang\,\lambda - \frac{(tang\,\lambda)^3}{3}$, braucht man in erster Näherung von (8):

$$tang\,\lambda = \sec\varphi_0\left(\frac{y}{r} + \frac{y\,x}{r^2}\,t + \ldots\right)$$

also $$(tang\,\lambda)^3 = \sec^3\varphi_0\left(\frac{y^3}{r^3} + \frac{3\,y^3\,x}{r^4}\,t + \ldots\right)$$

$$\frac{(tang\,\lambda)^3}{3} = \sec\varphi_0\left(\frac{y^3}{3\,r^3}(1 + t^2) + \frac{x\,y^3}{r^4}\,t\,(1 + t^2)\right)$$

Dieses vom Vorhergehenden (8) abgezogen giebt:

$$\lambda = \sec\varphi_0\left\{\frac{y}{r} + \frac{y\,x}{r^2}\,t - \frac{y^3}{3\,r^3}\,t^2 + \frac{y\,x^2}{r^3}\,t^2 + \frac{y\,x^3}{3\,r^4}\,t\,(1 + 3\,t^2) - \frac{y^3\,x\,t}{6\,r^4}(1 + 6\,t^2)\right\} \qquad (9)$$

Um umgekehrt x und y als Funktion von $\Delta\varphi$ und λ darzustellen, kann man verschiedene Wege einschlagen; aus Fig. 1. S. 431 hat man:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{r}\right) + \cos\varphi_0\cos(90° - \varphi) + \sin\varphi_0\sin(90° - \varphi)\cos(180° - \lambda)$$

$$\sin\frac{x}{r} = \cos\varphi_0\sin\varphi - \sin\varphi_0\cos\varphi\cos\lambda$$

$$\sin\frac{x}{r} = \cos\varphi_0\sin\varphi - \sin\varphi_0\cos\varphi\left(1 - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{24}\right)$$

$$\sin\frac{x}{r} = \sin(\varphi - \varphi_0) + \sin\varphi_0\cos\varphi\left(\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{24}\right)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$$

$$\cos\varphi = \cos\varphi_0 - \Delta\varphi\sin\varphi_0 - \frac{\Delta\varphi^2}{2}\cos\varphi_0$$

$$\sin\varphi_0\cos\varphi = \cos^2\varphi_0\left(t - \Delta\varphi\,t^2 - \frac{\Delta\varphi^2}{2}\,t\right)$$

$$\sin\frac{x}{r} = \sin\Delta\varphi + \cos^2\varphi_0\,t\left(1 - \Delta\varphi\,t - \frac{\Delta\varphi^2}{2}\right)\left(\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{24}\right)$$

$$\sin\frac{x}{r} = \sin\Delta\varphi + \cos^2\varphi_0\, t\left(\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{24} - \Delta\varphi\, t\,\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\Delta\varphi^2\lambda^2}{4}\right)$$

erste Näherung $\quad \sin\frac{x}{r} = \Delta\varphi + \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi_0\, t$

$$\frac{1}{6}\left(\sin\frac{x}{r}\right)^3 = \frac{\Delta\varphi^3}{6} + \frac{3}{12}\Delta\varphi^2\lambda^2\cos^2\varphi_0\, t$$

Da $\frac{x}{r} = \sin\frac{x}{r} + \frac{1}{6}\left(\sin\frac{x}{r}\right)^3$ und $\sin\Delta\varphi = \Delta\varphi - \frac{\Delta\varphi^3}{6}$, so wird aus dem Vorstehenden, da die Glieder mit $\Delta\varphi^3$ und $\Delta\varphi^2\lambda^2$ fortfallen:

$$\frac{x}{r} = \Delta\varphi + \frac{\lambda^2\cos^2\varphi_0\, t}{2} - \Delta\varphi\,\frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi_0\, t^2 - \frac{\lambda^4}{24}\cos^2\varphi_0\, t \tag{10}$$

Um $\frac{y}{r}$ zu erhalten, nehmen wir von Fig. 1.:

$$\operatorname{tang}\varphi\sin\varphi_0 = -\cos\varphi_0\cos\lambda + \sin\lambda\operatorname{cotg}\frac{y}{r}$$

$$\operatorname{tang}\frac{y}{r} = \frac{\sin\lambda}{\cos\varphi_0(\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\varphi_0 + \cos\lambda)} \tag{11}$$

$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$, $\operatorname{tang}\varphi_0 = t$ giebt nach S. 167:

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\varphi_0 + \Delta\varphi(1+t^2) + \Delta\varphi^2 t(1+t^2) + \frac{\Delta\varphi^3}{3}(1+4t^2+3t^4)$$

$$\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\varphi_0 = t^2 + \Delta\varphi\, t(1+t^2) + \Delta\varphi^2 t^2(1+t^2) + \frac{\Delta\varphi^3}{3}t(1+4t^2+3t^4)$$

und da $\cos\lambda = 1 - \frac{\lambda^2}{2} + \ldots$ hat man den Nenner von (11):

$$1 + t^2 + \Delta\varphi\, t(1+t^2) + \Delta\varphi^2 t^2(1+t^2) + \frac{\Delta\varphi^3}{3}t(1+4t^2+3t^4) - \frac{\lambda^2}{2}$$

und da $1 + t^2 + \frac{1}{\cos^2\varphi_0}$, wird nun (11):

$$\operatorname{tang}\frac{y}{r} = \sin\lambda\cos\varphi_0\frac{1}{1 + \Delta\varphi\, t + \Delta\varphi^2 t^2 + \frac{\Delta\varphi^3}{3}\cos^2\varphi_0\, t(1+4t^2+3t^4) - \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi_0}$$

Die Reciproke des Nenners entwickelt

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \text{ giebt:}$$

$$\operatorname{tang}\frac{y}{r} = \sin\lambda\cos\varphi_0\left\{1 - \Delta\varphi\, t + \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi_0 - \frac{\Delta\varphi^3}{3}t - \Delta\varphi\,\lambda^2\cos^2\varphi_0\, t\right\}$$

$$\sin\lambda = \lambda - \frac{\lambda^3}{6} \text{ bringt:}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang}\frac{y}{r} = \lambda\cos\varphi_0\Big\{1 - \Delta\varphi\, t + \frac{\lambda^2}{6}\cos^2\varphi_0(2-t^2) - \frac{\Delta\varphi^3}{3}t \\ + \Delta\varphi\,\frac{\lambda^2}{6}\cos^2\varphi_0\, t(-5+6t^2)\Big\}\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Dann der Übergang von $\operatorname{tang}\frac{y}{r}$ auf $\frac{y}{r}$ bringt noch:

$$\operatorname{tang}\frac{y}{r} = \lambda\cos\varphi_0 - \Delta\varphi\,\lambda\cos\varphi_0\, t$$

$$\frac{1}{3}\left(tang\frac{y}{r}\right)^3 = \frac{\lambda^3 \cos^3 \varphi_0}{3} - \Delta\varphi\, \lambda^3 \cos^3 \varphi_0\, t.$$

Diese beiden Glieder oben bei (12) abgezogen geben:

$$\frac{y}{r} = \lambda \cos \varphi_0 \left\{1 - \Delta\varphi\, t - \frac{\lambda^2}{6}\cos^2\varphi_0\, t^2 - \frac{\Delta\varphi^3}{3} t + \Delta\varphi \frac{\lambda^2}{6} t\right\} \tag{13}$$

So haben wir nun in (5), (9), (10), (13) alle Formeln zur Bestimmung von $\Delta\varphi$ und λ aus x, y und umgekehrt.

Diese vier Reihen sind unmittelbar aus geschlossenen Formeln der sphärischen Trigonometrie abgeleitet, und zur Probe kann man sie auch noch gegenseitig verbinden. In diesem Sinne wollen wir die Gleichung (9) umkehren, d. h. nach $\frac{y}{r}$ auflösen. Man findet durch Reciprok-Entwicklung aus (9):

$$\frac{y}{r} = \lambda \cos \varphi_0 \left\{1 - \frac{x}{r} t + \frac{y^2}{3\,r^2} t^2 - \frac{x^3}{3\,r^3} t + \frac{x\,y^2}{6\,r^3} t\,(1 + 2\,t^2)\right\}$$

Hier ist nach (10) und (13):

$$-\frac{x}{r} t = -\Delta\varphi\, t - \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi_0\, t^2 + \Delta\varphi\, \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi_0\, t^3$$

$$\frac{y}{r} = \lambda \cos\varphi_0 - \Delta\varphi\, \lambda \cos\varphi_0\, t$$

$$\frac{y^2}{3\,r^2} = \frac{\lambda^2}{3}\cos^2\varphi_0 - \frac{2}{3}\Delta\varphi\, \lambda^2 \cos^2\varphi_0\, t$$

$$\frac{x^3}{3\,r^3} = \frac{\Delta\varphi^3}{3}, \qquad \frac{x\,y^2}{6\,r^3} = \frac{\Delta\varphi}{6} y^2 \cos^2\varphi_0$$

Dieses alles oben eingesetzt wird geben:

$$\frac{y}{r} = \lambda \cos\varphi_0 \left\{1 - \Delta\varphi\, t - \frac{\lambda^2}{6}\cos^2\varphi_0\, t^2 - \frac{\Delta\varphi^3}{3} t + \Delta\varphi\, \frac{\lambda^2}{6}\cos^2\varphi_0\, t\,(1 + t^2)\right\} \tag{14}$$

Wegen $\cos^2\varphi_0\,(1 + t^2) = 1$, ist dieses (14) mit (13) identisch.

Wir wollen auch noch die zwei Gleichungen (5) und (9) zusammennehmen, um eine Auflösung nach $\frac{x}{r}$ daraus abzuleiten. Jedenfalls geben dieselben in erster Näherung:

$$\frac{x}{r} = \Delta\varphi \quad \text{und} \quad \frac{y}{r} = \lambda \cos\varphi_0$$

$$\frac{x\,y}{r^2} = \Delta\varphi\, \lambda \cos\varphi_0 \qquad \frac{y^2}{r^2} = \lambda^2 \cos^2\varphi_0$$

also aus (5):

$$\frac{x}{r} = \Delta\varphi + \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi_0\, t \qquad \frac{y}{r} = \lambda\cos\varphi_0 - \Delta\varphi\, \lambda\cos\varphi_0\, t$$

$$\frac{x\,y^2}{r^3} = \Delta\varphi\, \lambda^2 \cos^2\varphi_0 \qquad \frac{y^2}{r^2} = \lambda^2\cos^2\varphi_0 - 2\,\Delta\varphi\, \lambda^2\cos^2\varphi_0\, t$$

Damit aus (9) bis zur dritten Ordnung:

$$\frac{x}{r} = \Delta\varphi + \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi_0\, t - \frac{\Delta\varphi}{2}\lambda^2\cos^2\varphi_0\, t^2$$

Um zur 4ten Ordnung zu gelangen, braucht man aus (14) genauer als vorher:

$$\frac{y^2}{r^2} = \lambda^2\cos^2\varphi_0 - 2\,\Delta\varphi\, \lambda^2\cos^2\varphi_0\, t - \frac{\lambda^4}{3}\cos^4\varphi_0\, t^2 + \Delta\varphi^2\, \lambda^2\cos^2\varphi_0\, t^2$$

und $$\frac{x\,y^2}{r^3} = \varDelta\,\varphi\,\lambda^2 \cos^2\varphi - 2\,\varDelta\,\varphi^2\,\lambda^2 \cos^2\varphi_0\,t + \frac{\lambda^4}{2}\cos^4\varphi_0\,t$$

die letzten Glieder in (5) sind genügend:

$$\frac{x^2\,y^2}{r^4} = \varDelta\,\varphi^2\,\lambda^2 \cos^2\varphi_0 \qquad \frac{y^4}{r^4} = \lambda^4 \cos^4\varphi_0$$

Wenn man mit alle diesem die Gleichung (5) nach $\frac{x}{r}$ auflöst, so findet man, dass die drei Glieder mit $\varDelta\,\varphi^2\,\lambda^2$ sich aufheben und dass im übrigen die frühere Gleichung (10) wieder herauskommt.

Dadurch sind die vier Gleichungen (5), (9), (10), (13) auch unter sich nochmals versichert.

Es fehlt noch die Meridian-Konvergenz, welche auf verschiedenen Wegen erhalten werden kann.

Das Dreieck CAP Fig. 1. S. 431 giebt:

$$\cot g\,\varphi_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{r}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\cos\frac{y}{r} + \sin\frac{y}{r}\cot g\,\gamma$$

$$\cot g\,\varphi_0 \cos\frac{x}{r} = \sin\frac{x}{r}\cos\frac{y}{r} + \sin\frac{y}{r}\cot g\,\gamma$$

$$\tan g\,\gamma = \sin\frac{y}{r}\,t\,\frac{1}{\cos\frac{x}{r} - \left(\sin\frac{x}{r}\cos\frac{y}{r}\right)t}$$

$$\tan g\,\gamma = \sin\frac{y}{r}\,t\,\frac{1}{1 - \frac{x^2}{r^2} - \left(\frac{x}{r} - \frac{x^3}{6\,r^3}\right)\left(1 - \frac{y^2}{2\,r^2}\right)t}$$

$$\tan g\,\gamma = \frac{\left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6\,r^3}\right)t}{1 - \frac{x}{r}\,t - \frac{x^2}{2\,r^2} + \frac{x^3}{6\,r^3}\,t + \frac{x\,y^2}{2\,r^3}\,t + \frac{x^4}{24\,r^4}}$$

$$\tan g\,\gamma = \left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6\,r^3}\right)t\left\{1 + \frac{x}{r}\,t + \frac{x^2}{2\,r^2}(1 + 2\,t^2) - \frac{x\,y^2}{2\,r^3}\,t + \frac{x^3\,t}{6\,r^3}(5 + 6\,t^2)\right\}$$

$$\tan g\,\gamma = \frac{y}{r}\,t\left\{1 + \frac{x}{r}\,t - \frac{y^2}{6\,r^2} + \frac{x^2}{2\,r^2}(1 + 2\,t^2) - \frac{2}{3}\,\frac{x\,y^2}{r^3}\,t + \frac{x^3\,t}{6\,r^3}(5 + 6\,t^2)\right\}$$

Durch den Übergang von $\tan g\,\gamma$ auf γ hat man:

$$\gamma = \frac{y}{r}\,t + \frac{x\,y}{r^2}\,t^2, \qquad \gamma^3 = \frac{y^3}{r^3}\,t^3 + \frac{3\,y^3\,x}{r^4}\,t^4$$

$$-\frac{\gamma^3}{3} = \frac{y}{r}\,t\left\{-\frac{y^2}{3\,r^2}\,t^2 - \frac{x\,y^2}{r^3}\,t^3\right\}$$

$$\gamma = \frac{y}{r}\,t\left\{1 + \frac{x}{r}\,t - \frac{y^2}{6\,r^2}(1 + 2\,t^2) + \frac{x^2}{2\,r^2}(1 + 2\,t^2) - \frac{x\,y^2}{3\,r^3}\,t\,(2 + 3\,t^2) + \frac{x^3\,t}{6\,r^3}(5 + 6\,t^2)\right\} \tag{15}$$

Um auch γ in φ und λ auszudrücken, nehmen wir aus Fig. 1. S. 431 die sphärisch-trigonometrische Gleichung:

$$\cot g\,\varphi_0 \cos\varphi = \sin\varphi\cos\lambda + \sin\lambda\cot g\,\gamma$$



oder
$$tang\,\gamma = \frac{\sin\lambda \sin\varphi_0}{\cos\varphi_0 \cos\varphi + \sin\varphi_0 \sin\varphi\left(1-\frac{\lambda^2}{2}\right)}$$

$$tang\,\gamma = \frac{\sin\lambda \sin\varphi_0}{\cos(\varphi-\varphi_0) - \frac{\lambda^2}{2}\sin\varphi\sin\varphi_0}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \varDelta\varphi \quad , \quad \sin\varphi = \sin\varphi_0 + \varDelta\varphi\cos\varphi_0$$
$$\sin\varphi\sin\varphi_0 = \sin^2\varphi_0 + \varDelta\varphi\sin\varphi_0\cos\varphi_0$$

$$tang\,\gamma = \frac{\sin\lambda\sin\varphi_0}{1-\frac{\varDelta\varphi^2}{2}-\frac{\lambda^2}{2}\sin^2\varphi_0-\varDelta\varphi\frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi_0\,t}$$

$$tang\,\gamma = \sin\lambda\sin\varphi_0\left(1+\frac{\varDelta\varphi^2}{2}+\frac{\lambda^2}{2}\sin^2\varphi_0+\varDelta\varphi\frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi_0\,t\right)$$

$$tang\,\gamma = \lambda\sin\varphi_0\left(1-\frac{\lambda^2}{6}+\frac{\varDelta\varphi^2}{2}+\frac{\lambda^2}{2}\sin^2\varphi+\varDelta\varphi\frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi_0\,t\right)$$

$$tang\,\gamma = \lambda\sin\varphi_0\left(1+\frac{\varDelta\varphi_2}{2}+\frac{\lambda^2}{6}(3\sin^2\varphi_0-1)+\varDelta\varphi\frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi_0\,t\right)$$

$$\gamma = \lambda\sin\varphi_0 + \ldots$$
$$\gamma^3 = \lambda^3\sin^3\varphi_0 + \ldots$$

$$\gamma = \lambda\sin\varphi_0\left(1+\frac{\varDelta\varphi^2}{2}-\frac{\lambda^2}{6}\cos^2\varphi_0+\varDelta\varphi\frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi_0\,t\right) \tag{16}$$

Zur Probe kann man auch noch die Formeln (15) und (16) gegenseitig in einander umwandeln. Wir wollen zu diesem Zwecke (15) und (16) nochmals aufgelöst schreiben:

$$\gamma = \frac{y}{r}t+\frac{xy}{r^2}t^2-\frac{y^3}{6r^3}t(1+2t^2)+\frac{x^2y}{2r^3}t(1+2t^2)-\frac{xy^3}{3r^4}t^2(2+3t^2)+\frac{x^3yt}{6r^4}(5+6t^2) \tag{17}$$

$$\gamma = \lambda\sin\varphi_0+\frac{\varDelta\varphi^2}{2}\lambda\sin\varphi_0-\frac{\lambda_3}{6}\sin\varphi_0\cos^2\varphi_0+\varDelta\varphi\frac{\lambda^3}{2}\sin\varphi_0\cos^2\varphi_0\,t \tag{18}$$

Um (18) in (17) umzuwandeln, hat man nach (9):

$$\lambda\sin\varphi_0 = \frac{y}{r}t+\frac{xy}{r^2}t^2-\frac{y^3}{3r^3}t^3+\frac{x^2y}{r^3}t^3+\frac{x^3y}{3r^4}t^2(1+3t^2)-\frac{xy^2}{6r^4}t^2(1+6t^2)$$

ferner von (5):

$$\varDelta\varphi = \frac{x}{r}-\frac{y^2}{2r^2}t+\ldots \qquad \varDelta\varphi^2 = \frac{x^2}{r^2}-\frac{xy^2}{r^3}t$$

$$\varDelta\varphi^2\lambda\sin\varphi_0 = \frac{x^2y}{r^3}t-\frac{xy^3}{r^4}t^2+\frac{x^3y}{r^4}t^2$$

$$\lambda^3\sin^3\varphi_0 = \frac{y^3}{r^3}t^3+\frac{3xy^3}{r^4}t^4 \quad \text{und} \quad \frac{y^3}{6}\sin\varphi_0\cos^2\varphi_0 = \frac{y^3}{6r^3}t+\frac{xy^3t^2}{2r^4}$$

$$\frac{\varDelta\varphi\,\lambda^3}{2}\sin\varphi_0\cos^2\varphi_0\,t = \frac{xy^3}{2r^4}t^2$$

Wenn man alles dieses in (18) einsetzt, so wird man nach kurzem Zusammenfassen (17) erhalten.

In derselben Weise kann man auch (17) in (18) überführen, indem man zuerst $\frac{y}{r} t = \lambda \sin \varphi_0 (1 - \ldots)$ aus (13) nimmt, ferner entwickelt:

$$\frac{xy}{r^2} t = \Delta\varphi \lambda \sin\varphi_0 - \Delta\varphi^2 \lambda \sin\varphi_0 t + \frac{\lambda^2}{2} \sin\varphi_0 \cos^2\varphi_0 t - \frac{7}{6} \Delta\varphi \lambda^2 \sin\varphi_0 \cos^2\varphi_0 t^2$$

$$\frac{y^3}{r^3} = \lambda^3 \cos^3 \varphi_0 - 3 \Delta\varphi \lambda^3 \cos^3 \varphi_0 t \text{ u. s. w.}$$

Alles dieses in (17) eingesetzt und geordnet, wobei das Glied mit $\Delta \varphi^3 \lambda \sin \varphi_0 t$ verschwindet, wird den Übergang auf (18) richtig geben, so dass nun die Formeln (17) und (18) bezw. die beiden (15) und (16) für γ in allen Beziehungen kontrolliert sind.

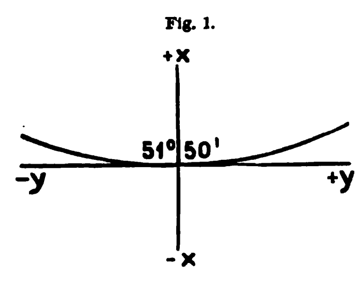
Unmittelbare Anwendungen werden diese sphärischen Formeln nicht geben, ebensowenig als z. B. bei den Soldnerschen Coordinaten die sphärischen Reihen von § 53. zur unmittelbaren Anwendung brauchbar waren. Die entsprechenden Formeln für das Ellipsoid werden wir im folgendem § 83. neu und selbständig entwickeln, aber nur bis zur dritten Ordnung, weil die Glieder 4ter Ordnung, welche wir hier nur sphärisch entwickelt haben, auch den sphäroidischen Gliedern 3ter Ordnung noch angehängt werden können.

§ 83. Queraxige sphäroidische Coordinaten.

Dessauer Coordinaten.

Die Lage des Coordinaten-Systems haben wir wie auch im vorigen § 82 so angenommen, wie in Fig. 1. angedeutet ist, dass nämlich $+x$ nach Norden, $+y$ nach Osten geht. Die Hauptaxe oder eigentliche Axe ist die y-Axe, welche den mittleren Parallelkreis berührt, dessen Breite in der nachfolgenden Anwendung mit $\varphi_0 = 51° 50'$ angenommen werden wird.

Fig. 1.



Wir gehen aus von den Formeln (25), (26) (27) § 74. S. 395, welche gelten für den Übergang von einem Punkte in der Breite φ, Länge Null, mit der geodätischen Linie s, die unter dem Azimut α ausgeht zu einem Punkte mit der Breite φ', Länge λ und Endazimut α', also Meridian-Konvergenz $\alpha' - \alpha$.

Jene Formeln haben wir zweifach anzuwenden, erstens auf den Übergang von O nach B und zweitens von B nach A in Fig. 1. § 82 S. 431.

Der erste Übergang von φ_0 nach φ, mit $s = x$, $\alpha = 90°$ giebt mit $u = 0$, $v = \frac{y}{N_0}$, $t = t_0$ bis zur 3ten Ordnung:

$$\text{I} \begin{cases} \dfrac{\varphi_1 - \varphi_0}{V_0^2} = -\dfrac{y}{2 N_0^2} t_0 & (1) \\[2ex] \lambda_1 \cos \varphi_0 = \dfrac{y}{N_0} - \dfrac{y^3}{3 N_0^3} t_0^2 & (2) \\[2ex] \gamma_1 = \dfrac{y}{N_0} t_0 - \dfrac{y^3}{6 N_0^3} t_0 (1 + 2 t_0^2 + \eta_0^2) & (3) \end{cases}$$

Die zweite Anwendung geht vom Punkte $\varphi_1, \lambda_1, \gamma_1$ mit $\alpha = \gamma$, und $s = x$ nach dem Punkte φ, λ_2 gegen (φ_1, λ_2) und $\gamma - \gamma_1$ als Meridian-Konvergenz. Dieses giebt aus (25), (26), (27) S. 395 bis zur dritten Ordnung einschliesslich:

$$\text{II}\left\{\begin{aligned}
&\frac{\varphi-\varphi_1}{V_1^2} = \frac{x}{N_1}\left(1-\frac{y^2}{2N_0^2}t_0^2\right) - \frac{3}{2}\frac{x^2}{N_1^2}\eta_1^2 t_1 - \frac{x^3}{2N_1^3}\eta_1^2(1-t_1^2+\eta_1^2-5\eta_1^2 t_1^2) \quad (4)\\
&\lambda_2 \cos\varphi_1 = \frac{x}{N_1}\frac{y}{N_0}t_0 + \frac{x^2}{N_1^2}\frac{y}{N_0}t_0 t_1 \quad (5)\\
&\gamma-\gamma_1 = \frac{x}{N_1}\frac{y}{N_0}t_0 t_1 + \frac{x}{2N_1^2}\frac{y}{N_0}t_0(1+2t_1^2+\eta_1^2) \quad (6)
\end{aligned}\right.$$

Ehe wir diese beiden Gruppen von Gleichungen addieren, müssen wir die N_1 auf N_0, t_1 auf t_0 u. s. w. reduzieren, auch wollen wir überall die N durch V ausdrücken, denn es ist allgemein $N = c : V$.

Dazu hat man nach § 34. S. 208, Gleichung (1):

$$\frac{N_0}{N_1} = \frac{V_1}{V_0} = 1 - \frac{\varphi_1-\varphi_0}{V^2}\eta^2 t$$

also wegen (1):

$$\frac{V_1}{V_0} = 1 + \frac{y^2}{2N_0^2}\eta_0^2 t_0^2 = 1 + \frac{y^2 V_0^2}{2c^2}\eta_0^2 t_0^2$$

$$\frac{V_1^2}{N_1} = \frac{V_1^3}{c} = \frac{V_0^3}{c}\left(1+\frac{3}{2}\frac{y^2 V_0^2}{c^2}\eta_0^2 t_0^2\right) \quad (7)$$

Zur Reduktion von $\cos\varphi_1$ auf $\cos\varphi_0$ und $\tan g\,\varphi_1$ auf $\tan g\,\varphi_0$ hat man wegen (1):

$$\varphi_1 = \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) = \varphi_0 - \frac{y^2}{2c^2}t_0$$

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_0 + \frac{y^2}{2r^2}t_0 \sin\varphi_0 \quad (8)$$

$$\tan g\,\varphi_1 = \tan g\,\varphi_0 - \frac{y^2}{2c^2}t_0(1+t_0^2)$$

$$\text{d. h.} \qquad t_1 = t_0 - \frac{y^2}{2c^2}t_0(1+t_0^2) \quad (8a)$$

Damit giebt die Gruppe II mit Beschränkung überall auf 3te Ordnung, wobei in den höheren Gliedern schlechthin t statt t_0 u. s. w. geschrieben wird:

$$\text{IIa}\left\{\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}\varphi-\varphi_1 = \frac{x}{c}V_0^3\left(1+\frac{3}{2}\frac{y^2}{c^2}V^2\eta^2t^2\right)\left(1-\frac{y^2}{2c^2}V^2t^2\right)\\
-\frac{3}{2}\frac{x^2}{c^2}V^4\eta^2 t - \frac{x^3}{2c^3}V^5\eta^2(1-t^2+\eta^2-5\eta^2t^2)\end{aligned}\right\} \quad (9)\\
&\lambda_2\left(\cos\varphi_0 + \frac{y^2}{2c^2}\cdots\right) = \frac{xy}{c^2}V^2 t + \frac{x^2y}{c^3}V^3 t^2 \quad (10)\\
&\gamma-\gamma_1 = \frac{xy}{c^2}V^2t^2 + \frac{x^2y}{2c^3}V^3 t(1+2t^2+\eta^2) \quad (11)
\end{aligned}\right.$$

Wenn man dieses IIa mit dem ursprünglichen I zusammennimmt, auch überall (7) berücksichtigt, so erhält man, indem in den höheren Gliedern nur noch t statt t_0 u. s. w. geschrieben wird:

$$\text{III}\left\{\begin{aligned}
&\varphi-\varphi_0=\frac{x}{c}\,V_0{}^3-\frac{y^2}{2\,c^2}\,V^4\,t-\frac{3\,x^2}{2\,c^2}\,V^4\,\eta^2\,t \\
&\qquad -\frac{x^3}{2\,c^3}\,V^5\,\eta^2\,(1-t^2+\eta^2-5\,\eta^2\,t^2)-\frac{x\,y^2}{2\,c^3}\,V^5\,t^2\,(1-3\,\eta^2) && (12)\\
&\lambda\cos\varphi_0=\frac{y}{c}\,V_0+\frac{x\,y}{c^2}\,V^2\,t+\frac{x^2\,y}{c^3}\,V^3\,t^2-\frac{y^3}{3\,c^3}\,V^3\,t^2 && (13)\\
&\gamma=\frac{y}{c}\,V_0\,t_0+\frac{x\,y}{c^2}\,V^2\,t^2+\frac{x^2\,y}{2\,c^3}\,V^3\,t\,(1+2\,t^2+\eta^2) \\
&\qquad -\frac{y^3}{6\,c^3}\,V^3\,t\,(1+2\,t^2+\eta^2) && (14)
\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen entsprechen den früheren sphärischen Gleichungen (5), (9) (15) im vorigen § 82. S. 432, 433, 436, bis zur dritten Ordnung.

Es handelt sich nun darum, die Gleichungen (12) und (13) nach x und y aufzulösen, was durch fortgesetzte Näherung geschehen muss. Dabei wollen wir uns zur Bequemlichkeit erlauben, statt V_0 und t_0 u. s. w. kurz V und t u. s. w. zu schreiben; während also in (12)—(14), wenigstens in den ersten Gliedern, noch V_0 sowie t_0 und $\cos\varphi_0$ geschrieben war, können wir jetzt, da keine Verwechslung mehr zu befürchten ist, auch in den Gliedern erster Ordnung die Vereinfachung V und t annehmen; wir dürfen aber zum Schlusse nicht vergessen, dass alles dieses sich auf den Ausgangspunkt φ_0 der Breiten beziehen muss.

Gehen wir nach dieser Zwischenbemerkung über zu der indirekten Auflösung der Gleichungen (12) und (13), so haben wir jedenfalls in erster Näherung:

$$\frac{x}{c}=\frac{\varphi-\varphi_0}{V^3}=\frac{\Delta\varphi}{V^3}\quad\text{und}\quad\frac{y}{c}=\frac{\lambda\cos\varphi}{V}\tag{15}$$

$$\frac{x^2}{c^2}=\frac{\Delta\varphi^2}{V^6}\qquad\frac{y^2}{c^2}=\frac{\lambda^2\cos^2\varphi}{V^2}\qquad\frac{x\,y}{c^2}=\frac{\Delta\varphi\,\lambda\cos\varphi}{V^4}$$

Diese Näherungen in (12) und (13) eingesetzt geben bis zur 2ten Ordnung:

$$\frac{x}{c}=\frac{\Delta\varphi}{V^3}+\frac{\lambda^2\cos^2\varphi}{2\,V}\,t+\frac{3}{2}\,\frac{\Delta\varphi^2}{V^5}\,\eta^2\,t\tag{16}$$

$$\text{und}\quad\frac{y}{c}=\frac{\lambda\cos\varphi}{V}-\frac{\Delta\varphi\,\lambda\cos\varphi}{V^3}\,t\tag{17}$$

Nun nochmals, bis zur 3ten Ordnung aus (16) und (17):

$$\frac{x^2}{c^2}=\frac{\Delta\varphi^2}{V^6}+\frac{\Delta\varphi\,\lambda^2\cos^2\varphi\,t}{V^4}+3\,\frac{\Delta\varphi^3}{V^8}\,\eta^2\,t\tag{18}$$

$$\frac{y^2}{c^2}=\frac{\lambda^2\cos^2\varphi}{V^2}-\frac{2\,\Delta\varphi\,\lambda^2\cos^2\varphi}{V^4}\,t\tag{19}$$

$$\frac{x\,y}{c^2}=\frac{\Delta\varphi\,\lambda\cos\varphi}{V^4}+\frac{\lambda^3}{2\,V^2}\cos^3\varphi\,t-\frac{\Delta\varphi^2\,\lambda\cos\varphi\,t}{2\,V^6}\,(2-3\,\eta^2)\tag{20}$$

Setzt man diese drei Ausdrücke in (12) und (13) ein, und nimmt man dabei für die Glieder 3ter Ordnung kurz die Näherungen (15), so bekommt man:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x}{c}=\frac{\Delta\varphi}{V^3}&+\frac{\lambda^2}{2\,V}\cos^2\varphi\,t-\frac{\Delta\varphi\,\lambda^2}{2\,V^3}\cos^2\varphi\,t^2+\frac{3}{2}\,\frac{\Delta\varphi^2}{V^5}\,\eta^2\,t \\
&-\frac{\Delta\varphi^3}{2\,V^7}\,\eta^2\,(-1+t^2-\eta^2-4\,\eta^2\,t^2)
\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

$$\frac{y}{c} = \frac{\lambda \cos \varphi}{V} - \frac{\Delta \varphi \lambda \cos \varphi\, t}{V^3} - \frac{\lambda^3}{6\, V} \cos^3 \varphi\, t^2 - \frac{3}{2} \frac{\Delta \varphi^2 \lambda}{V^5} \cos \varphi\, t^2 \eta^2 \tag{22}$$

Endlich kann man auch noch die Meridian-Konvergenz in (14) durch (16)—(22) als Funktion von φ und λ darstellen:

$$\gamma = \lambda \sin \varphi - \frac{\lambda^3\, V^2}{6} \sin \varphi \cos^2 \varphi + \frac{\Delta \varphi^2 \lambda \sin \varphi}{2\, V^2} \tag{23}$$

Zur Probe kann man auch wieder dieses (23) mit Hilfe von (12) und (13) in (14) zurückverwandeln, was stimmen wird.

Nun haben wir in (12)—(14) und in (21)—(23) alle nötigen Formeln bis zur 3ten Ordnung.

Dazu wollen wir auch noch die rein sphärisch entwickelten Glieder 4ter Ordnung zusetzen, welche im vorigen § 82. unter den Nummern (5), (9), (15) und (10), (13), (16) enthalten sind. Wenn wir ausserdem auch überall die nötigen ϱ zusetzen, so bekommen wir folgende sechs Gleichungen, wobei nochmals zu beachten ist, dass wir zur Bequemlichkeit nur V und t statt der früheren V_0 und t_0 schreiben und dass $\varphi - \varphi_0 = \Delta \varphi$ gesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned} \Delta \varphi = {} & \frac{x}{c} V^3 \varrho - \frac{y^2}{2\, c^2} V^4\, t\, \varrho - \frac{3}{2} \frac{x^2}{c^2} V^4 \eta^2\, t\, \varrho + \frac{x^3}{2\, c^3} V^5 \eta^2 (-1 + t^2 - \eta^2 + 5\, \eta^2 t^2) \varrho \\ & - \frac{x\, y^2}{2\, c^3} V^5\, t^2 (1 - 3\, \eta^2) \varrho - \frac{x^2 y^2}{2\, c^4} t^3 \varrho + \frac{y^4}{24\, c^4} t\, (1 + 3\, t^2) \varrho \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda \cos \varphi = {} & \frac{y}{c} V \varrho + \frac{x\, y}{c^2} V^2\, t\, \varrho + \frac{x^2\, y}{c^3} V^3\, t^2 \varrho - \frac{y^3}{3\, c^3} V^3\, t^2 \varrho + \frac{x^3\, y}{3\, c^4} t\, (1 + 3\, t^2) \varrho \\ & - \frac{x\, y^3}{6\, c^4} t\, (1 + 6\, t^2) \varrho \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma = {} & \frac{y}{c} V t \varrho + \frac{x\, y}{c^2} V^2\, t^2 \varrho + \frac{x^2\, y}{2\, c^3} V^3\, t (1 + 2\, t^2 + \eta^2) \varrho - \frac{y^3}{6\, c^3} V^3\, t\, (1 + 2\, t^2 + \eta^2) \varrho \\ & - \frac{x\, y^3}{3\, c^4} t^2 (2 + 3\, t^2) \varrho + \frac{x^3\, y}{6\, c^4} t^2 (5 + 6\, t^2) \varrho \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned} x = {} & \frac{\Delta \varphi}{\varrho} \frac{c}{V^3} + \frac{\lambda^2}{2\, \varrho^2} \frac{c}{V} \cos^2 \varphi\, t - \frac{\Delta \varphi\, \lambda^2}{2\, \varrho^3} \frac{c}{V^3} \sin^2 \varphi + \frac{3}{2} \frac{\Delta \varphi^2}{\varrho^2} \frac{c}{V^5} \eta^2\, t \\ & - \frac{\Delta \varphi^3}{2\, \varrho^3} \frac{c}{V^7} \eta^2 (-1 + t^2 - \eta^2 - 4\, \eta^2\, t^2) - \frac{\lambda^4\, c}{24\, \varrho^4} \cos^2 \varphi\, t \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} y = {} & \frac{\lambda \cos \varphi}{\varrho} \frac{c}{V} - \frac{\Delta \varphi\, \lambda \cos \varphi}{\varrho^2} \frac{c}{V^3} t - \frac{\lambda^3}{6\, \varrho^3} \frac{c}{V} \cos^3 \varphi\, t^2 - \frac{3}{2} \frac{\Delta \varphi^2 \lambda}{\varrho^3} \frac{c}{V^5} \cos \varphi\, t^2\, \eta^2 \\ & - \frac{\Delta \varphi^3\, \lambda\, c \sin \varphi}{3\, \varrho^4} + \frac{\Delta \varphi\, \lambda^3\, c \sin \varphi}{6\, \varrho^4} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\gamma = \lambda \sin \varphi - \frac{\lambda^3\, V^2}{6\, \varrho^2} \sin \varphi \cos^2 \varphi + \frac{\Delta \varphi^2 \lambda \sin \varphi}{2\, \varrho^2\, V^2} + \frac{\Delta \varphi\, \lambda^3}{2\, \varrho^3} \sin^2 \cos \varphi \tag{29}$$

Man kann die Coëfficienten dieser Formeln teilweise auch in mehr anschaulicher Form schreiben, denn es ist

$$\frac{V^3}{c} = \frac{1}{M} \qquad \frac{V}{c} = \frac{1}{N} \qquad \frac{V^4}{c^2} = \frac{1}{r^2}$$

wobei M und N die Haupt-Krümmungs-Halbmesser und r der mittlere Krümmungs-Halbmesser sind.

Bei den Gliedern 4ter Ordnung, welche nur sphärisch entwickelt sind, haben wir schlechthin c als Halbmesser gesetzt; wir haben diese Glieder auch noch besonders sphäroidisch entwickelt und gefunden für $\varphi - \varphi_0$:

$$-\frac{x^2 y^2}{2 c^4} V^6 t^3 (1 + \eta^2 \ldots) + \frac{y^4}{24} \frac{V^6 t}{c^4} (1 + 3 t^2 + \eta^2 \ldots)$$

Man könnte also wohl den Faktor V^6 in den zwei letzten Gliedern von (24) zusetzen, aber da die vernachlässigten Glieder mit $\eta^2 \ldots$ das alles nochmals ändern können, indem $V^2 = 1 + \eta^2$ ist, haben wir kurzer Hand c^4 in allen Gliedern 4ter Ordnung stehen gelassen, obgleich N^4 oder r^4 statt c^4 sich vielleicht mehr empfehlen würde. Es kommt uns bei jenen Gliedern 4ter Ordnung nur auf die wenigen ersten Stellen an.

Zur Anwendung dieser Formeln auf die Dessauer Normalbreite 51° 50′ hat man folgende Konstanten:

$$\log \cos \varphi = 9.790\,9541{\cdot}080 \qquad \log \sin \varphi = 9.895\,5421{\cdot}736$$
$$\log \cos^2 \varphi = 9.581\,9082{\cdot}160 \qquad \log \sin^2 \varphi = 9.791\,0843{\cdot}472$$
$$\log e'^2 = 7.827\,3187{\cdot}833$$
$$\log \eta^2 = \log e'^2 \cos^2 \varphi = 7.409\,2269{\cdot}993 \qquad \eta^2 = 0.002\,5658{\cdot}248$$
$$\log \eta^2 t^2 = \log e'^2 \sin^2 \varphi = 7.618\,4031{\cdot}305 \qquad \eta^2 t^2 = 0.004\,1533{\cdot}940$$
$$V^2 = 1 + \eta^2 = 1{,}002\,565824805$$
$$\log \eta^4 = 4.818\,4540 \qquad \eta^4 = 0{,}00000\,65835$$
$$\log \eta^4 t^2 = 5.027\,6301 \qquad \eta^4 t^2 = 0{,}00001\,06569$$
$$\log V^2 = 0.001\,1128{\cdot}964 \qquad \log V = 0.000\,5564{\cdot}482$$
$$\log V^4 = 0.002\,2257{\cdot}928 \qquad \log V^3 = 0.001\,6693{\cdot}446$$
$$\log V^5 = 0.002\,7822{\cdot}4 \qquad \log V^7 = 0.003\,8591{\cdot}4$$
$$\tan \varphi = t, \log t = 0.104\,5880{\cdot}656 \qquad t^2 = 1{,}618\,7363{\cdot}954$$
$$\log t^2 = 0.209\,1761{\cdot}312$$
$$\log \varrho = 5.314\,4251{\cdot}332 \qquad \log \frac{1}{\varrho} = 4.685\,5748{\cdot}668$$
$$\log c = 6.806\,0976{\cdot}435 \qquad \log c^2 = 3.612\,1952{\cdot}870$$
$$\log c^3 = 0.418\,2929{\cdot}3 \qquad \log c^4 = 7.224\,3905{\cdot}7$$

Wenn man diese Konstanten in die vorhergehenden Formeln einführt, so erhält man:

für congruente Coordinaten x, y

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi &= [8.509\,9968{\cdot}343]\,x - [1.508\,0137{\cdot}1]\,y^2 - [9.394\,3620]\,x^2 \\ &+ [1.811\,208]\,x^3 - [4.803\,7047]\,x\,y^2 - [8.10277]\,x^2 y^2 + [7.58202]\,y^4 \end{aligned}\right\} \quad (24a)$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= [8.717\,9298{\cdot}299]\,y + [2.016\,9767]\,x\,y + [5.316\,0226]\,x^2 y \\ &- [4.838\,9023]\,y^3 + [8.69416]\,x^3 y - [8.65540]\,x\,y^3 \end{aligned}\right\} \quad (25a)$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= [8.613\,4720{\cdot}035]\,y + [1.912\,5188{\cdot}8]\,x\,y + [5.828\,6062]\,x^2 y \\ &- [4.851\,4850]\,y^3 - 8.6582]\,x\,y^3 + [8.688\,74]\,x^3 y \end{aligned}\right\} \quad (26a)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= [1.490\,0031{\cdot}657]\,\Delta\varphi + [5.562\,1572{\cdot}1]\,\lambda^2 - [0.351\,2073]\,\Delta\varphi\,\lambda^2 \\ &+ [3.864\,3715]\,\Delta\varphi^2 - [7.744\,955]\,\Delta\varphi^3 - [3.854\,68]\,\lambda^4 \end{aligned}\right\} \quad (27a)$$

$$\left.\begin{aligned} y &= [1.282\,0701{\cdot}701]\,\lambda - [6.071\,1200{\cdot}1]\,\Delta\varphi\,\lambda - [9.666\,1530]\,\lambda^3 \\ &- [8.445\,4885]\,\Delta\varphi^2\lambda - [4.96682]\,\Delta\varphi^3\lambda + [4.66579]\,\Delta\varphi\,\lambda^3 \end{aligned}\right\} \quad (28a)$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= [9.895\,5421{\cdot}736]\,\lambda - [8.071\,5618]\,\lambda^3 + [8.964\,5490]\,\Delta\varphi^2\lambda \\ &+ [3.33773]\,\Delta\varphi\,\lambda^3 \end{aligned}\right\} \quad (29a)$$

Zu einer ersten Anwendung dieser Formeln wollen wir in runden Zahlen nehmen:

$$x = 50\,000^{m} \qquad y = 50\,000^{m} \tag{30}$$

Daraus erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi &= 1609{,}761\,561'' = 26'\,49{,}761\,561'' \\ \lambda &= 2637{,}728\,348'' = 43'\,57{,}728\,348'' \\ \gamma &= 2073{,}867\,723'' = 34'\,33{,}867\,723'' \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

und die Rückverwandlung:

$$\left.\begin{aligned} x &= 50000{,}00015^{m} \\ y &= 50000{,}00063^{m} \\ \gamma &= 2073{,}867\,640'' = 34'\,33{,}867\,640'' \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Die Proben stimmen in x auf $0{,}15^{mm}$, in y auf $0{,}63^{mm}$ und in γ auf $0{,}000083''$ also überall befriedigend.

Einzelheiten hiezu sind in der „Zeitschr. f. Verm." 1896, S. 88—89 angegeben, wobei aber zu bemerken ist, dass die Coëfficienten zu x^2 und zu $\Delta\varphi^2$ dort ein wenig anders, d. h. etwas weniger genau in Bezug auf die Glieder η^2 angegeben waren.

Übergang zu konformen Coordinaten x, y.

In den bisherigen Formeln ist angenommen, die Coordinaten x, y seien natürliche, unverzerrte (kongruente), wie in dem Beispiele (30); wir wollen nun aber annehmen, das Coordinatensystem sei ein konformes, entsprechend dem früheren § 50, wobei aber nun die x die Rolle der früheren y übernehmen. Dann geht jedes x über in $x + \dfrac{x^3}{6\,r^2}$ während die y ungeändert bleiben, oder wir wollen nun, indem wir die konformen x mit X bezeichnen, setzen:

$$\left.\begin{aligned} x = X - \frac{X^3}{6\,r^2} = X - \frac{X^3}{6\,c^2}\,V^4 \\ \text{wobei für die Breite } 51°\,50'\; log\,\frac{1}{6\,r^2} = 5.611\,879 \text{ und } log\,\frac{\mu}{6\,r^2} = 2.249\,664 \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

wobei übrigens in den Gliedern 4ter Ordnung, wie schon früher, c und r nicht mehr unterschieden zu werden brauchen.

Betrachten wir zuerst die Gleichung (24) für $\Delta\varphi$, so sieht man, dass die Einführung von (30) nur auf das erste Glied einwirkt, indem es giebt:

$$\frac{x}{c}\,V^3 = \frac{V^3}{c}\left(X - \frac{X^3}{6\,c^2}\,V^4\right) = \frac{V^3}{c} - \frac{V^5}{6\,c^3}\,(1 + \eta^2)\,X^3 \tag{34}$$

Hiezu kommt das Glied in (24), welches x^3 selbst enthält und nun auch mit X^3 geschrieben werden kann, nämlich:

$$-\frac{X^3}{6\,c^3}\,V^5\,(-\,3\,\eta^2\,t^2 + 3\,\eta^2 + 3\,\eta^4 - 15\,\eta^4\,t^2)$$

Dieses mit dem letzten Gliede von (31) zusammengenommen giebt:

$$-\frac{X^3}{6\,c^3}\,V^5\,(1 + 4\,\eta^2 - 3\,\eta^2\,t^2 + 3\,\eta^4 - 15\,\eta^4\,t^2)$$

In dieser Form werden wir dieses Glied in der nachfolgenden Gleichung (36) wiederfinden. In (25) bringt das zweite Glied eine Änderung zusammen mit dem ohnehin vorhandenen Gliede $x^3\,y$, wo wir aber, weil es nur 4te Ordnung ist, die V^2 weglassen, also:

$$\lambda \cos\varphi = \frac{y}{c}\,V + \frac{y\,V^2 t}{c^2}\left(X - \frac{X^3}{6\,c^2}\right)\ldots + \frac{X^3 y\,t}{3\,c^4}(1 + 3\,t^2) + \ldots$$

$$= \frac{y}{c}\,V^3 + \frac{y\,X}{c^2}\,V^2 t + \frac{y\,X^3 t}{6\,c^4}(-1 + 2 + 6\,t^2) = \ldots\ldots \frac{y\,X^3 t}{6\,c^4}(1 + 6\,t^2$$

Dieses Glied wird sich in der nachfolgenden Gleichung (37) finden.

Ähnlich wird auch γ behandelt, was wir nicht näher auseinandersetzen wollen.

In der Umkehrungsformel (27) für x erhält man beim Übergang auf konforme Coordinaten (ohne ϱ):

$$X - \frac{X^3}{6\,c^2}\,V^4 = \frac{\Delta\varphi}{V^3} + \frac{\lambda^2}{2}\,\frac{c}{V}\cos^2\varphi\;t + \ldots$$

also wenn man das Glied mit X^3 auf die rechte Seite bringt, wird:

$$X = \left(\frac{\Delta\varphi}{V^3}c + \frac{\lambda^2 c}{2\,V}(\cos^2\varphi\;t)\right)^3 \frac{V^4}{6\,c^2} + \ldots\ldots \qquad - \frac{\Delta\varphi^3}{2}\,\frac{c}{V^7}\,\eta^2(-1 + t^2 - \eta^2 - 4\,\eta^2 t^2)$$

$$= \left(\frac{\Delta\varphi^3}{V^9}c^3 + \frac{3\,\Delta\varphi^2\lambda^2 c^3 \cos^2\varphi\;t}{2\,V^7}\right)\frac{V^4}{6\,c^2} + \ldots$$

$$= \frac{\Delta\varphi^3}{V^7}\,\frac{V^2}{6}\,c + \frac{\Delta\varphi^2\lambda^2}{4\,V^3}\,c\cos^2\varphi\;t + \ldots\ldots \qquad + \frac{\Delta\varphi^2}{2}\,\frac{c}{V^7}\,\eta^7(1 - t^2 + \eta^2 + 4\,\eta^2 t^2)$$

Das erste und das dritte Glied lassen sich zusammennehmen (mit $V^2 = 1 + \eta^2$) und dadurch wird:

$$X = \frac{\Delta\varphi^3 c}{6\;V^7}(1 + 4\,\eta^2 - 3\,\eta^2 t^2 + 3\,\eta^4 + 12\,\eta^4 t^2) + \frac{\Delta\varphi^2\lambda^2}{4\,V^3}\,c\cos^2\varphi\;t + \ldots\ldots$$

Das sind nur die Glieder, welche sich in (27) ändern; im Ganzen hat man dann die Gleichung, wie sie in nachstehender Zusammenstellung bei (39) sich findet. Die Formeln für λ und γ sind dieselben geblieben wie früher (28) und (29). Hiernach hat man folgende Gebrauchsformeln für konforme X, y:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi = \frac{X}{c}V^3\varrho - \frac{y^2}{2\,c^2}V^4 t\,\varrho - \frac{3\,X^2}{2\,c^2}V^4\eta^2 t\,\varrho - \frac{X^3}{6\,c^3}V^5(1 + 4\,\eta^3 - 3\,\eta^2 t^2 + 3\,\eta^4 - 15\,\eta^4 t^2)\,\varrho \\ - \frac{X\,y^2}{2\,c^3}\,V^5 t^2(1 - 3\,\eta^2)\,\varrho - \frac{X^2 y^2}{2\,c^4}\,t^3\varrho + \frac{y^4}{24\,c^4}\,t\,(1 + 3\,t^2)\,\varrho\end{aligned}\right\}(36)$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda\cos\varphi = \frac{y}{c}\,V\varrho + \frac{X\,y}{c^2}\,V^2 t\,\varrho + \frac{X^2 y}{c^3}\,V^3 t^2\varrho - \frac{y^3}{3\,c^3}\,V^3 t^2\varrho \\ + \frac{X^3}{6\,c^4}y\,t\,(1 + 6\,t^2)\,\varrho - \frac{X\,y^3}{6\,c^4}\,t\,(1 + 6\,t^2)\,\varrho\end{aligned}\right\}(37)$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma = \frac{y}{c}\,V t\,\varrho + \frac{X\,y}{c^2}\,V^2 t\,\varrho + \frac{X^2 y}{2\,c^3}\,V^3 t\,(1 + 2\,t^2 + \eta^2)\,\varrho \\ - \frac{y^3}{6\,c^3}\,V^3 t\,(1 + 2\,t^2 + \eta^2)\,\varrho - \frac{X\,y^3}{3\,c^4}\,t^2(2 + 3\,t^2)\,\varrho \\ + \frac{X^3 y}{3\,c^4}\,t^2(2 + 3\,t^2)\,\varrho\end{aligned}\right\}(38)$$

Für die Umkehrung der Aufgabe hat man:

$$\left.\begin{aligned}X = \frac{\Delta\varphi}{\varrho}\,\frac{c}{V^3} + \frac{\lambda^2}{2\,\varrho^2}\,\frac{c}{V}\cos^2\varphi\;t - \frac{\Delta\varphi\,\lambda^2}{2\,\varrho^3}\,\frac{c}{V^3}\sin^2\varphi + \frac{3}{2}\,\frac{\Delta\varphi^2}{\varrho^2}\,\frac{c}{V^5}\,\eta^2 t \\ + \frac{\Delta\varphi^3}{6\,\varrho^3}\,\frac{c}{V^7}(1 + 4\,\eta^2 - 3\,\eta^2 t^2 + 3\,\eta^4 + 12\,\eta^4 t^2) + \frac{\Delta\varphi^2\lambda^2}{4\,\varrho^4}\,c\cos^2\varphi\;t - \frac{\lambda^4 c}{24\,\varrho^4}\cos^2\varphi\;t\end{aligned}\right\}(39)$$

Die früheren (28) und (29) bleiben auch bei konformen Coordinaten giltig und sind hier einzufügen.

Mit ausgerechneten Coëfficienten-Logarithmen bekommt man folgende Formeln:

für konforme Coordinaten X, y

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi &= [8.509\,9968{\cdot}343]\,X - [1.508\,0137{\cdot}1]\,y^2 - [9.394\,3620]\,x^2 \\ &\quad - [4.119\,7471]\,X^3 - [4.803\,7047]\,Xy^2 - [8.10\,277]\,X^2y^2 + [7.58\,202]\,y^4\end{aligned}\right\} \quad (36a)$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= [8.717\,9298{\cdot}299]\,y + [2.016\,9767]\,Xy + [5.316\,0226]\,X^2 y \\ &\quad - [4.838\,9023]\,y^3 + [8.65\,540]\,Y^3 y - [8.65\,540]\,X y^3\end{aligned}\right\} \quad (37a)$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma &= [8.613\,4720{\cdot}035]\,y + [1.912\,5188{\cdot}8]\,X y + [5.328\,6062]\,X^2 y \\ &\quad - [4.851\,4850]\,y^3 - [8.6582]\,X y^3 + [8.6582]\,X^3 y\end{aligned}\right\} \quad (38a)$$

$$\left.\begin{aligned}X &= [1.490\,0031{\cdot}657]\,\Delta\varphi + [5.562\,1572{\cdot}1]\,\lambda^2 - [0.351\,2073]\,\varphi\,\Delta\lambda^2 \\ &\quad + [3.864\,3715]\,\Delta\varphi^2 + [0.079\,8989]\,\Delta\varphi^3 + [4.63\,283]\,\Delta\varphi^2\lambda^2 - [3.85\,468]\,\lambda^4\end{aligned}\right\} \quad (39a)$$

Die früheren (28) und (29) gelten auch hier wieder.

Wenn man hiernach das grosse Beispiel (30) rechnen will, so muss man zuerst $x = 50\,000^m$ umwandeln in:

$$X = x + \frac{x^3}{6\,r^2} = 50\,000{,}51143^m, \quad y \text{ bleibt} = 50000^m \quad (40)$$

und damit erhält man aus (36), (37), (38):

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi &= 1609{,}761\,560'' = 0^\circ\,26'\,49{,}761\,560'' \\ \lambda &= 2637{,}728\,353 \quad = 43'\,57{,}728\,353'' \\ \gamma &= 2073{,}867\,605 \quad = 34'\,33{,}867\,723''\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

und die Rückverwandlung nach 39 giebt:

$$X = 50\,000{,}51161^m \quad (42)$$

Dieses stimmt auf $0{,}18^{mm}$ mit dem Ausgangswert in (40), y und γ bleiben hier dieselben wie bei (32).

Um auch eine Anwendung mit rechtwinkligen Coordinaten zu haben, stellen wir zuerst mit Fig. 2. die Formeln auf, welche aus § 50. dadurch hervorgehen, dass man x und y vertauscht, wie in Fig. 2. angedeutet ist.

Fig. 2.

Indem wir im übrigen mit t und T die Richtungswinkel wie früher bezeichnen, haben wir nach Fig. 2.:

$$tang\,t_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad s = \frac{y_2 - y_1}{\sin t_1} = \frac{x - x_{21}}{\cos t_1}$$

$$tang\,t_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \qquad s = \frac{y_1 - y_2}{\sin t_2} = \frac{x_1 - x_2}{\cos t_2}$$

$$t_2 = t_1 \pm 180^\circ \qquad s = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Dieses gilt wie immer in der Ebene.

Zum Übergang auf das Ellipsoid (bzw. genähert Kugel) hat man:

$$\left.\begin{aligned}t_1 - T_1 &= (y_2 - y_1)\,\frac{2\,x_1 + x_2}{3}\,\frac{\varrho}{2\,r^2} \\ t_2 - T_2 &= (y_1 - y_2)\,\frac{2\,x_2 + x_1}{3}\,\frac{\varrho}{2\,r^2} \\ \log S &= \log s - \frac{\mu}{12\,r^2}\,(x_1^2 + 4\,x_0^2 + x_2^2), \text{ wobei } \frac{x_1 + x_2}{2} = x_0\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Der mittlere Krümmungs-Halbmesser r hängt von der geographischen Breite ab. Wir nehmen an, wie schon bei (33) S. 443:

$$\varphi_0 = 51^\circ\, 50' \text{ womit } \log r = 6.804\,9847$$

$$\log \frac{\varrho}{2\,r^2} = 1.403426 \qquad \log \frac{\mu}{12\,r^2} = 4.948\,634$$

für 7. *log* Dezimale ... 1.948 634

Die Coordinaten zweier Punkte sind:

$$\begin{array}{lll} & & \text{konform} \\ P_1 & y_1 = +10\,000^m & X_1 = +10\,000^m \\ P_2 & y_2 = +30\,000^m & X_2 = +40\,000^m \\ \hline & y_2 - y_1 = +20\,000^m & X_2 - X_1 = +30\,000^m \end{array} \tag{44}$$

Man kann auch die zu den konformen X gehörigen kongruenten x berechnen, nämlich wie schon bei (31) angegeben:

$$x = X\left(1 - \frac{X^2}{6\,r^2}\right) = X - \frac{X^3}{6\,r^2} \qquad \left(\log \frac{1}{6\,r^2} = 5.611\,879\right)$$

$$\begin{array}{lll} X_1 = 10000{,}000^m & X_2 = 40000{,}000^m & \text{konform} \\ \quad -0{,}004 & \quad -0{,}262 & \\ \hline x_1 = 9999{,}996^m & x_2 = 39999{,}738^m & \text{kongruent.} \end{array} \tag{45}$$

Nach den Formeln (43) wurde berechnet:

$$\begin{array}{ll} t_1 = 33^\circ\, 41'\, 24{,}2431'' & t_2 = 213^\circ\, 41'\, 24{,}2431'' \\ \qquad -1{,}0127 & \qquad +1{,}5190 \\ \hline T_1 = 33^\circ\, 41'\, 23{,}2304'' & T_2 = 213^\circ\, 41'\, 25{,}7621'' \end{array} \tag{46}$$

$$\begin{array}{l} \log s = 4.5569\,716{\cdot}8 \\ \qquad\qquad -37{\cdot}3 \\ \hline \log S = 4.5569\,679{\cdot}5 \end{array} \tag{47}$$

Nun werden aus (44) die geographischen Coordinaten nach den Formeln (36)—(38) berechnet:

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda_1 = 8'\, 48{,}353\,035'' & \varphi_1 = 51^\circ\, 55'\, 23{,}265\,935 & \gamma_1 = 6'\, 51{,}469\,147'' \\ \lambda_2 = 26'\, 19{,}494\,863'' & \varphi_2 = 52^\circ\, 11'\, 31{,}394\,840 & \gamma_2 = 20'\, 41{,}84472'' \end{array}\right\} \tag{48}$$

Aus diesen λ und φ nach den Mittelbreiten-Formeln des früheren § 77. wurde berechnet:

$$\log S = 4.556\,9679{\cdot}5 \tag{49}$$

was vollständig mit (47) stimmt, und ferner die Azimute:

$$\alpha_1 = 33^\circ\, 48'\, 14{,}6988'' \qquad \alpha_2 = 214^\circ\, 2'\, 7{,}6060'' \tag{50}$$

das giebt die Probe:

$$\begin{array}{lll} \text{von (46)} & T_1 = 33^\circ\, 41'\, 23{,}2304'' & T_2 = 213^\circ\, 41'\, 25{,}7621'' \\ \text{von (48)} & \gamma_1 = \qquad 6'\, 51{,}4691'' & \gamma_2 = \qquad 20'\, 41{,}8447'' \\ \hline & T_1 + \gamma_1 = 33^\circ\, 48'\, 14{,}6995'' & T_2 + \gamma_2 = 214^\circ\; 2'\; 7{,}6068'' \\ \text{soll (50)} & \alpha_1 = 33^\circ\, 48'\, 14{,}6988'' & \alpha_2 = 214^\circ\; 2'\; 7{,}6060'' \\ \hline \text{Abweichungen} & 0{,}0007'' & 0{,}0008'' \end{array}$$

Diese kleinen Abweichungen sind bei Azimuten und Richtungswinkeln gleichgiltig. Das Zahlenbeispiel stimmt also in sich selbst vollständig, der angewendeten Rechenschärfe entsprechend.

Indessen müssen wir zu den konformen Coordinaten, welche von Gleichung (33) an eingeführt wurden, doch noch eine reservierende Bemerkung machen:

Während die ganze Entwicklung bis dorthin (33) in sich konsequent auf Potenzreihenentwicklungen beruhend ist, wobei auch klar ist, welche Glieder mit η^2 mitgenommen und welche vernachlässigt sind, ist das von (33) an nicht mehr ebenso der Fall. Für die Ausdehnung mit $X = 50000^m$ und $y = 50000^m$ ist die Brauchbarkeit auch der konformen Formeln innerhalb 1^{mm} gezeigt worden; ob aber beim Übergang zur Konformität die Glieder 3ter Ordnung nicht auch Änderungen in den Zusätzen $\eta^2 \ldots$ erfahren, das wäre durch eine schärfere Entwicklung, etwa ähnlich wie in §§ 86.—88., noch zu behandeln.

§ 84. Allgemeines über queraxige Coordinaten.

In den vorstehenden §§ 82. und 83. haben wir queraxige Coordinaten kennen gelernt, bei welchen in einem angenommenen Ursprungspunkt ein Quernormalbogen von West nach Ost (in der Richtung des sogenannten ersten Vertikals) gelegt, als Hauptaxe angenommen wird.

Indessen in weiterem Sinne können wir auch die aus der konformen Kegelprojektion hergeleiteten rechtwinkligen Coordinaten queraxig nennen, weil dort ein Parallelkreisbogen zunächst gewissermassen als Hauptaxe dient, dem dann im Ursprungspunkt eine Queraxe, in der Ebene berührend, angelegt wird.

Wir wollen diese beiden Arten von queraxigen Coordinaten zuerst unter sich vergleichen und dann auch noch ohne Vergleichung mit den meridionalaxigen Systemen im allgemeinen behandeln.

Dass bei den beiden Arten queraxiger Coordinaten die Reduktionen für Entfernung und für Richtungen bis auf Glieder $\frac{1}{r^2}$ dieselben sind, fällt sofort in die Augen, denn bei der Coordinatenzählung von Fig. 1. § 83. S. 445 hat man für beide Fälle:

$$m = 1 + \frac{x^2}{2\,r^2} \qquad \frac{s}{S} = 1 + \frac{1}{12\,r^2}\left(x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + x_2^2\right)$$

$$T_1 - t_1 = \frac{\varrho}{6\,r^2}(y_2 - y_2)(2\,x_1 + x_2)$$

In der Mecklenburgischen konformen Kegelprojektion reichen in der That diese Glieder schon in II.—III. Triangulierungs-Ordnung praktisch aus, und nur in I. Ordnung kommen noch weitere Glieder 3ter Potenz mit $\frac{1}{r^3}$ in Betracht.

Um auch die Coordinaten-Formeln zu vergleichen, brauchen wir nur die Formeln von §§ 80.—81. einerseits und §§ 82.—83. andererseits zusammenzustellen; indessen wollen wir dabei alle sphäroidischen Bestandteile $\eta^2 \ldots$ u. s. w. ausser Betracht lassen, also nur die sphärischen Glieder vergleichen.

Die Normalbreite ist hiebei natürlich als *gleich* anzunehmen, wir wollen aber die Zeichen P und φ, welche für die Normalbreiten benützt wurden, auch weiter schreiben, um sofort hieran die Formeln zu erkennen; es soll also die Mecklenburgische Normalbreite für konforme Kegelprojektion mit P bezeichnet werden und die zugehörigen rechtwinkligen Coordinaten mit $x_1\,y_1$, dann die Normalbreite für queraxige konforme Coordinaten (Dessau) mit φ, und die Coordinaten mit $x_2\,y_2$.



Da wir nur die sphärischen Glieder zur Vergleichung ziehen, können wir für die konforme Kegelprojektion den § 80. benützen, dagegen die queraxigen Coordinaten sind in § 82. sphärisch nur kongruent, müssen daher als konform aus § 83. Gleichung (36), (37), (39), (28) ausgezogen werden durch Weglassung aller sphäroidischen Elemente η^2 u. s. w.

Auf diesem Wege sind folgende Vergleichungen erhalten worden:

$$§80.(25)\ \frac{x_1}{r} = \Delta\varphi + \frac{\lambda^2}{2}\sin P\cos P - \Delta\varphi\frac{\lambda^2}{2}\sin^2 P + \frac{\Delta\varphi^3}{6} - \frac{\lambda^4}{24}\sin^3 P\cos P + \frac{\Delta\varphi^4}{24}\tang P$$

$$§83.(39)\ \frac{x_2}{r} = \Delta\varphi + \frac{\lambda^2}{2}\sin\varphi\cos\varphi - \Delta\varphi\frac{\lambda^2}{2}\sin^2\varphi + \frac{\Delta\varphi^3}{6} - \frac{\lambda^4}{24}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\Delta\varphi^2\lambda^2}{4}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\frac{x_2 - x_1}{r} = -\frac{\lambda^4}{24}\sin\varphi\cos^3\varphi - \frac{\Delta\varphi^4}{24}\tang\varphi + \frac{\Delta\varphi^2\lambda^2}{4}\sin\varphi\cos\varphi \qquad (1)$$

$$§80.(26)\ \frac{y_1}{r} = \lambda\cos P - \lambda\,\Delta\varphi\sin P - \frac{\lambda^3}{6}\sin^2 P\cos P + \frac{\Delta\varphi\,\lambda^3\sin^3 P}{6} - \frac{\Delta\varphi^3\lambda\sin P}{6}$$

$$§83.(28)\ \frac{y_2}{r} = \lambda\cos\varphi - \lambda\,\Delta\varphi\sin\varphi - \frac{\lambda^3}{6}\sin^2\varphi\cos\varphi + \frac{\Delta\varphi\,\lambda^3\sin\varphi}{6} - \frac{\Delta\varphi^3\lambda\sin\varphi}{3}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{r} = \qquad + \frac{\Delta\varphi\,\lambda^3}{6}\sin\varphi\cos^2\varphi - \frac{\Delta\varphi^3\lambda}{6}\sin\varphi \qquad (2)$$

$$§80.(33)\ \Delta\varphi = \frac{x_1}{r} - \frac{y_1^2 t}{2r^2} - \frac{x_1 y_1^2 t^2}{2r^3} - \frac{x_1^3}{6r^3} - \frac{x_1^2 y_1^2 t}{4r^4}(2t^2 - 1) + \frac{y_1^4 t^3}{8r^4} - \frac{x_1^4 t}{24r^4}$$

$$§83.(36)\ \Delta\varphi = \frac{x_2}{r} - \frac{y_2^2}{2r^2}t - \frac{x_2 y_2^2}{2r^3}t^2 - \frac{x_2^3}{6r^3} - \frac{x_2^2 y_2^2}{2r^4}t^3 + \frac{y_2^4 t}{24r^4}(1 + 3t^2)$$

$$0 = \frac{x_2 - x_1}{r} \qquad - \frac{x^2 y^2}{4r^4}t + \frac{x^4 t}{24r^4} + \frac{y^4 t}{24r^4} \qquad (3)$$

$$§80.(35)\ \lambda\cos P = \frac{y_1}{r} + \frac{y_1 x_1}{r^2}t + \frac{y_1 x_1^2}{r^3}t^2 - \frac{y_1^3 t^2}{3r^3} - \frac{y_1^3 x_1}{r^4}t^3 + \frac{y_1 x_1^3}{r_4}t^3$$

$$§83.(37)\ \lambda\cos\varphi = \frac{y_2}{r} + \frac{y_2 x_2}{r^2}t + \frac{y_2 x_2^2}{r^3}t^2 - \frac{y_2^3 t^2}{3r^3} - \frac{y_2^3 x^2}{6r^4}t(1 + 6t^2) + \frac{y_2 x_2^3}{6r^4}t(1 + 6t^2)$$

$$0 = \frac{y_2 - y_1}{r} \qquad - \frac{y^3 x}{6r^4}t + \frac{y x^3}{6r^4}t \qquad (4)$$

Die hier auftretenden Differenzen kontrollieren sich gegenseitig, d. h. es ist (1) = (3) und (2) = (4), wenn man in den höheren Gliedern nimmt $\frac{x}{r} = \Delta\varphi$ und $\frac{y}{r} = \lambda\cos\varphi$, wobei auch x_1 von x_2 und y_1 von y_2 nicht mehr zu unterscheiden sind.

Diese Differenzenproben sind erwünscht als durchgreifende Kontrollen aller sphärischen Entwicklungen für x, y, $\Delta\varphi$, λ in §§ 80.—83.

Betrachten wir diese Differenzen näher, so sagen dieselben aus, dass die konforme Kegelprojektion und die queraxige konforme Projektion so nahe verwandt sind, dass sie sich nur um Glieder 4ter Ordnung in x und y unterscheiden.

Bei der Meridian-Konvergenz, welche zwischen (1) § 80. S. 419 und (29) § 83 S. 441 zu vergleichen ist, beträgt der Unterschied dritte Ordnung, welche aber in dieser Beziehung mit der 4ten Ordnung in x und y gleichartig zu achten ist. Da die Glieder 4ter Ordnung in den Coordinatenrechnungen sehr wenig ausmachen, kann man für kleinere Ausdehnung die Kegelprojektion und die queraxige Projektion fast als identisch betrachten.



Vergleichen wir weiter und setzen etwa den Fall, man wolle für ein Land von ausgesprochen west-östlicher Ausdehnung, wie z. B. Sachsen oder die Schweiz, ein west-östlich angepasstes System anlegen, so empfiehlt sich das konforme Kegelsystem durch die scharfe Definition seines Prinzips, das in geschlossener Form angebbar und bis zu allen nötigen Ordnungen bereits entwickelt vorliegt (Mecklenburg). Als kleiner Nachteil ist nur die algebraische Form der Richtungsreduktionen zu betrachten, welche für Triangulierung I. Ordnung mit $\frac{1}{r^2}$ nicht ausreicht, sondern noch $\frac{1}{r^3}$ und nach Umständen sogar noch einzelne $\frac{1}{r^4}$ verlangen kann; doch ist schon von der Triangulierung II. Ordnung an die Richtungsreduktion mit $\frac{1}{r^2}$ genügend.

Solche Glieder mit $\frac{1}{r^3}$ treten bei der eigentlich queraxigen Projektion (§ 82.—83.) nicht auf, und das queraxige System ist insofern im Vorteil; aber andererseits müssen wir hiezu bemerken, dass eine vollendete Entwicklung der Formeln für rein queraxiges System in unseren vorstehenden §§ 82.—83. noch nicht vorliegt. Jene §§ 82.—83. sind bei mässiger Ausdehnung, wie sie in § 83. vorausgesetzt wurde, jedenfalls ausreichend, aber im Falle der Ausdehnung auf ein erheblich grösseres Land wäre diese Theorie noch weiter auszubilden, wie auch schon am Schlusse von § 83. bemerkt wurde.

Alles bisherige bezog sich auf die Vergleichung der beiden Arten queraxiger Coordinaten unter sich; wir wollen auch noch das nötigste zur Vergleichung queraxiger Coordinaten mit den üblichen meridional-axigen Coordinaten beifügen (aus einem Vortrag über deutsche Coordinaten-Systeme, „Zeitschr. f. Verm." 1895, S. 342).

Alle süddeutschen und auch die 40 preussischen Systeme haben als Hauptaxe je den Meridian eines Punktes, und man hat sich daran gewöhnt, das als zu einem ordentlichen Coordinaten-System gehörig anzusehen, allein der Meridian ist dabei nicht wesentlich. Bayern, Württemberg, Baden haben ihre Haupterstreckung von Süden nach Norden, und da war es natürlich, die Hauptaxe in den Meridian zu legen, zumal der Meridian eine jedem Laien geläufige geodätische Linie ist. Wenn aber ein Land wesentlich west-östlich erstreckt ist, wie z. B. Sachsen, Mecklenburg, Anhalt, so liegt kein Grund mehr vor, die Hauptaxe in den Meridian zu legen, im Gegenteil, ohne Rechnung kann jeder einsehen, dass dann eine *Queraxe* von West nach Ost eine Menge Verzerrungen ersparen muss.

Diesen naheliegenden Gedanken hatte ich gelegentlich früher („Zeitschr. f. Verm." 1876, S. 266) ausgesprochen, und 1894 wurde daraus Veranlassung gegeben zu einer amtlichen Behandlung der Sache (vgl. Queraxige rechtwinklige konforme Coordinaten, „Zeitschr. f. Verm." 1894, S. 65—74 mit Mittelbreite $\varphi_0 = 51° 50'$ S. 72).

In Hinsicht auf die rechtwinkligen Coordinaten selbst ändert sich dabei gar nichts, als dass die Bedeutung der x und y vertauscht wird, und auch die Beziehungen zwischen rechtwinkligen und geographischen Coordinaten werden den früheren ganz entsprechend, d. h. sie werden nicht schwieriger als für die Meridianaxe. Der Unterschied liegt eben nur in der Anpassung der Hauptaxe an die Haupterstreckung des Landes. Der Meridian an sich hat allerdings den Vorzug, dass er als Axe beliebig lang sein kann, also z. B. vom Äquator bis zum Pol als Axe *eines* Systems dienen könnte; allein wenn es sich auch in der Richtung der Hauptaxe selbst nur um mässige

Erstreckung handelt, z. B. um wenige hundert Kilometer, dann tritt dieser Vorzug fast ganz zurück, und dann hat die Queraxe auch für die mathematische Formelentwicklung dieselbe Berechtigung wie der Meridian.

Wie wichtig aber die Anpassung der Axe an die Landesform ist, mag an dem Beispiel von Mecklenburg gezeigt werden. Dieses Land hat von Süd nach Nord nur etwa $^2/_3$ der Ausdehnung, welche von West nach Ost stattfindet, und durch die konforme Kegelprojektion, welche im wesentlichen queraxig ist, ist daher die Maximalverzerrung nur $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ oder kaum die Hälfte von der Verzerrung, welche eine Meridianaxe bringen müsste.

Auch der kleine Staat Anhalt hat wesentlich west-östliche Erstreckung, nämlich rund 110^{km} von West nach Ost und nur 55^{km} von Süd nach Nord. Mit einer Queraxe unter 51° 50′ Breite sind die grössten Abscissen nach Norden rund 30^{km}, also nach der Tabelle (8) § 49. S. 276 ist die grösste Linearverzerrung nur $0{,}011^m$ auf 1000^m, während bei Wahl der Magdeburger Meridianaxe die grössten Ordinaten nach Osten 66^{km} würden mit Linearverzerrung (nach S. 276) an rund $0{,}05^m$ auf 1^{km}, d. h. 5mal so gross als im ersten Falle, und in den Winkelverzerrungen stellt sich die Sache noch viel ungünstiger für die Magdeburger Axe.

Als Anhang zu § 84. nehmen wir noch eine kurze Betrachtung über

Schiefaxige Coordinaten.

In theoretischer Beziehung könnte man noch weiter gehen und z. B. einem Lande, dessen Haupterstreckung von Südwest nach Nordost ginge, eine Hauptaxe im Azimut 45° anlegen u. s. w. Allein solche Abnormitäten sind höchstens für rein kartographische Zwecke versucht worden; für praktisch geodätische Zwecke dürfen wir die zwei Hauptrichtungen nicht verlassen, weil sonst die Beziehungen zu den von der Drehung der Erde vorgeschriebenen geographischen Coordinaten zu verwickelt würden.

Dagegen sind schiefaxige Coordinaten in anderem Sinne schon mehrfach eingeführt worden. Z. B. die in den Preussischen Rheinlanden früher angelegten Coordinaten-Systeme in grösserer Zahl, welche wir schon in § 59. S. 332 (unten im Kleingedruckten) erwähnt haben, sind als schiefaxige zu betrachten, indem die „Parallele zum Meridian von Köln“ als Abscissenaxe angenommen wurde.

Auch die bayrischen „Lokalsysteme“, über welche wir ebenfalls schon in § 59. S. 327 berichtet haben, sind ähnlich schiefaxig, denn es hat jedes solche System in dem Lokalnullpunkt eine x-Axe, welche um die Meridian-Konvergenz verdreht ist gegen den Meridian des Lokalnullpunktes. Als Vorteil davon wird angegeben, dass bei den Coordinaten-Transformationen dadurch einige Rechenglieder erspart werden — das mag sein, aber *schief*axige Coordinaten bringen in Bezug auf die niemals abzuschaffenden geographischen Coordinaten so viel Unzuträglichkeiten mit sich, dass dagegen jene kleinen Vorteile zurücktreten.

Vgl. Transformation rechtwinklig-sphärischer Coordinaten auf neue Normalpunkte, von Dr. J. H. Franke in München, Astr. Nachr. 126. Band, Dezember 1890, S. 355, Systeme II, und Bauernfeind, „Zeitschr. f. Verm.“ 1891, S. 161—165.

Eine neuere Mitteilung von Franke über diese Lokalsysteme giebt „Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 327—332.

Die bayrischen Reduktionsformeln für die Lokalsysteme gehen aus unseren Formeln von § 79. (15) und (16) S. 418 einfach dadurch hervor, dass man $\gamma = Null$ setzt.



§ 85. Rechtwinklige konforme sphärische Coordinaten mit Gliedern bis zur 4ten Ordnung $\frac{1}{r^4}$.

Indem wir darauf ausgehen, die Gauss schen konformen rechtwinkligen Coordinaten mit Meridiananschluss auf dem Ellipsoide zu entwickeln, wollen wir an die ersten sphärischen Näherungen von § 50. nochmals anschliessen, und zunächst noch auf der Kugel bleibend, in dem Sinne der früheren Entwicklungen von § 50. die sphärischen Reihen bis $\frac{1}{r^4}$ weiterführen.

Dazu muss vor allem das Projektionsgesetz selbst schärfer ausgedrückt werden als in § 50. geschehen ist. Wir müssen auf die durch Integration erhaltene strenge Gleichung (7) § 50. S. 280 zurückgreifen, nämlich:

$$\frac{y}{r} = l\, tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mathfrak{y}}{2r}\right)$$

oder für dekadische Logarithmen, mit $\mu = 0{,}43429\ldots$:

$$y = \frac{r}{\mu} \log tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mathfrak{y}}{2r}\right) \tag{1}$$

Das Vergrösserungsverhältnis ist nach (5) § 50. S. 280 zunächst streng:

$$m = \frac{dy}{d\mathfrak{y}} = sec\frac{\mathfrak{y}}{r} \tag{2}$$

Die Funktion (1) kann in einer Reihe entwickelt werden, indem man zunächst rein goniometrisch umwandelt:

$$tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mathfrak{y}}{2r}\right) = \frac{1 + tang\frac{\mathfrak{y}}{2r}}{1 - tang\frac{\mathfrak{y}}{2r}} = \frac{1+t}{1-t} \tag{3}$$

Die logarithmische Reihe von § 28. S. 169 darauf angewendet giebt:

$$\log(1+t) = \mu\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} - \ldots\right)$$

$$\log(1-t) = \mu\left(-t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} - \ldots\right)$$

$$\log\frac{1+t}{1-t} = 2\mu\left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \ldots\right)$$

Die Tangentenreihe § 28. S. 172 giebt:

$$t = tang\frac{\mathfrak{y}}{2r} = \frac{\mathfrak{y}}{2r} + \frac{\mathfrak{y}^3}{24\,r^3} + \frac{\mathfrak{y}^5}{240\,r^5}$$

$$t^3 = \;\text{„}\;\;\text{„}\; = \;\text{„}\; + \frac{\mathfrak{y}^3}{8\,r^3} + \frac{\mathfrak{y}^5}{32\,r^5}$$

$$t^5 = \;\text{„}\;\;\text{„}\; = \;\text{„}\;\;\text{„}\;\;\text{„}\; + \frac{\mathfrak{y}^5}{32\,r^4}$$

$$t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} = \frac{\mathfrak{y}}{2r} + \frac{\mathfrak{y}^3}{12\,r^3} + \frac{\mathfrak{y}^5}{48\,r^5}$$

$$\log\frac{1+t}{1-t} = \mu\left(\frac{\mathfrak{y}}{r} + \frac{\mathfrak{y}^3}{6\,r^3} + \frac{\mathfrak{y}^5}{24\,r^5} + \ldots\right)$$

also nach (1) und (3):

$$y = \mathfrak{y} + \frac{\mathfrak{y}^3}{6\,r^3} + \frac{\mathfrak{y}^5}{24\,r^5} + \ldots \tag{4}$$

Diese Gleichung muss rückwärts nach $\mathfrak{y}$ aufgelöst werden, was durch schrittweise geführte Näherung geschieht:

$$\mathfrak{y} = y - \frac{y^3}{6\,r^3} + \ldots \qquad \mathfrak{y}^3 = y^3 - \frac{3\,y^5}{6\,r^5}$$

$$\mathfrak{y} = y - \frac{1}{6}\left(\frac{y^3}{r^3} - \frac{3\,y^5}{6\,r^5}\right) - \frac{y^5}{24\,r^5}$$

$$\mathfrak{y} = y - \frac{y^3}{6\,r^3} + \frac{y^5}{24\,r^5} \tag{5}$$

Auch das Vergrösserungsverhältnis m kann man nach (2) bis auf $\frac{1}{r^4}$ entwickeln:

$$\cos\frac{\mathfrak{y}}{r} = 1 - \frac{\mathfrak{y}^2}{2\,r^2} + \frac{\mathfrak{y}^4}{24\,r^4}$$

$$\sec\frac{\mathfrak{y}}{r} = 1 + \left(\frac{\mathfrak{y}^2}{2\,r^2} - \frac{\mathfrak{y}^4}{24\,r^4}\right) + \frac{\mathfrak{y}^2}{4\,r^4} = 1 + \frac{\mathfrak{y}^2}{2\,r^2} + \frac{5\,\mathfrak{y}^4}{24\,r^4} \tag{6}$$

Dieses stimmt mit der in § 28. S. 172 als bekannt citierten Secans-Reihe.

Man hat also $\qquad m = 1 + \frac{\mathfrak{y}^2}{2\,r^2} + \frac{5\,\mathfrak{y}^4}{24\,r^4}$

oder mit Einführung von (5):

$$m = 1 + \frac{1}{2\,r^2}\left(y - \frac{y^3}{6\,r^3}\right)^2 + \frac{5\,y^4}{24\,r^4}$$

$$m = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2} + \frac{y^4}{24\,r^4} \tag{7}$$

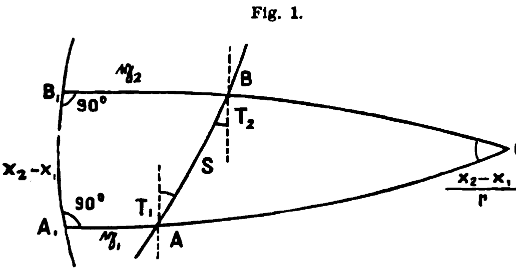
Dazu auch die Umkehrung:

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{y^2}{2\,r^2} + \frac{5y^4}{24\,r^4} \tag{8}$$

und in logarithmischer Form:

$$\log m = \frac{\mu}{2\,A^2}\,y^2 - \frac{\mu}{12\,A^4}\,y^4$$

Fig. 1.



Das nächste ist die schärfere Berechnung der Ordinaten-Konvergenz, wozu dieselbe Betrachtung wie früher bei den Soldner schen Coordinaten § 46. dient; und um nicht dieselbe Sache zweimal machen zu müssen, wollen wir die frühere Gleichung in unsere neuen Bezeichnungen umsetzen, entsprechend Fig. 1., indem wir $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_2$ statt y und y' dann $x_2 - x_1$ statt $x' - x$ und endlich $T_1 - T_2$ statt $\alpha - \alpha'$ schreiben, dadurch geht (7) § 46. S. 260 in diese Form über:

$$\tang\frac{T_1 - T_2}{2} = \frac{\sin\dfrac{\mathfrak{y}_2 + \mathfrak{y}_1}{2\,r}}{\cos\dfrac{\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{y}_1}{2\,r}}\,\tang\frac{x_2 - x_1}{2\,r}$$

Hiernach kann man die Differenz der sphärischen Richtungswinkel T_1 und T_2 scharf berechnen, beliebig weit in Reihen entwickeln, u. s. w.; indessen brauchen wir hievon zunächst nur das Differential:

$$tang\,\frac{dT}{2} = \frac{sin\,\frac{\mathfrak{y}}{r}}{cos\,\frac{dy}{2r}}\,tang\,\frac{dx}{2r}$$

oder hinreichend genau:

$$\frac{dT}{2} = sin\,\frac{\mathfrak{y}}{r}\,\frac{dx}{2r} \tag{9}$$

hier ist zunächst

$$sin\,\frac{\mathfrak{y}}{r} = \frac{\mathfrak{y}}{r} - \frac{\mathfrak{y}^3}{6r^3}$$

also wegen (5):

$$sin\,\frac{\mathfrak{y}}{r} = \left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3}\right) - \frac{y^3}{6r^3} = \frac{y}{r} - \frac{y^3}{3r^3}$$

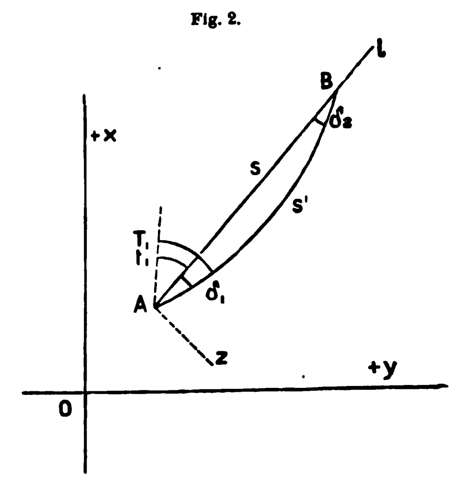
folglich nach (9):

$$dT = \left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{3r^3}\right)\frac{dx}{r} = \frac{1}{r^2}\left(y\,dx - \frac{y^3}{3r^2}\,dx\right) \tag{10}$$

Nun hat man wieder dT als das Krümmungs-Differential der Kurve AB zu betrachten, ähnlich wie in der früheren Fig. 6. § 50. S. 283, welche nun in Fig. 2. wiederkehrt, mit der Zeichenänderung, dass die schiefen Coordinaten, welche in Fig. 6. S. 283 mit ξ und η bezeichnet waren, nun durch l und z ausgedrückt sind.

Der Grund dieser Zeichenänderung war der, dass eine Kollision des früheren η und η^2 mit unserem sonstigen $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ vermieden werden sollte.

Fig. 2.



In demselben Sinne wie früher bei (23) S. 283 haben wir also für unseren neuen Fall aus (8):

$$-\frac{d^2z}{dl^2} = \frac{dT}{dl} = \frac{1}{r^2}\left(y\frac{dx}{dl} - \frac{y^3}{3r}\frac{dx}{dl}\right) \tag{11}$$

Diese Gleichung ist auch hier noch immer genau genug, denn es sollte zwar statt dl gesetzt werden $\sqrt{dl^2 + dz^2}$, aber es ist nach (35) S. 285 $d\eta$, oder nun dz selbst schon von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$, also dz^2 schon von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$, was mit dem ohnehin schon in (11) vorhandenen Faktor $\frac{1}{r^2}$ bereits $\frac{1}{r^6}$ geben würde.

Um (11) weiter auszuführen, müssen wir x und y in l ausdrücken, was nach dem Anblick von Fig. 2. durch folgende Coordinaten-Transformation geschieht:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + l\cos t_1 - z\sin t_1 \\ y &= y_1 + l\sin t_1 + z\cos t_1 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die z sind aber selbst Funktionen von l, nämlich nach (35) § 50. S. 285 mit $\eta = z$ und $\xi = l$:

$$z = \frac{l\,s\cos t_1}{6\,r^2}(2\,y_1 + y_2) - \frac{l^2}{2\,r^2}\,y_1\cos t_1 - \frac{l^3}{6\,r^2}\sin t_1\cos t_1$$

Dieses in (12) eingesetzt giebt:

$$x = x_1 + l\cos t_1 - \frac{l\,s\cos t_1\sin t_1}{6\,r^2}(2\,y_1 + y_2) + \frac{l^2}{2\,r^2}\,y_1\sin t_1\cos t_1 + \frac{l^3}{6\,r^2}\sin^2 t_1\cos t_1 \qquad (13)$$

$$y = y_1 + l\sin t_1 + \frac{l\,s\cos^2 t_1}{6\,r^2}(2\,y_1 + y_2) - \frac{l^2}{2\,r^2}\,y_1\cos^2 t_1 - \frac{l^3}{6\,r^2}\sin t_1\cos^2 t_1 \qquad (14)$$

$$\frac{dx}{dl} = \cos t_1 - \frac{s\cos t_1\sin t_1}{6\,r^2}(2\,y_1 + y_2) + \frac{l}{r^2}\,y_1\sin t_1\cos t_1 + \frac{l^2}{2\,r^2}\sin^2 t_1\cos t_1 \qquad (15)$$

Damit kann man den ersten Teil von (11) bilden, nämlich $y\,\frac{dx}{dl}$ und zum zweiten Teile von (11) braucht man noch von (12):

$$\left.\begin{aligned} y^3 &= y_1^3 + 3\,y_1^2\,l\sin t + 3\,y_1\,l^2\sin^2 t_1 + l^3\sin^3 t_1 + \ldots \\ \text{dazu}\qquad \frac{dx}{dt} &= \cos t_1 + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Wenn man die beiden Faktoren (14), (15) und die von (16) ausmultipliziert und die beiden Produkte nach der Vorschrift der Gleichung (11) vereinigt, so wird man, nach Potenzen von l ordnend, einen Ausdruck von folgender Form erhalten:

$$-\frac{d^2 z}{d\,l^2} = A + Bl + Cl^2 + Dl^3 \qquad (17)$$

wobei die Coëfficienten A, B, C, D folgende Bedeutungen haben:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{y_1}{r^2}\sin t_1 - \frac{y_1\,s\sin t_1\cos t_1}{6\,r^4}(2\,y_1 + y_2) - \frac{y_1^3}{3\,r^4}\cos t_1 \\ B &= \frac{\sin t_1\cos t_1}{r^2} + \frac{s\cos t_1}{6\,r^4}(2\,y_1 + y_2)(\cos^2 t_1 - \sin^2 t_1) \\ C &= \frac{y_1}{2\,r_4}(-\cos^3 t_1 + \sin^2 t_1\cos t_1) \\ D &= \frac{1}{6\,r^4}(-\sin t_1\cos^3 t_1 - 5\sin^3 t_1\cos t_1) \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Ehe wir weiteren Gebrauch von diesen Coëfficienten machen, werden wir die Funktion (17) durch zweimaliges Integrieren weiter behandeln:

$$-\frac{dz}{dl} = C_1 + Al + \frac{Bl^2}{2} + \frac{Cl^3}{3} + \frac{Dl^4}{4} \qquad (19)$$

$$-z = C_1\,l + \frac{Al^2}{2} + \frac{Bl^3}{6} + \frac{Cl^4}{12} + \frac{Dl^5}{20} \qquad (20)$$

Dabei ist C_1 die erste Integrations-Konstante, und die zweite Integrations-Konstante ist gleich Null, weil $l = 0$ auch $z = 0$ geben muss. Zur Bestimmung der Konstanten C_1 dient die Festsetzung, dass $l = 0$ geben muss $\frac{dz}{dl} = +\,\delta_1$ und $l = s$ giebt $\frac{dz}{dl} = -\,\delta_2$ und weiter weiss man, dass $l = s$ auch $z = 0$ geben muss, also:

$$\begin{aligned} -\,\delta_1 &= C_1 \\ +\,\delta_2 &= C_1 + As + \frac{Bs^2}{2} + \frac{Cs^3}{3} + \frac{Ds^4}{4} \\ 0 &= C_1 + \frac{As}{2} + \frac{Bs^2}{6} + \frac{Cs^3}{12} + \frac{Ds^4}{20} \end{aligned}$$

hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned}\delta_1 &= \frac{A\,s}{2} + \frac{B\,s^2}{6} + \frac{C\,s^3}{12} + \frac{D\,s^4}{20} \\ \delta_2 &= \frac{A\,s}{2} + \frac{B\,s^2}{3} + \frac{C\,s^3}{4} + \frac{D\,s^4}{5}\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Hier sind die Coëfficienten A, B, C, D von (18) einzusetzen, was nur noch eine algebraische Zusammensuchung der gleichartigen Teile verlangt und nach dem Ordnen, wenn zugleich $= s \sin t_1 = y_2 - y_1$ und $r \cos t_1 = x_2 - x_1$ gesetzt wird, geben wird:

$$\delta_1 = \frac{(x_2-x_1)(2y_1+y_2)}{6r^2} + \frac{(x_2-x_1)^3}{360\,r^4}(8y_1+7y_2) - \frac{(x_2-x_1)}{360\,r^4}(8y_1^3+21y_1^2y_2+24y_1y_2^2+7y_2^3) \quad (22)$$

und δ_2 entsprechend mit vertauschten 1 und 2:

$$\delta_2 = \frac{(x_1-x_2)(y_1+2y_2)}{6r^2} + \frac{(x_1-x_2)^3}{360\,r^4}(7y_1+8y_2) - \frac{(x_1-x_2)}{360\,r^4}(8y_2^3+21y_2^2y_1+24y_2y_1^2+7y_1^3) \quad (22a)$$

Integration für die Länge S des sphärischen Bogens.

Wir haben drei verschiedene Längen zu unterscheiden: die Bogenlänge S auf der Kugel, die Gerade s = Gerade $A\,B$ der Abbildung und die Kurvenlänge s' = Kurve $A\,B$ der Abbildung (vgl. Fig. 2. S. 453).

In differentialem Sinne besteht die Gleichung:

$$m = \frac{ds'}{dS} \qquad \text{oder} \qquad dS = \frac{1}{m}\,ds'$$

$$\text{also auch} \qquad S = \int \frac{1}{m}\,ds' \quad (23)$$

Dabei ist nach früherer Entwicklung (8) S. 452:

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{y^2}{2\,r^2} + \frac{5}{24}\frac{y^4}{r^4} \quad (24)$$

Das Differential ds', welches bei der früheren Entwicklung von § 50. auf $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich genau schlechthin $= dl$ gesetzt werden durfte, muss nun genauer angegeben werden:

$$ds' = \sqrt{dl^2 + dz^2} = dl\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dl}\right)^2\right)$$

Da $\frac{dz}{dl}$ schon $= \frac{1}{r^2}\ldots$ also $\left(\frac{dz}{dl}\right)^2 = \frac{1}{r^4}$ ist, sieht man alsbald, dass das Integral (23) in zwei Teile zerfällt:

$$S = \int_0^s \frac{1}{m}\,dl + \int_0^s \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dl}\right)^2 dl = \mathrm{I} + \mathrm{II} \quad (25)$$

Bleiben wir zunächst bei dem ersten Integral stehen, so müssen wir die Reihe (24) in eine Reihe mit steigenden Potenzen von l umformen.

Man hat dazu von (14) die Reihe für y, welche quadriert giebt:

$$\left.\begin{aligned}y^2 = y_1^2 &+ l\left(2\,y_1 \sin t_1 + \frac{y_1\,s \cos^2 t_1}{3\,r^2}(2\,y_1 + y_2)\right) \\ &+ l^2\left(\sin^2 t_1 - \frac{\cos^2 t_1}{3\,r^2}(5\,y_1^2 - y_1\,y_2 - y_2^2)\right) \\ &- l^3\,\frac{4}{3}\frac{y_1}{r^2}\sin t_1 \cos^2 t_1 - l^4\,\frac{1}{r^3}\sin^2 t_1 \cos^2 t_1 + \frac{1}{r^4}\ldots\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

und weiter:

$$y^4 = y_1^4 + l\,4\,y_1^3 \sin t_1 + l^2\,6\,y_1^2 \sin^2 t_1 + l^3\,4\,y_1 \sin^3 t_1 + l^4 \sin^4 t_1 \tag{27}$$

Wenn man damit den Ausdruck (24) zusammensetzt und nach Potenzen von ordnet, soll entstehen:

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{y^2}{2r^2} + \frac{5}{24}\frac{y^4}{r^4} = \alpha + \beta\,l + \gamma\,l^2 + \delta\,l^3 + \varepsilon\,l^4$$

also der erste Integralteil von (25):

$$\mathrm{I} = \alpha\,s + \frac{\beta\,s^2}{2} + \gamma\frac{s^3}{3} + \delta\frac{s^4}{4} + \varepsilon\frac{s^5}{5}$$

Hiezu muss man die Teile aus (26) und (27) zusammensuchen, wodurch man erhält:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{I}}{s} = 1 &- \frac{y_1^2}{2r^2} - \frac{y_1\,s \sin t_1}{2r^2} - \frac{s^2 \sin^2 t_1}{6r^2}\\
&+ \frac{1}{12\,r^4}\Big(-y_1 \cos^2 t_1\,(2\,y_1 + y_2) + 5\,y_1^3\,s \sin t_1\Big)\\
&+ \frac{1}{18\,r^4}\,s^2 \cos^2 t_1\Big(5\,y_1^2 - y_1\,y_2 - y_2^2\Big) + \frac{5}{12\,r^4}\,y_1^2\,s^2 \sin^2 t_1\\
&+ \frac{1}{6\,r^4}\,y_1\,s^3 \sin t \cos^2 t_1 + \frac{5}{24}\,y_1\,s^3 \sin^3 t_1\\
&+ \frac{1}{30\,r^4}\,s^3 \sin^2 t_1 \cos t_1 + \frac{1}{24\,r^4}\,s^4 \sin^4 t_1\end{aligned}$$

Wenn man hier überall $s \sin t_1 = y_2 - y_1$ und $s \cos t_1 = x_2 - x_1$ setzt und die gleichartigen Teile zusammensucht, so findet man:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{I}}{s} = 1 &- \frac{y_1^2 + y_1\,y_2 + y_2^2}{6\,r^2} - \frac{(x_2 - x_1)^2}{360\,r^4}(8\,y_1^2 + 14\,y_1\,y_2 + 8\,y_2^2)\\
&+ \frac{1}{24\,r^4}(y_1^4 + y_1^3\,y_2 + y_1^2\,y_2^2 + y_1\,y_2^3 + y_2^4)\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Um auch den zweiten Teil des Integrals (25) zu bestimmen, müssen wir auf (35) S. 285 zurückgreifen und entnehmen (mit $\eta = s$ und $\xi = l$):

$$\frac{dz}{dl} = \frac{s \cos t_1}{6\,r^2}\Big(2\,y_1 + y_2\Big) - \frac{l}{r^2}\,y_1 \cos t_1 - \frac{l^2}{2\,r^2} \sin t_1 \cos t_1$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dl}\right)^2 = \frac{\cos^2 t_1}{72\,r^4}\left\{\begin{aligned}&s^2(2\,y_1 + y_2)^2 - l\,12\,s\,y_1\,(2\,y_1 + y_2) + l^2\,36\,y_1^2 - l^2\,6\,s \sin t_1\,(2\,y_1 + y_2)\\
&\qquad\qquad + l^3\,36\,y_1 \sin t_1 + l^4\,9 \sin^2 t_1\end{aligned}\right\}$$

Dieses integriert giebt mit $s \sin t_1 = y_2 - y_1$:

$$\frac{\mathrm{II}}{s} = \frac{s^2 \cos^2 t_1}{72\,r^4}\left\{\begin{aligned}&(2\,y_1 + y_2)^2 - 6\,y_1(2\,y_1 + y_2) + 12\,y_1^2 - 2\,(y_2 - y_1)(2\,y_1 + y_2) + 9\,y_1(y_2 - y_1)\\
&\qquad + \frac{9}{5}\,(y_2 - y_1)^2\end{aligned}\right\}$$

All' dieses zusammengezogen vereinfacht sich sehr, und giebt schliesslich:

$$\frac{\mathrm{II}}{s} = \frac{(x_2 - x_1)^2}{360\,r^4}\Big\{4\,y_1^2 + 7\,y_1\,y_2 + 4\,y_2^2\Big\} \tag{29}$$

Wenn man die Teile I und II von (28) und (29) zusammennimmt, so hat man nach (25):

$$\left.\begin{aligned}\frac{S}{s} = \frac{\mathrm{I}}{s} + \frac{\mathrm{II}}{s} = 1 - \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6 r^2} - \frac{(x_2 - x_1)^2}{360 r^4}(4 y_1^2 + 7 y_1 y_2 + 4 y_2^2) \\ + \frac{1}{24 r^4}(y_1^4 + y_1^3 y_2 + y_1^2 y_2^2 + y_1 y_2^3 + y_2^4)\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Wenn man die Mittelordinate y_0 einführt nach der Gleichung

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$y_0^2 = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(y_1^2 + 2 y_1 y_2 + y_2^2)$$

$$y_0^4 = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}(y_1^4 + 4 y_1^3 y_2 + 6 y_1^2 y_2^2 + 4 y_1 y_2^3 + y_2^4)$$

und wenn man auch entsprechende Werte von $\frac{1}{m}$ einführt, nämlich nach (8):

$$\frac{1}{m_1} = 1 - \frac{y_1^2}{2 r^2} + \frac{5}{24}\frac{y_1^4}{r^4} \qquad \frac{1}{m_2} = 1 - \frac{y_2^2}{2 r^2} + \frac{5}{24}\frac{y_2^4}{r^4}$$

$$\frac{1}{m_0} = 1 - \frac{y_0^2}{2 r^2} + \frac{5}{24}\frac{y_0^4}{r^4}$$

so kann man das vorstehende (30) auch auf diese Form bringen:

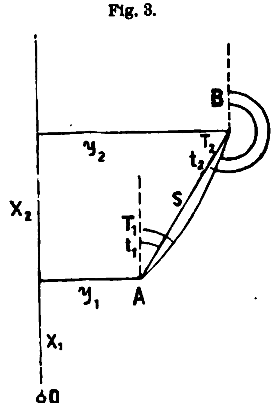
$$\frac{S}{s} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{m} + \frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_2}\right) - \frac{(x_2 - x_1)^2}{360 r^4}(4 y_1^2 + 7 y_1 y_2 + 4 y_2^2) - \frac{5 (x_2 - x_1)^4}{2880 r^4} \quad (31)$$

Das Ergebnis aller vorstehenden Entwicklungen und Betrachtungen ist enthalten in den zwei Gleichungen (22) und (22a) für die Richtungs-Reduktionen und in der Schlussgleichung (31) für die Entfernungs-Reduktion. Wenn man die Glieder mit $\frac{1}{r^4}$ weglässt, gehen die Formeln wieder zurück in die früheren Formeln (31), (32) und (13) in § 50. S. 284 und S. 282.

Einführung von Näherungen für verhältnismässig kleine $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$.

Wenn in einem sehr ausgedehnten System die Dreiecksseiten verhältnismässig klein sind gegen die Ordinaten selbst, so kann man die Glieder 4ter Ordnung, d. h. die Glieder mit $\frac{1}{r^4}$ unterscheiden in solche, bei welchen die Potenzen von y selbst oder nur Potenzen von $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$ überwiegen, und man kann letztere Glieder gegen erstere vernachlässigen.

Fig. 3.



Wir wollen dieses näher verfolgen im Anschluss an eine Abhandlung von Oberstlieutenant von Schmidt, Chef der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme, in „Zeitschr. f. Verm." 1894, S. 399—400, und indem wir die dort teilweise abweichenden Bezeichnungen in die unsrigen (Fig. 3) umsetzen, haben wir dort (7) 1894 S. 339 und (8) S. 340:

$$\log s - \log S = \frac{\mu}{8 A^2}(y_1 + y_2)^2 - \frac{\mu}{24 A^2}(y_2 - y_1)^2 - \frac{\mu}{192 A^4}(y_1 + y_2)^4 \quad (32)$$

$$T_1 - t_1 = \frac{\varrho}{4A^2}(y_1+y_2)(x_2-x_1) - \frac{\varrho}{12A^2}(y_2-y_1)(x_2-x_1) - \frac{\varrho}{48A^4}(y_1+y_2)^3(x_2-x_1) \quad (33)$$

Es ist nicht schwer, diese Formeln als Vereinfachungen unserer Formeln (30) und (22) nachzuweisen. Nehmen wir zuerst (30) mit Vernachlässigung des Gliedes $\frac{(x_2-x_1)^2}{r^4}\dots$ und mit Einführung des Mittelwertes $\frac{y_1+y_2}{2}$ im letzten Gliede von (30), so haben wir von dort:

$$\frac{S}{s} = 1 - \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6r^2} + \frac{1}{24r^4}\,5\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^4$$

Nach der logarithmischen Reihe S. 169:

$$l\left(\frac{S}{s}\right) = -\frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6r^2} + \frac{1}{384\,r^4}(y_1+y_2)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{6r^2}\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2\right)^2$$

$$lS - ls = -\frac{y_1^2 + y_1 y_2^2 + y_2^2}{6r_2} - \frac{1}{192\,r^4}(y_1+y_2)^4 \quad (34)$$

Das letzte Glied hier stimmt mit dem letzten Gliede von (32), und da auch die zwei ersten Glieder von (32) sich mit dem ersten Gliede von (34) als algebraisch identisch erweisen und der logarithmische Modul $l\,\mu$ in den Zeichen $log\ s$ und ls u. s. w. begründet ist, haben wir nun die Formel (32) als Vereinfachung von (30) nachgewiesen.

Noch kürzer ist einzusehen, wie (33) aus (22) hervorgeht, indem das Glied $\frac{(x_2-x_1)^3}{360\,r^4}\dots$ in (22) vernachlässigt wird und im letzten Gliede von (22) die Klammer $=60\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^3$ gesetzt wird. Auch dass die zwei ersten Glieder von (33) mit dem einen ersten Gliede von (22) identisch sind, wurde schon in §. 50. S. 284—285 oben bemerkt.

Die konstanten Coëfficienten-Logarithmen der Landesaufnahme-Formeln (32) und (33) sind schon zum Teile auf S. 285 unten angegeben. Die noch dazu gehörigen Coëfficienten 4ter Ordnung sind:

$$log\,\frac{\mu}{192\,A^4} = 7{\cdot}134\,373 \qquad log\,\frac{\varrho}{48\,A^4} = 6.431\,074$$

Eine praktische Anwendung der Formel (33) haben wir schon früher in Band I. 4. Aufl. 1895, S. 418—419 gegeben, bei dem Schlesisch-Posen schen Netze, mit $y =$ rund 350 000^m; das Glied 4ter Ordnung in (33) brachte dort noch 0,0197″.

§ 86. Konforme Gauss sche Coordinaten.

Die konformen rechtwinkligen Coordinaten mit Meridiananschluss, welche Gauss etwa um 1820—1830 in Hannover eingeführt hat, haben wir schon mehrfach im früheren erwähnt, in der geschichtlichen Übersicht von § 59. S. 328—329 und in der mathematischen Entwicklung erster Näherung von § 50.

Das Quellenwerk für diese klassischen Coordinaten ist: „Theorie der Projektionsmethode der Hannover schen Landesvermessung von *Oscar Schreiber*, Hauptmann im Königl. Hannov. 1. Jägerbataillon, Hannover, Hahn sche Hofbuchhandlung 1866“ mit einem Vorwort von Wittstein.

Im Nachfolgenden geben wir eine Bearbeitung dieser Schrift, in breiterer Darlegung als im Original und mit möglichst geometrischer Auseinandersetzung dessen, was im Original mehr nur analytisch vorgetragen wird.

Allerdings die Grundgleichung der konformen Abbildung auf Grund der Funktionen komplexer Veränderlicher, nämlich die nachfolgende Gleichung (6), $x + iy = f(q + i\lambda)$, müssen wir hier als bekannt voraussetzen.

Die Gauss schen Originalschriften über die Theorie der konformen Abbildung sind:

Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird, von C. F. Gauss. Als Beantwortung der von der Königlichen Societät der Wissenschaften in Kopenhagen für 1822 gestellten Preisaufgabe, veröffentlicht in Schumachers astronomischen Abhandlungen, Heft 3, Altona 1825.

Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie von Carl Friedrich Gauss, erste Abhandlung, der Königl. Societät überreicht 1843, Art. 23.

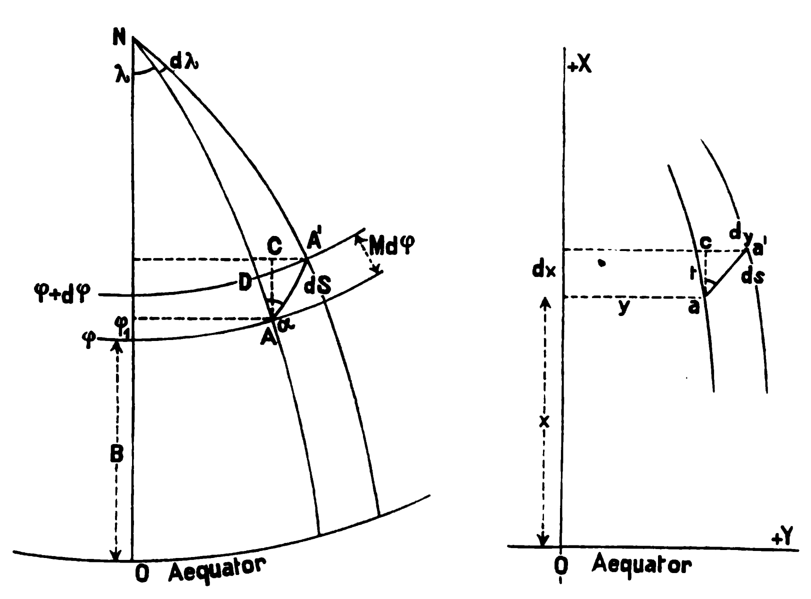
Den Hauptinhalt dieser Theorieen haben wir schon früher in unserem II. Bande, 2. Auflage, 1878, S. 377—379 abgedruckt u. kommentiert, weshalb es hier genügen mag, hierauf zurückzuverweisen, oder auf irgend ein mathematisches Werk über Funktionen komplexer Veränderlicher Bezug zu nehmen, zur Begründung der nachfolgenden Gleichung (6), der einzigen, die wir aus jenen allgemeinen Theorieen brauchen.

Hier ist auch nochmals das Hannover'sche Coordinatenverzeichnis mit Einleitung von Wittstein zu erwähnen, dessen genauer Titel schon in § 59. S. 329 (im Kleingedruckten) angegeben wurde.

Überall im Folgenden haben wir unsere gewöhnlichen Bezeichnungen V^2, η^2 u. s. w. angewendet, nach deren Umsetzung unsere Schlussformeln mit den Formeln von Schreiber und Wittstein übereinstimmen.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir über zur mathematischen Behandlung der Sache, indem wir in Fig. 1. ein Stück des Erd-Ellipsoids und in Fig. 2. dessen ebene konforme Abbildung betrachten.

Fig. 1. Ellipsoid. Fig. 2. Ebene.



Auf dem Ellipsoid Fig. 1. werden zwei Punkte A und A' betrachtet mit den Breiten φ und $\varphi + d\varphi$ und mit den Längen λ und $\lambda + d\lambda$; dann hat man ein unendlich kleines rechtwinkliges Dreieck $A D A'$, in welchem ist:

$$AD = M\,d\varphi \quad , \quad DA' = N \cos\varphi\, d\lambda$$

also $$A A' = d S = \sqrt{(M \, d \varphi)^2 + (N \cos \varphi \, d \lambda)^2} \tag{1}$$

Dabei sind M und N wie gewöhnlich die beiden Hauptkrümmungs-Halbmesser, und indem wir auch wie sonst $N : M = V^2$ setzen und weiter zur Abkürzung einführen:

$$\frac{d \varphi}{\cos \varphi} \frac{M}{N} = \frac{d \varphi}{V^2 \cos \varphi} = d q \tag{2}$$

erhalten wir (1) in dieser neuen Form:

$$d S = N \cos \varphi \sqrt{d q^2 + d \lambda^2} \tag{3}$$

Ausser dem Dreieck $A D A'$ besteht auf dem Ellipsoid noch ein zweites ebenfalls rechtwinkliges Dreieck $A C A'$, welches zur Bildung rechtwinkliger Coordinaten konform abgebildet wird in der Ebene Fig. 2. durch das Dreieck $a c a'$ mit der Hypotenuse $d s$; es ist also in der Ebene:

$$d s = \sqrt{d x^2 + d y^2} \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt das Vergrösserungsverhältnis:

$$m = \frac{d s}{d S} = \frac{\sqrt{d x^2 + d y^2}}{\sqrt{d q^2 + d \lambda^2} \, N \cos \varphi} \tag{5}$$

Nun kommt die allgemeine Theorie der konformen Abbildung in Betracht, welche wir bereits in der Einleitung dieses Paragraphen erwähnt haben.

Diese allgemeine Theorie sagt aus, dass die in (5) behandelte Abbildung dann konform ist, wenn $x + i y$ eine Funktion von $q + i \lambda$ oder von $q - i \lambda$ ist, d. h. es muss sein:

$$(x + i y) = f(q + i \lambda) \tag{6}$$

wobei f eine zunächst beliebige Funktion bedeutet, über welche nachher weiter verfügt werden soll.

Die Funktion f in (6) wird nach der Taylor schen Reihe entwickelt:

$$f(q + i \lambda) = f(q) + (i \lambda) \frac{d f(q)}{d q} + \frac{(i \lambda)^2}{2} \frac{d^2 f(q)}{d q^2} + \frac{(i \lambda)^3}{6} \frac{d^3 f(q)}{d q^3} + \ldots .$$

Da $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$ u. s. w., so giebt dieses:

$$f(q + i \lambda) = f(q) + (i \lambda) \frac{d f(q)}{d q} - \frac{\lambda^2}{2} \frac{d^2 f(q)}{d q^2} - \frac{i \lambda^3}{6} \frac{d^3 f(q)}{d q^3} + \ldots$$

Die Funktion $f(q)$, welche bisher noch unbestimmt ist, muss nun entschieden werden, und zwar soll dafür genommen werden der Meridianbogen B vom Aequator bis zur Breite φ, wie in Fig. 1. eingeschrieben ist. Dieser Bogen B ist eine Funktion von φ; in unserem früheren § 35. ist B in einer Reihe als Funktion von φ, $\sin 2\varphi$, $\sin 4\varphi$ u. s. w. entwickelt worden, und die Zahlenwerte B sind tabellarisch genügend dargestellt in unseren Tafeln Seite [38] und [55]—[57] des Anhangs.

Da auch $d q$ nach (2) eine Funktion von φ ist, und da von $f(q)$ nichts weiter verlangt wird, als dass es eine Funktion von q sein soll, so entspricht die Wahl $f(q) = B$ der gestellten Konformitätsbedingung und führt andererseits die Aufgabe ihrem geodätischen Ziele entgegen. Indem wir nach (6) zurückgreifen, haben wir also:

$$x + i y = B + i \lambda \frac{d B}{d q} - \frac{\lambda^2}{2} \frac{d^2 B}{d q^2} - i \frac{\lambda^3}{6} \frac{d^3 q}{d q^3} + \frac{\lambda^4}{24} \frac{d^4 B}{d q^4} + \frac{i \lambda^5}{120} \frac{d^5 B}{d q^5} - \frac{\lambda^6}{720} \frac{d^6 B}{d q^6} + \ldots$$

Die Vergleichung der reellen und der imaginären Teile giebt:

$$x = B - \frac{\lambda^2}{2} \frac{d^2 B}{d q^2} + \frac{\lambda^4}{24} \frac{d^4 B}{d q^4} - \frac{\lambda^6}{720} \frac{d^6 B}{d q^6} + \ldots \tag{7}$$

$$y = +\lambda \frac{dB}{dq} - \frac{\lambda^3}{6} \frac{d^3B}{dq^3} + \frac{\lambda^5}{120} \frac{d^5B}{dq^5} + \ldots \tag{8}$$

Die Form dieser zwei Reihen ist sofort einleuchtend, weil der als x-Axe genommene Meridian eine Symmetralaxe ist. Der Wert $x - B$ kann als Potenzreihe nur die geraden Potenzen $\lambda^2, \lambda^4 \ldots$ enthalten, und es muss mit $\lambda = 0, x - B = 0$, d. h. $x = B$ werden. Ebenso zweifellos muss mit $\lambda = 0$ auch $y = 0$ werden, und da y mit λ gleiches Zeichen haben, im übrigen für $\pm \lambda$ absolut genommen gleich bleiben muss, kann die Reihe (8) nur die ungeraden Potenzen $\lambda, \lambda^3 \ldots$ enthalten.

Die Ableitungen von B nach q müssen ausgeführt werden, wozu man hat:

$$dB = M\,d\varphi = \frac{c}{V^3}\,d\varphi \quad \text{und} \quad \frac{dq}{d\varphi} = \frac{1}{V^2 \cos\varphi} \tag{9}$$

also
$$\frac{dB}{dq} = \frac{c}{V} \cos\varphi \tag{10}$$

$$\frac{d^2B}{dq\,d\varphi} = -\frac{c}{V^2}\frac{dV}{d\varphi}\cos\varphi - \frac{c}{V}\sin\varphi$$

Schon früher gebraucht (§. 34. S. 208) ist $\dfrac{dV}{d\varphi} = -\dfrac{\eta^2}{V}t$, also

$$\frac{d^2B}{dq\,d\varphi} = \frac{c}{V^3}\left(\eta^2 \sin\varphi - V^2 \sin\varphi\right) = \frac{c}{V^3}\sin\varphi\left(\eta^2 - (1+\eta^2)\right)$$

$$\frac{d^2B}{dq^2} = \frac{-c}{V^3}\sin\varphi\frac{d\varphi}{dq} = -\frac{c\sin\varphi\cos\varphi}{V} \tag{11}$$

Wenn man in diesen Formeln weiter differentiiert, so bekommt man:

$$\frac{d^3B}{dq^3} = -\frac{c\cos^3\varphi}{V}(1 - t^2 + \eta^2) \tag{12}$$

$$\frac{d^4B}{dq^4} = +\frac{c}{V}\sin\varphi\cos^3\varphi\,(5 - t^2 + 9\,\eta^2 + 4\,\eta^4) \tag{13}$$

Von hier ab wollen wir nur noch die sphärischen Glieder, d. h. die Glieder ohne η^2 differentiieren, und finden mit solcher Abkürzung:

$$\frac{d^5B}{dq^5} = +\frac{c}{V}\cos^5\varphi\,(5 - 18\,t^2 + t^4) \tag{14}$$

$$\frac{d^6B}{dq^6} = -\frac{c}{V}\sin\varphi\cos^5\varphi\,(61 - 58\,t^2 + 4\,t^4) \tag{15}$$

Nun kann man die Formeln für x und y nach (7) und (8) zusammensetzen, zugleich mit Berücksichtigung, dass $\dfrac{c}{V} = N$ ist und mit Zusetzung der nötigen ϱ:

$$\left.\begin{aligned} x = B + \frac{\lambda^2}{2}\frac{N}{\varrho^2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\lambda^4}{24}\frac{N}{\varrho^4}\sin\varphi\cos^3\varphi\,(5 - t^2 + 9\,\eta^2 + 4\,\eta^4) \\ + \frac{\lambda^6}{720}\frac{N}{\varrho^6}\sin\varphi\cos^5\varphi\,(61 - 58\,t^2 + 4\,t^4) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$y = \lambda\frac{N}{\varrho}\cos\varphi + \frac{\lambda^3}{6}\frac{N}{\varrho^3}\cos^3\varphi\,(1 - t^2 + \eta^2) + \frac{\lambda^5}{120}\frac{N}{\varrho^5}\cos^5\varphi\,(5 - 18\,t^2 + t^4) \tag{17}$$

Dieses sind die Formeln von Schreiber (6) S. 10, abgesehen von den Gliedern mit η^2 u. s. w. n den Gliedern 5ter und 6ter Ordnung, und innerhalb der 4ten Ordnung haben wir damit die Formeln von Wittstein, S. X. oben.

In erster Näherung stimmen diese Formeln (16) und (17) auch mit unseren früheren (11) und (12) § 58. S. 323.

In den Formeln (16) und (17) sind φ und λ die gegebenen geographischen Coordinaten eines Punktes, und zwar λ nach Osten positiv gezählt von irgend einem Meridian, der als x-Axe eines rechtwinkligen konformen Coordinatensystems angenommen ist. B bedeutet den Meridianbogen vom Äquator bis zur Breite φ, x und y sind die gesuchten ebenen konformen Coordinaten, und zwar x gezählt wie B vom Äquator der Erde, y rechtwinklig zu x, nach Osten positiv wie λ (vgl. Fig. 1. und 2. S. 459).

Da B und x auf diese Weise sehr grosse Zahlen werden, kann man sie beliebig abkürzen oder von irgend einem Nullpunkt in dem Vermessungsbereich selbst zählen. Doch spielt das in der Theorie keine Rolle, weil immer nur die Differenz $x - B$ in den Formeln auftritt, und deswegen rechnen wir am einfachsten in den Formeln mit B selbst.

Umkehrung der Formeln (16) und (17).

Man kann die Formeln für x und y geradezu umkehren, was wir nun ausführen wollen, aber nur bis zu Gliedern von der 4ten Ordnung einschliesslich, d. h. also zunächst aus (16) und (17):

$$x - B = \frac{\lambda^2}{2} N \sin\varphi \cos\varphi + \frac{\lambda^4}{24} N \sin\varphi \cos^3\varphi \, (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \tag{18}$$

$$y = \lambda N \cos\varphi + \frac{\lambda^3}{6} N \cos^3\varphi \, (1 - t^2 + \lambda^2) \tag{19}$$

Zuerst wird (19) umgekehrt mit erster Näherung $\lambda = \frac{y}{N\cos\varphi}$, welche ins zweite Glied gesetzt giebt:

$$\lambda = \frac{y}{N\cos\varphi} - \frac{y^3}{6N^3\cos\varphi}(1 - t^2 + \eta^2) \tag{20}$$

Daraus bildet man auch die zweite Ordnung:

$$\lambda^2 = \frac{y^2}{N^2\cos^2\varphi} - \frac{y^4}{3N^4\cos^2\varphi}(1 - t^2 + \eta^2)$$

und dieses in (18) eingesetzt giebt:

$$x - B = \frac{y^2 t}{2N} + \frac{y^4 t}{24 N^3}(1 + 3t^2 + 5\eta^2 + 4\eta^4) \tag{21}$$

Nach diesem soll der Meridianbogen $x - B$ in der zugehörigen Breitendifferenz $\varphi_1 - \varphi$ ausgedrückt werden, was nach dem früheren § 35. Gleichung (37), S. 218 mit φ_1 als Ausgangsbreite sich so giebt:

$$B - x = M_1(\varphi - \varphi_1) + \frac{3}{2}\frac{M_1}{V_1^2}\eta_1^2 t_1 (\varphi - \varphi_1)^2$$

oder

$$x - B = M_1(\varphi_1 - \varphi) - \frac{3}{2}\frac{M_1}{V_1^2}\eta_1^2 t_1 (\varphi_1 - \varphi)^2 \tag{22}$$

Dabei gehören M_1, $\eta_1^2 t_1$, alle zu der Fusspunktsbreite φ_1, während in (18)—(21) alles sich auf die Breite φ des Punktes selbst bezog. Aus (21) und (22) bekommt man als erste Näherung für die Breitendifferenz $\varphi_1 - \varphi$:

$$\varphi_1 - \varphi = \frac{y^2}{2M_1 N} t \quad , \quad \varphi = \varphi_1 - \frac{y^2 t}{2M_1 N} \tag{23}$$

Hieraus $$\tan\varphi = \tan\varphi_1 - \frac{y^2 t}{2M_1 N}(1 + t_1^2)$$



Für den weiteren Gebrauch in den höheren Gliedern braucht aber t^1 und t, sowie N_1 und N nicht mehr unterschieden zu werden, also:

$$t = t_1 - \frac{y^2 t_1}{2 M_1 N_1}(1 + t_1^2) = t_1 - \frac{y^2 t_1}{2 N_1^2}(1 + \eta_1^2)(1 + t_1^2)$$

Dabei ist berücksichtigt, dass allgemein $N : M = V^2 = 1 + \eta^2$ ist, also:

$$t = t_1 - \frac{y^2 t_1}{2 N_1^2}(1 + t_1^2 + \eta_1^2 + \eta_1^2 t_1^2) \tag{23a}$$

Dieses in (21) eingesetzt giebt:

$$x - B = \frac{y^2 t_1}{2 N} + \frac{y^4 t_1}{24 N_1^3}(-5 - 3 t^2 - \eta^2 - 6 \eta^2 t^2 + 4 \eta^4) \tag{24}$$

Weiter muss im ersten Gliede N durch N_1 ersetzt werden, was nach früherem § 34. S. 208, unten Gleichung (1), geschieht. Wir wollen dabei auch bemerken, dass in den höheren Gliedern φ und φ_1 u. s. w. nicht mehr unterschieden wird. Damit ist nach der citierten Gleichung unten auf S. 208 mit Rücksicht auf (23):

$$\frac{N_1}{N} = 1 + \frac{(\varphi_1 - \varphi)}{V^2}\eta^2 t = 1 + \frac{y^2 \eta^2 t^2}{2 M N V^2} = 1 + \frac{y^2 \eta^2 t^2}{2 N^2} \tag{25}$$

Dieses mit (24) giebt:

$$x - B = \frac{y^2 t_1}{2 N_1} + \frac{y^4 t_1}{24 N_1^3}(-5 - 3 t^2 - \eta^2 + 4 \eta^4) \tag{26}$$

Nun sind die Ausdrücke in (22) und (26) einander gleich, was vollends die Auflösung nach $\varphi_1 - \varphi$ giebt:

$$\varphi_1 - \varphi = \frac{y^2 t_1}{2 M_1 N_1} - \frac{y^4 t_1}{24 M_1 N_1^3}(5 + 3 t^2 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2 - 4 \eta^4) \tag{27}$$

Damit ist die erste Formel (18) vollständig umgekehrt, und um auch vollends (19), d. h. die vorläufig schon hergerichtete (20) zu erledigen, brauchen wir von (23) mit $N : M = V^2 = 1 + \eta^2$ die Entwicklung:

$$\cos \varphi = \cos \varphi_1 + \frac{y^2 t_1}{2 M_1 N_1} \sin \varphi_1 = \cos \varphi_1 + \frac{y^2 t_1}{2 N_1^2}(1 + \eta^2) \sin \varphi_1$$

Dazu nach (25):

$$\frac{1}{N \cos \varphi} = \frac{1}{N_1 \cos \varphi_1}\left(1 + \frac{y^2 \eta^2 t^2}{2 N^2} - \frac{y^2 t^2}{2 N^2}(1 + \eta^2)\right)$$

$$\frac{1}{N \cos \varphi} = \frac{1}{N_1 \cos \varphi_1}\left(1 - \frac{y^2 t^2}{2 N^2}\right)$$

Dieses in (20) eingesetzt giebt alsbald:

$$\lambda = \frac{y}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{y^3}{6 N_1^3 \cos \varphi_1}(1 + 2 t^2 + \eta^2) \tag{28}$$

Nun haben wir in (27) und (28) die gewünschten Formeln zur Bestimmung von φ und λ und indem wir auch die nötigen ϱ zusetzen, stellen wir zusammen als Gebrauchsformeln:

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{y^2 t_1}{2 M_1 N_1}\varrho + \frac{y^4 t_1 \varrho}{24 M_1 N_1^3}(5 + 3 t_1^2 + \eta_1^2 - 9 \eta_1^2 t_1^2 - 4 \eta_1^4) \tag{29}$$

$$\lambda = \frac{y \varrho}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{y^3 \varrho}{6 N_1^3 \cos \varphi_1}(1 + 2 t_1^2 + \eta_1^2) \tag{30}$$

Diese Formeln entsprechen den Formeln von Schreiber (11) S. 25 und Wittstein S. X. unten. Diese Formeln stimmen auch in erster Näherung mit unseren früheren (8) und (9) § 58. S. 323.

Meridian-Konvergenz.

Wenn in Fig 3. NAS das konforme Bild eines Meridians, und WAE das konforme Bild eines Parallelkreises ist, wobei sich diese beiden Linien in einem Punkte A schneiden, durch welchen wir auch die Parallelen AB und AC mit den Coordinatenaxen ziehen, so entsteht ein kleiner Winkel γ, welchen hier Gauss „Meridian-Konvergenz" nennt (vgl. hiezu den Schluss dieses §, S. 465).

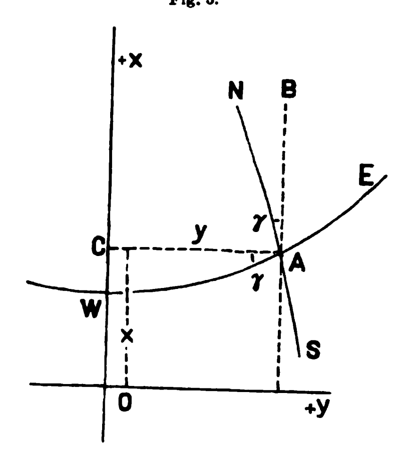


Fig. 3.

Wenn wir die Gleichung des Parallelkreis-Bildes WAE als Funktion zwischen den ebenen rechtwinkligen Coordinaten x und y aufstellen können, so brauchen wir nur noch $\frac{dx}{dy}$ zu bilden, um $tang\,\gamma$ zu haben.

Um in diesem Sinne die Gleichung des Parallelkreises zu bilden, brauchen wir nur φ konstant zu denken, und λ allein veränderlich, d. h. wir leiten die Gleichungen (18) und (19) partiell nach λ ab, und erhalten damit:

$$\frac{dx}{d\lambda} = \lambda N \sin\varphi \cos\varphi + \frac{\lambda^3}{6} N \sin\varphi \cos^3\varphi\,(5 - t^2 + 9\,\eta^2 + 4\,\eta^4) \tag{31}$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = N\cos\varphi + \frac{\lambda^2}{2} N \cos^3\varphi\,(1 - t^2 + \eta^2) \tag{32}$$

Die Division von (31) und (32) giebt:

$$\frac{dx}{dy} = \left\{\lambda \sin\varphi + \frac{\lambda^3}{6} \sin\varphi \cos^2\varphi\,(5 - t^2 + 9\,\eta^2 + 4\,\eta^4)\right\}\left\{1 - \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\,(1 - t^2 + \eta^2)\right\}$$

$$\frac{dx}{dy} = \lambda \sin\varphi + \frac{\lambda^3}{6} \sin\varphi \cos^2\varphi\,(2 + 2\,t^2 + 6\,\eta^2 + 4\,\eta^4) = tang\,\gamma$$

Nun ist nach der *arc tang*-Reihe § 28. S. 172:

$$\gamma = tang\,\gamma - \frac{tang^3\gamma}{3}, \quad \text{wobei} \quad \frac{tang^3\gamma}{3} = \frac{\lambda^3}{3} \sin\varphi \cos^2\varphi\, t^2$$

also mit dem vorhergehenden

$$\gamma = \frac{dy}{dx} - \frac{\lambda^3}{6}\, 2 \sin\varphi \cos^2\varphi\,(2\,t^2)$$

und alles zusammengenommen:

$$\gamma = \lambda \sin\varphi + \frac{\lambda^3}{3} \sin\varphi \cos^2\varphi\,(1 + 3\,\eta^2 + 2\,\eta^4) \tag{33}$$

Diese Gleichung ist anzuwenden, wenn ein Punkt durch φ und λ gegeben ist; wenn aber x und y als gegeben vorliegen, dann empfiehlt es sich, erstens λ in y auszudrücken und zweitens auch alles, was von φ abhängt, auf φ_1, d. h. auf die Fusspunktsbreite zu reduzieren.

Für das erste haben wir von (20):

$$\lambda = \frac{y}{N\cos\varphi} - \frac{y^3}{6\,N^3\cos\varphi}(1 - t^2 + \eta^2)$$

Dieses in (33) eingesetzt giebt:

$$\gamma = \frac{y}{N}\,t + \frac{y^3\,t}{6\,N^3}\,(1 + t^2 + 5\,\eta^2 + 4\,\eta^4)$$

Weiter haben wir für t und N bereits die Gleichungen (23a) und (25), welche zusammen geben:

$$\frac{t}{N} = \frac{t_1}{N_1}\left(1 - \frac{y^2}{2\,N_2}\,(1 + t^2 + \eta^2 + \eta^2\,t^2)\right)\left(1 + \frac{y^2}{2\,N^2}\,\eta^2\,t^2\right)$$

Dieses mit dem vorhergehenden vereinigt giebt endlich:

$$\gamma = \frac{y}{N_1}\,t_1 - \frac{y^3}{3\,N_1^3}\,t_1\,(1 + t_1^2 - \eta_1^2 - 2\,\eta_1^4) \qquad (34)$$

Die Zeichen N_1 und t_1 deuten an, dass diese Werte, z. B. $t_1 = tang\,\varphi_1$, als Funktion der Fusspunktsbreite φ_1 zu nehmen sind, welche der vom Äquator an rektifizierten Meridianbogenlänge x entspricht. Auch in den höheren Gliedern der Formel (34) haben wir durchaus $t_1\,\eta_1^2$ u. s. w. in diesem Sinne geschrieben, obgleich in der vorhergehenden Entwicklung die Unterscheidung von φ und φ_1 in den höheren Gliedern nicht eingehalten wurde, weil sie in der ohnehin zugelassenen Vernachlässigung der nächstfolgenden y^5 u. s. w. keine Konsequenz mehr hat.

Die Gleichung (34) stimmt innerhalb ihrer Ordnung mit Schreiber, Formel c S. 31, und vollständig mit der Formel c von Wittstein, S. XI, welche auch nur bis zu y^3 einschliesslich geht.

Wahre Meridian-Konvergenz.

Die Meridian-Konvergenz γ, wie sie im Anschluss an Fig. 3. S. 464 definiert wurde, ist von der besonderen Natur der vorliegenden Abbildungsart abhängig und entspricht nicht genau der Definition Meridian-Konvergenz $\alpha' - \alpha$ von Fig. 3. in § 60. S. 345, wie auch schon auf S. 346 bemerkt wurde.

Fig. 4.
Ellipsoid.

Um auch die Meridian-Konvergenz in dem früheren Sinne $\alpha' - \alpha$ Fig. 3. S. 345 zu bestimmen, betrachten wir in Fig. 4. einen Punkt A mit der Breite φ und der Länge λ gegen den Anfangsmeridian NO, auf welchem in der Breite φ_1 eine geodätische Linie $\varphi_1'\,A$ rechtwinklig nach A abgeht, so dass man sagen kann, auf dem Ellipsoide sei von O bis φ_1' die Abscisse und von φ_1' bis A die Ordinate des Punktes A, und zwar Abscisse und Ordinate beide als *geodätische* Linien verstanden.

Ausser dem Punkte φ_1' nehmen wir noch auf dem Meridian $O\,N$ einen Punkt φ_1, von welchem ebenfalls rechtwinklig eine Linie nach A abgeht (in Fig. 4. punktiert gezeichnet); diese zweite Linie $\varphi_1\,A$ ist aber *nicht* eine geodätische Linie, sondern eine sehr flach gekrümmte andere Linie, von welcher sich nachher ergeben wird, dass sie das Ellipsoid-Bild zu der geraden Ordinaten-Linie y des konformen Coordinatensystems ist.

Wenn in A die zwei Tangentialrichtungen $A P_1'$ und $A P_1$ rechtwinklig auf $A \varphi_1'$ und auf $A \varphi_1$ gezogen werden, so ist $N A P_1' = \gamma'$ die Meridian-Konvergenz zwischen φ_1' und A in dem gewöhnlichen Sinne von $\alpha' = \alpha$ in Fig. 3. S. 345.

Um diese wahre Meridian-Konvergenz γ' zu bestimmen, nehmen wir von den Reihenentwicklungen des früheren § 74. Gleichung (27) S. 396 bis zur dritten Ordnung mit $u = 0$ und $v = \frac{y}{N_1}$ und $t = tang\, \varphi_1'$ für die Ausgangsbreite φ_1':

$$\alpha' - \alpha = \gamma' = \frac{y}{N_1} tang\, \varphi_1' - \frac{y^3}{6 N_1^3} tang\, \varphi_1' (1 + 2\, tang^2 \varphi_1' + \eta_1^2) \tag{35}$$

Hiezu von (26) S. 395 mit denselben Substitutionen:

$$\lambda \cos \varphi_1' = \frac{y}{N_1} - \frac{y^3}{3 N_1^3} tang^2 \varphi_1' \tag{36}$$

Also durch Division von (35) und (36):

$$\gamma' = \lambda \sin \varphi_1' \left(1 - \frac{y^2}{6 N_1^2}(1 + \eta^2)\right)$$

$$\gamma' = \lambda \sin \varphi_1' - \frac{\lambda^3}{6} \sin \varphi_1' \cos^2 \varphi_1' (1 + \eta^2) \tag{37}$$

Zur Reduktion von der Fusspunktsbreite φ_1' auf die Punktbreite φ können wir als hinreichend die frühere Formel (17) § 55. S. 305 nehmen:

$$\varphi_1' = \varphi + \frac{V^2 \lambda^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi$$

also $$\sin \varphi_1' = \sin \varphi + \frac{V^2 \lambda^2}{2} \sin \varphi \cos^2 \varphi$$

Dieses wird mit (37) verbunden, wobei $1 + \eta^2\; V^2$ zu beachten ist, also:

$$\gamma' = \lambda \sin \varphi + \frac{\lambda^3 V^2}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi \tag{38}$$

Dieses ist die wahre Meridian-Konvergenz, welche mit der Gauss schen Meridian-Konvergenz γ in (33) verglichen giebt:

$$\gamma - \gamma' = \frac{\lambda^3}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi (2 \eta^2 + 2 \eta^4)$$

oder in erster Näherung genügend:

$$\gamma - \gamma' = \frac{2}{3} \lambda^3 \eta^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi \tag{39}$$

Dieses ist auch der kleine Winkel $P_1' A P_1$ in Fig. 4., und da dieser Winkel besteht und nicht gleich Null ist, so wird erkannt, dass die geodätische Linie $\varphi_1' A$ *nicht* das ellipsoidische Bild der ebenen Ordinate y sein kann, sondern dass eine andere Linie $\varphi_1 A$ für jenes Bild eintreten muss.

Der ellipsoidische Faktor η^2 in (37) zeigt, dass die Differenz $\gamma - \gamma'$ nur auf dem Ellipsoid, nicht aber auf der Kugel existiert.

§ 87. Vergrösserungsverhältnis.

Nach (1) und (5) § 86. S. 460 ist das Vergrösserungsverhältnis m bestimmt durch:

$$m^2 = \frac{d s^2}{d S^2} = \frac{d x^2 + d y^2}{(M d \varphi)^2 + (N \varphi \cos d \lambda)^2}$$

$$m^2 = \frac{d\,y^2}{d\,\lambda^2} \frac{1 + \left(\frac{d\,x}{d\,y}\right)^2}{N^2 \cos^2 \varphi \left(1 + \left(\frac{M\,d\,\varphi}{N \cos \varphi\, d\,\lambda}\right)^2\right)} \tag{1}$$

Nach Fig. 1. und 2. § 86. S. 459 hat man in den rechtwinkligen Dreiecken:

$$\frac{d\,x}{d\,y} = cotg\, t \quad \text{und} \quad \frac{M\,d\,\varphi}{N \cos \varphi\, d\,\lambda} = cotg\, \alpha$$

Wo t der Richtungswinkel im ebenen System und α das Azimut auf dem Ellipsoid ist, damit wird (1):

$$m^2 = \frac{d\,y^2}{d\,\lambda^2} \frac{1 + cotg^2\, t}{N^2 \cos^2 \varphi\,(1 + cotg^2\, \alpha)}$$

$$m = \frac{d\,y}{d\,\lambda} \frac{1}{N \cos \varphi} \frac{\sin \alpha}{\sin t} \tag{2}$$

Wir betrachten nun besonders den Fall, dass $\alpha = 90°$ werde, d. h. dass der Ellipsoidbogen $d\,S$ auf einem Parallelkreis liege, was zur Folge hat, dass φ konstant ist und ferner, dass $t = 90° - \gamma$ wird, wenn γ die Meridian-Konvergenz ist, welche in Fig. 3. S. 464 konform abgebildet wird. Damit erhält man aus (2):

$$m = \frac{d\,y}{d\,\lambda} \frac{\sec \gamma}{N \cos \varphi} \tag{3}$$

Hiezu hat man aus (32) § 86. S. 464:

$$\frac{d\,y}{d\,\lambda} = N \cos \varphi + \frac{\lambda^2}{2} N \cos^3 \varphi\,(1 - t^2 + \eta^2)$$

also
$$\frac{d\,y}{d\,\lambda} \frac{1}{N \cos \varphi} = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi\,(1 - t^2 + \eta^2) \tag{4}$$

Ferner hat man aus (33) § 86. S. 464:

$$\gamma = \lambda \sin \varphi + \lambda^3 \ldots \qquad \sec \gamma = 1 + \frac{\gamma^2}{2} = 1 + \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{2} + \ldots \tag{5}$$

Dieses genügt, um in erster Nährung m zu bilden, nämlich als Produkt von (4) und (5):

$$m = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi\,(1 - t^2 + \eta^2) + \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \varphi$$

$$m = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi\,(1 + \eta^2) \tag{6}$$

Das ist zunächst nur das Vergrösserungsverhältnis in der Richtung des Parallelkreises, also rechtwinklig zum Meridian; da aber bei der konformen Projektion m nach allen Seiten gleich ist, können wir das in (6) gefundene m sofort allgemein gelten lassen.

Um übrigens eine Probe zu haben, wollen wir doch auch noch m für den Meridian besonders bestimmen, und schreiben zu diesem Zwecke aus (1), (4) und (5) § 86. S. 460:

$$m^2 = \frac{d\,x^2}{d\,\varphi^2} \frac{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}{M^2 \left(1 + \left(\frac{N \cos \varphi\, d\,\lambda}{M\,d\,\varphi}\right)^2\right)}$$

Gehen wir auf den Meridian über, so wird hier nach Fig. 3. § 86. S. 464

$$\frac{dy}{dx} = -\tan\gamma \quad \text{und ferner} \quad d\lambda = 0,$$

$$\text{also} \qquad m = \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)\frac{\sec\varphi}{M}$$

Um $\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)$ zu bilden, hat man von (18) § 86. S. 462:

$$x = B + \frac{\lambda^2}{2} N \sin\varphi\cos\varphi + \lambda^4 \ldots$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = M + \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{dN}{d\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + N\cos^2\varphi - N\sin^2\varphi\right)$$

Dabei ist nach § 34. Gleichung (e) S. 208:

$$N = \frac{c}{V} \quad , \quad \frac{dN}{d\varphi} = \frac{c}{V^3}\eta^2 t$$

also
$$\frac{dx}{d\varphi} = M + \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{c}{V^3}\eta^2\sin^2\varphi + \frac{c}{V}\cos^2\varphi - \frac{c}{V}\sin^2\varphi\right)$$

$$= M + \frac{c}{V^3}\frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\left(1 - t^2 + \eta^2\right), \text{ dabei ist } M = \frac{c}{V^3}, \text{ also:}$$

$$\frac{dx}{d\varphi}\frac{1}{M} = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\left(1 - t^2 + \eta^2\right)$$

Das ist dasselbe wie bei (4), also muss auch die Weiterrechnung für m in der Meridianrichtung denselben Wert geben wie früher bei (4)—(6) in der Parallelkreisrichtung. Es ist also die Formel (6) allgemein giltig, in der Meridianrichtung, rechtwinklig dazu, und in allen Richtungen.

Um die Formel für m, welche in (6) nur bis λ^2 geht, auch noch bis $\lambda 4$ zu entwickeln, müssen wir auf (17) § 86. S. 461 zurückgehen und von dort entnehmen:

$$\frac{dy}{d\lambda}\frac{1}{N\cos\varphi} = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\left(1 - t^2 + \eta^2\right) + \frac{\lambda^4}{24}\cos^4\varphi\,(5 - 18\,t^2 + t^4) \qquad (7)$$

und von (33) § 86. S. 464:

$$\gamma = \lambda\sin\varphi + \frac{\lambda^3}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi\,(1 + 3\,\eta^2 + 2\,\eta^4)$$

$$\sec\gamma = 1 + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{5}{24}\gamma^4 = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\sin^2\varphi + \frac{\lambda^4}{24}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,(8 + 5\,t^2) \qquad (8)$$

Wenn man diese (8) und (7) nach Anleitung von (3) multipliziert, so erhält man:

$$m = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\,(1 + \eta^2) + \frac{\lambda^4}{24}\cos^4\varphi\,(5 - 4\,t^2) \qquad (9)$$

Das ist die Weiterentwicklung von (6) bis auf λ^4 einschliesslich, aber mit Weglassung aller Glieder η^2 u. s. w. in den Coëfficienten von λ^4. Innerhalb dieser Vernachlässigung stimmt unsere Formel (9) auch mit der entsprechenden Gleichung von Schreiber S. 36. (wie immer nach goniometrischer Umformung).

Es ist auch leicht, innerhalb der angenommenen Genauigkeit die Formel (9) auf y zu reduzieren, denn es ist nach (20) § 86. S. 462:

$$\lambda = \frac{y}{N\cos\varphi} - \frac{y^3}{6\,N^3\cos\varphi}(1 - t^2 + \ldots)$$

$$\lambda^2 = \frac{y^2}{N^2\cos^2\varphi} - \frac{y^4}{3\,N^4\cos^2\varphi}(1 - t^2 + \ldots)$$

Damit wird (9):

$$m = 1 + \frac{y^2}{2\,N^2}(1 + \eta^2) + \frac{y^4}{24\,N^4}(1 + \eta^2 \ldots)$$

Es ist aber $\quad N = \frac{c}{V} \quad$ und $\quad r = \frac{c}{V^2} \quad$ also $\quad \frac{1}{N^2} = \frac{V^2}{r^2} = \frac{1 + \eta^2}{r^2}$,

$$\text{also} \qquad m = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2} + \frac{y^4}{24\,r^4} \tag{10}$$

Der Nenner r^4 im zweiten Gliede gilt nur näherungsweise, doch kann man ihn wohl annehmen, da wir ja ohnehin alle $1 + \eta^2 \ldots$ im zweiten Gliede vernachlässigt haben. Darum ist auch inbegriffen, dass bei dem Übergang von λ auf y in N nicht mehr unterschieden wurde, ob es zu φ oder zu φ_1 gehören soll, d. h. es ist die Reduktion (25) § 86. S. 463 nicht mehr angebracht worden; und innerhalb der ersten Näherung haben wir nun in (10) wieder dieselbe Formel wie früher in der sphärischen Entwicklung von § 50. Gleichung (10) S. 281.

Entfernungs-Reduktion.

Wenn die wahre Länge einer geodätischen Linie auf dem Ellipsoid $= S$ und deren ebenes Abbild $= s$ ist und m das Vergrösserungsverhältnis in differentialem Sinne, so ist:

$$S = \int \frac{1}{m}\, ds \tag{11}$$

und hiezu ist der Wert von m aus der Formel (10) einzusetzen; wir wollen aber dabei das Glied mit r^4 nicht mitnehmen, weil eine hierauf sich erstreckende Integration schon früher in § 85. gemacht worden ist. Es wird also zunächst nur genommen:

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{y^2}{2\,r^2} \tag{12}$$

und insoweit könnte es scheinen, als ob die einfache Entwicklung von § 50. wieder ihre Stelle fände, allein jene Entwicklung war nur sphärisch mit konstantem r, während wir nun den mittleren Krümmungs-Halbmesser r nach den Ellipsoidgesetzen veränderlich annehmen müssen.

Es kommt dabei wieder die Änderung von V in Frage, nämlich nach (25) § 86. S. 463:

$$\frac{N_1}{N} = \frac{V}{V_1} = 1 - \frac{(\varphi - \varphi_1)}{V^2}\eta^2 t \qquad \text{oder} \qquad \frac{V^4}{V_1{}^4} = 1 - \frac{4\,(\varphi - \varphi_1)}{V^2}\eta^2 t$$

und da $\quad \frac{1}{r^2} = \frac{V^4}{c^2}$, hat man auch:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_1{}^2}\left(1 - \frac{4\,(\varphi - \varphi_1)}{V^2}\eta^2 t\right)$$

Es ist aber in erster Näherung:

$$\varphi - \varphi_1 = \frac{x - x_1}{M}$$

als[illegible] [illegible]ster Näherung:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_1{}^2}\left(1 - \frac{4\,(x - x_1)}{r}\eta^2 t\right) \tag{13}$$

Dabei ist im zweiten Glied einfach $V^2 M = N = r$ gesetzt, wofür auch r_1 geschrieben werden kann.

Aus (12) und (13) hat man also:

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{y^2}{2 r_1^2}\left(1 - \frac{4(x - x_1)}{r}\eta^2 t\right) \tag{14}$$

Dieses m gehöre zu einem Punkte mit den Coordinaten $x\,y$, an irgend welcher Stelle des Bogens $A\,C\,B$ von Fig. 2. § 85. S. 453, welcher als Abbild einer geodätischen Linie S auftritt. Wenn man nur bis zur 3ten Ordnung einschliesslich rechnet, so kann man sowohl die Gerade $A\,B$ als auch den Bogen $A\,s'\,B$ als Abbildlänge s der geodätischen Linie S annehmen, denn die Unterscheidung zwischen Bogen $A\,C\,B$ und Sehne $A\,B$ kam erst bei der 4ten Ordnung in Betracht, wie wir in § 85. bei (23) S. 455 gesehen haben.

Die Kurve $A\,B$ in Fig. 2. § 85. S. 455 sei bestimmt durch eine Gleichung zwischen l und z, indem ein schiefes Coordinatensystem gelegt wird mit $A\,B$ als Axe der l und einer Axe der z, welche gegen $A\,B$ um $+ 90°$ gedreht ist. Indessen brauchen wir innerhalb der angegebenen 3ten Ordnung die z selbst gar nicht zu berücksichtigen, es genügt zunächst zu setzen (als Abkürzung von (12) § 85. S. 453):

$$x = x_1 + l \cos t_1 \qquad y = y_1 + l \sin t_1 \tag{15}$$

also wird (14):

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{(y_1 + l \sin t_1)^2}{2 r_1^2}\left(1 - \frac{4\, l \cos t_1}{r}\eta^2 t)\right) \tag{16}$$

Es ist zu bemerken, dass das letzte t hier wie immer die Bedeutung $t = tang\,\varphi$ hat, während t_1 der Richtungswinkel von $A\,B$ im System $x\,y$ ist.

Die Gleichung (16) wird nach Potenzen von l geordnet, und soll dabei geben:

$$\frac{1}{m} = \alpha + \beta\, l + \gamma\, l^2 + \delta\, l^3 \tag{17}$$

Dann haben die Coëfficienten α, β, γ, δ folgende Bedeutungen:

$$\alpha = 1 - \frac{y_1^2}{2 r_1^2} \tag{18}$$

$$\beta = \quad - \frac{y_1 \sin t_1}{r_1^2} + \frac{2\, y_1^2 \cos t_1}{r^3}\eta^2 t \tag{19}$$

$$\gamma = \quad - \frac{\sin^2 t_1}{2 r_1^2} + \frac{4\, y_1 \sin t_1 \cos t_1}{r^3}\eta^2 t \tag{20}$$

$$\delta = \quad + \frac{2 \sin^2 t_1 \cos t_1}{r^3}\eta^2 t \tag{21}$$

Wenn man die Funktion (17) entsprechend (11) integriert und zwar zwischen den Grenzen $l = 0$ und $l = s$, so bekommt man:

$$\frac{S}{s} = \alpha + \frac{\beta\, s}{2} + \gamma \frac{s^2}{3} + \frac{\delta\, s^3}{4} \tag{22}$$

Andererseits führen wir drei Werte von $\frac{1}{m}$ ein, für den Anfang, für die Mitte und für den Endpunkt der Linie $A\,B$, nämlich:

$l = 0$ soll geben $\frac{1}{m_1} = \alpha$

$l = \frac{s}{2}$ „ „ $\frac{1}{m_0} = \alpha + \frac{\beta\, s}{2} + \gamma \frac{s^2}{4} + \delta \frac{s^3}{8}$

$l = s$ „ „ $\frac{1}{m_2} = \alpha + \beta\, s + \gamma\, s^2 + \delta\, s^3$

Dieses mit (22) verglichen wird geben:

$$\frac{S}{s} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_2}\right) \tag{23}$$

Wenn man also die drei verschiedenen $\frac{1}{m}$ nach der Funktion (12) ausrechnet, und zwar nicht bloss für die drei verschiedenen y, sondern auch mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit von r, entsprechend den geographischen Breiten φ_1, φ_0, φ_2 oder den Abscissen x_0, x_1, x_2, so bekommt man nach (23) die richtige Entfernungs-Reduktion, ohne dass man dabei die Coëfficienten α, β, γ, δ gebraucht hätte; es hat genügt einzusehen, dass sich $\frac{1}{m}$ durch eine Funktion 3ten Grades von der Form (17) ausdrücken lässt.

Trotzdem wollen wir doch auch noch den Ausdruck (22) mit Einsetzung der Coëfficientenwerte α, β, γ, δ nach (18)—(21) bilden, und zwar mit Umsetzung $s \sin t_1 = y_2 - y_1$ und $s \cos t_1 = x_2 - x_1$, wodurch man erhält:

$$\frac{S}{s} = 1 - \frac{1}{6\,r_1^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) + \frac{\eta^2 t}{6\,r^3}(x_2 - x_1)(y_1^2 + 2\,y_1 y_2 + 3\,y_2^2) \tag{24}$$

Hier kann man noch r_1 auf den Mittelwert r_0 reduzieren, nach (13):

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{r_0^2}\left(1 + \frac{4\,(x - x_1)}{r}\,\eta^2\,t\right)$$

Dieses mit (24) verbunden giebt:

$$\frac{S}{s} = 1 - \frac{1}{6\,r_0^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) - \frac{\eta^2 t}{6\,r^2}(x_2 - x_1)(y_2^2 - y_1^2) \tag{25}$$

Hier gilt r_0 als mittlerer Krümmungs-Halbmesser für die mittlere Breite φ_0 oder für die mittlere Abscisse x_0 der betrachteten Linie $A\,B$.

Die Gleichung (25) in logarithmischer Form geschrieben wird:

$$\log S - \log s = -\frac{\mu}{6\,r_0^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) - \frac{\mu\,\eta^2 t}{6\,r^3}(x_2 - x_1)(y_2^2 - y_1^2) \tag{26}$$

Dieses stimmt mit Schreiber S. 49, wenn man wie immer die gegenseitigen Zeichenumformungen macht. In erster Näherung stimmt dieses auch mit dem früheren (12)—(14) § 50. S. 282.

§ 88. Richtungs-Reduktion.

Um das Krümmungs-Differential zu bestimmen, betrachten wir in Fig. 1. und Fig. 2. S. 472 zwei benachbarte Punkte, welche auf dem Ellipsoid durch einen kleinen Bogen $d\,S$ und in der Ebene durch $d\,s$ verbunden sind, und untersuchen die verschiedenen dabei in Betracht kommenden Richtungen und Winkel, unter Zuziehung dessen, was schon in § 86. bei Fig. 4. S. 465 über die beiden Meridian-Konvergenzen γ' auf dem Ellipsoid und γ in der Ebene gesagt worden ist.

Dann wird man aus Fig. 1. alsbald die folgenden Gleichungen herauslesen können:

$$T_1 = \alpha_1 - \gamma_1 \qquad T_2 = \alpha_2 - \gamma_2$$

$$T_1 - T_2 = (\gamma_2 - \gamma_1) - (\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$T_1 - T_2 = (\gamma_2' - \gamma_1') + \left((\gamma_2 - \gamma_2') - (\gamma_1 - \gamma_1')\right) - (\alpha_2 - \alpha_1)$$

oder als Differential:

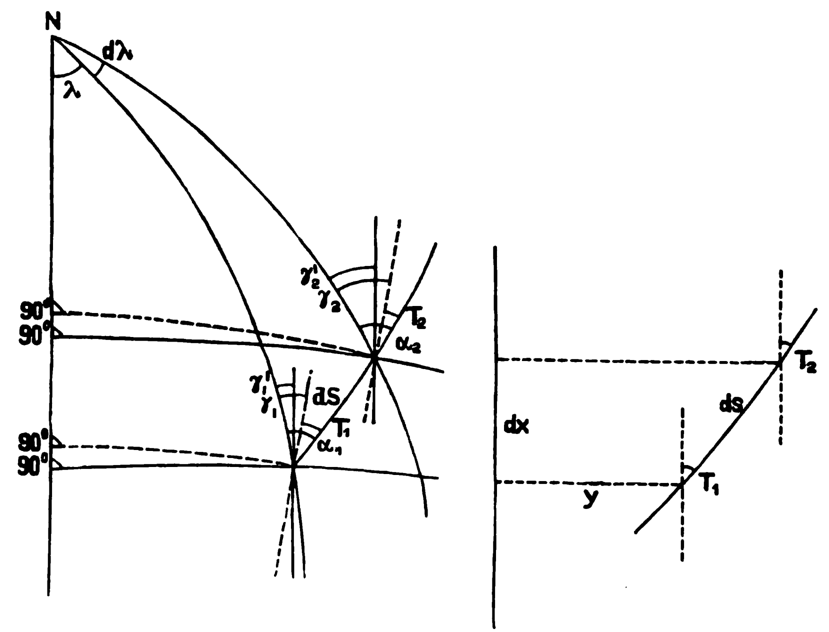
$$d\,T = d\,\gamma' + d\,(\gamma - \gamma') - d\,\alpha \tag{1}$$

Auf dem Ellipsoid ist nach (38) § 86. S. 464:

$$\gamma' = \lambda \sin \varphi + \lambda^3 \ldots$$

also
$$d\gamma' = d\lambda \sin \varphi + \lambda \cos \varphi \, d\varphi \tag{2}$$

Fig. 1. Ellipsoid. Fig. 2. Ebene.



Dagegen das Differential der Meridian-Konvergenz zwischen den beiden Punkten selbst wie immer nach § 69. Gleichung (5) S. 378:

$$d\alpha = d\lambda \sin \varphi \tag{3}$$

Also nun aus (1), (2), (3) zusammen:

$$dT = \lambda \cos \varphi \, d\varphi + d(\gamma - \gamma') \tag{4}$$

Von früher (39) § 86. S. 466 hat man:

$$\gamma - \gamma' = \frac{2}{3} \lambda^3 \eta^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi$$

Auch dieses differentiiert giebt:

$$d(\gamma - \gamma') = 2 \eta^2 \lambda^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi \, d\lambda$$

Also im ganzen mit (4) zusammen:

$$dT = \lambda \cos \varphi \, d\varphi + 2 \eta^2 \lambda^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi \, d\lambda \tag{5}$$

Hiebei ist nach den Grundformeln von (3) und (4) § 69. S. 378:

$$d\varphi = \frac{dx}{M}$$

und $\lambda \cos \varphi = \frac{y}{N}$ also $d\lambda \cos \varphi = \frac{dy}{N}$

Also wird (5): $dT = \frac{y\,dx}{M\,N} + 2 \eta^2 t \frac{y^2}{N^3} dy$

Hier ist genau $MN = r^2$ und im zweiten Gliede kann man genähert $N^3 = r^3$ setzen also:

$$dT = \frac{y\,dx}{r^2} + 2\,\eta^2\,t\,\frac{y^2}{r^3}\,dy \tag{6}$$

Damit wird wieder ebenso verfahren wie bei (23) § 50. S. 283 oder wie bei (9) § 85. S. 453, nämlich mit den Bezeichnungen l und z nach Fig. 2. § 85. S. 453.

$$-\frac{d^2 z}{d\,l^2} = \frac{d\,T}{d\,l} = \frac{y}{r^2}\,\frac{dx}{dl} + 2\,\eta^2\,t\,\frac{y^2}{rs}\,\frac{dy}{dl} \tag{7}$$

Es soll wieder r^2 als veränderlich angenommen werden nach dem früheren (13) § 87. S. 469:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_1^2}\left(1 - \frac{4\,(x - x_1)}{r}\,\eta^2\,t\right) \tag{8}$$

also wird (7):

$$-\frac{d^2 z}{d\,l^2} = \frac{y}{r_1^2}\left(1 - \frac{4\,(x - x_1)}{r}\,\eta^2\,t\right)\frac{dx}{d\,l} + 2\,\eta^2\,t\,\frac{y^2}{r^3}\,\frac{dy}{d\,l} \tag{9}$$

Die Coordinatenumwandlung wieder ebenso wie (15) § 87. S. 470 giebt:

$$\left.\begin{array}{ll} x = x_1 + l\cos t_1 \quad \text{und} & y = y_1 + l\sin t_1 \\ \dfrac{dx}{dl} = \cos t_1 & \dfrac{dy}{dl} = \sin t_1 \end{array}\right\} \tag{10}$$

Diese (10) in (9) eingesetzt, werden wieder eine algebraische Funktion geben von dieser Form:

$$-\frac{d^2 z}{d\,l^2} = A + Bl + C\,l^2 \tag{11}$$

wobei die Coëfficienten folgende Bedeutungen haben:

$$A = \frac{1}{r_1^2}\,y_1\cos t_1 + \frac{2}{r^3}\,\eta^2\,t\,y_1^2\sin t_1 \tag{12}$$

$$B = \frac{1}{r_1^2}\sin t_1\cos t_1 + \frac{4\,\eta^2\,t\,y_1}{r^3}\,(\sin^2 t_1 - \cos^2 t_1) \tag{13}$$

$$C = \qquad + \frac{2\,\eta^2\,t}{r^3}\sin t_1\,(\sin^2 t_1 - 2\cos^2 t_1) \tag{14}$$

Die übrige Rechnung nimmt wieder den früheren Gang bei (29) § 50. S. 284 und (19) § 85. S. 454, nämlich:

$$\delta_1 = \frac{A\,s}{2} + \frac{Bs^2}{6} + \frac{C\,s^3}{12} \tag{15}$$

$$\delta_2 = \frac{A\,s}{2} + \frac{Bs^2}{3} + \frac{C\,s^3}{4} \tag{16}$$

Die Einsetzung von A, B, C aus (12)—(14) in (15) und (16) wird geben:

$$\delta_1 = \frac{x_2 - x_1}{6r_1^2}(2y_1 + y_2) - \frac{\eta^2 t}{3r^3}(x_2 - x_1)^2(y_1 + y_2) + \frac{\eta^2 t}{6r^3}(y_2 - y_1)\,(3y_1^2 + 2y_1y_2 + y_1^2) \tag{17}$$

$$\delta_2 = \frac{x_2 - x_1}{6r_1^2}(y_1 + 2y_2) - \frac{\eta^2 t}{3r^3}(x_2 - x_1)^2(y_1 + 3y_2) + \frac{\eta^2 t}{6r^3}(y_2 - y_1)\,(y_1^2 + 2y_1y_2 + 3y_2^2) \tag{18}$$

Die Überführung von r_1^2 in einen Mittelwert wird diesesmal so gemacht:

$$x_{12} = \frac{2\,x_1 + x_2}{3} \qquad \text{und} \qquad x_{21} = \frac{x_1 + 2\,x_2}{3}$$

also

$$x_{12} - x_1 = \frac{1}{3}\,(x_2 - x_1) \qquad \text{und} \qquad x_{21} - x_2 = \frac{1}{3}\,(x_1 - x_2)$$

Deshalb nach (13) § 87. S. 469:

$$\frac{1}{r_1{}^2} = \frac{1}{r_{12}{}^2}\left(1 + \frac{4}{3}\frac{(x_2 - x_1)}{r}\eta^2 t\right) \tag{19}$$

$$\frac{1}{r_1{}^2} = \frac{1}{r_{21}{}^2}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{x_2 - x_1}{r}\eta_2 t\right)$$

Damit gehen (17) und (18) über in:

$$\delta_1 = \frac{x_2 - x_1}{6 r_{12}{}^2}(2y_1 + y_2) - \frac{\eta^2 t}{9 r^3}(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1) + \frac{\eta^2 t}{6 r^3}(y_2 - y_1)(3y_1{}^2 + 2y_1 y_2 + y_2{}^2) \tag{20}$$

$$\delta_2 = \frac{x_2 - x_1}{6 r_{21}{}^2}(y_1 + 2y_2) + \frac{\eta^2 t}{9 r^3}(x_2 - x_1)^2 (y_1 - y_2) + \frac{\eta^2 t}{6 r^3}(y_2 - y_1)(y_1{}^2 + 2y_1 y_1 + 3y_2{}^2) \tag{21}$$

Diese Formeln stimmen mit Schreiber, S. 46, wenn man die Bezeichnungsumänderungen berücksichtigt; und in erster Näherung haben wir auch Übereinstimmung mit den früheren (31)—(32) § 50. S. 284.

Schlussbetrachtung.

Alle Formeln, welche in den vorstehenden §§ 86.—88. gefunden worden sind, gehen in die entsprechenden früheren Formeln von § 58. und § 50. über, wenn man die höheren Glieder weglässt, wie wir an den betreffenden Stellen bereits angegeben haben. Insbesondere sind die Formeln von § 87. und 88. bei Weglassung aller η^2 lediglich die sphärischen Formeln von § 50; und wenn man sich damit begnügen will, so kann man auch die viel einfacheren sphärischen Entwicklungen von § 50. an Stelle der umständlichen §§ 87. und 88. treten lassen.

Für kleine Geltungsbereiche, etwa von der Grösse der vierzig preussischen Katastersysteme, würden in der That die früheren Formeln von § 50. und § 58. mit demselben Rechte angewendet werden können, wie die ebenfalls nicht weiter getriebenen sogenannten Soldner schen Formeln.

Ein Land mit praktischer Anwendung der Gauss schen konformen Theorie giebt es zur Zeit in Deutschland nicht (nachdem das Hannoverische System aufgegeben worden ist vgl. S. 329) und deswegen wollen wir auch Zahlenanwendungen zu den §§ 86.—88. hier unterlassen.

§ 89. Vorteile der konformen Coordinaten.

Nachdem wir schon in § 52. eine Vergleichung der kongruenten (Soldner schen) und der konformen Coordinaten angestellt haben, welche am Schlusse daselbst S. 297 in allem Wesentlichen zu Gunsten der konformen Coordinaten ausgefallen ist, ist es angezeigt, nochmals hierauf zurückzukommen.

Dabei sei auch ein Wort über die Bezeichnung „*kongruente Coordinaten*“ eingeschaltet. Wir wollen unter kongruenter geodätischer ebener Abbildung einer auf einer krummen Fläche gezogenen Linie diejenige ebene Abbildungslinie verstehen, welche ein Landmesser auf der krummen Fläche mit Theodolit und Messlatten messend, nach gewöhnlichen Feldmess- und Rechenregeln auf einer Zeichenebene herstellen würde (abgesehen von dem Verjüngungsmassstabe der Zeichnung). Wir bedienen uns dabei wie bei der mathematischen Definition der geodätischen Linie (§ 68. S. 378) der Feldmessoperationen als Veranschaulichung einer mathematischen Begriffsbestimmung, und wir finden hierauf leicht den Satz, dass die geodätisch kongruente ebene Abbildung einer geodätischen Linie immer eine Gerade der Ebene ist, deren lineare Grösse der rektifizierten geodätischen Linie gleich ist. Die „geodätische Krümmung“ ist in diesem Falle gleich Null (vgl. hiezu § 107).

Die Ordinaten y und y, der ebenen Soldner schen Projektion Fig. 1. § 46. S. 275 sind in diesem Sinne geodätisch kongruente Abbildungen der sphärischen Ordinaten y und y' von Fig. 1 § 46. S. 257.



wie auch die sphärischen Abscissen x und x, von Fig. 1. S. 257 geodätisch kongruent abgebildet werden (während für irgend eine andere Linie z. B. $AB = s$ in Fig. 1. S. 257 die Abbildung durchaus nicht mehr geodätisch kongruent ist).

Aus diesen Gründen haben wir die sogenannte Soldnersche Coordinaten-Projektion, um eine kurze mathematische Benennung zu haben, „kongruente" Projektion genannt im Gegensatz zu der Gaussschen „konformen Projektion".

Zuerst nochmals auf das allgemeine Prinzip der Konformität zurückkommend, nach welchem zwei *kleine* Dreiecke im Urbild und im Abbild einander ähnlich sind (vgl. § 50. S. 279) wollen wir unterscheiden, ob die Änderung des Massstabsverhältnisses m von Punkt zu Punkt so beträchtlich ist, dass auf ein und demselben Kartenblatt die Veränderlichkeit bemerklich wird. Nehmen wir z. B. das bekannte stereographische Halbkugelbild der Erde, so hat dasselbe am Rande doppelt so grossen Massstab als in der Mitte; und deswegen ist der Vorteil der Konformität in diesem Falle nicht unbedingt Ausschlag gebend, denn wenn man doch einmal auf einem Blatte verschiedene Massstäbe an verschiedenen Punkten haben muss, ist die Verschiedenheit des Massstabes in einem Punkte nach verschiedenen Richtungen auch nicht mehr so sehr schlimm.

Andererseits betrachten wir den Fall, dass eine grosse Karte einheitlicher konformer Projektion in so viele einzelne Blätter zerschnitten wird, dass innerhalb des einzelnen Blattes der Massstab als konstant gelten kann; und dann tritt die Konformität in ihr schönstes Licht.

Diesen Fall haben wir aber bei unseren Katasterkarten; setzen wir z. B. als sehr gross $y_1 = 99000^m$ und $y_2 = 100\,000^m$, so wird entsprechend (vgl. § 49. S. 276):

$$m_1 = 1 + \frac{y_1^2}{2\,r^2} = 1{,}000\,1203 \qquad m_2 = 1 + \frac{y_2^2}{2\,r^2} = 1{,}000\,1228$$

$$m_1 - 1 = 0{,}1203^{mm} \text{ für } 1^m \qquad m_2 - 1 = 0{,}1228^{mm} \text{ für } 1^m$$

Diese zwei Werte sind so nahe einander gleich, dass man ihren Mittelwert, $0{,}1215^{mm}$ für 1^m, als konstant für das ganze Blatt annehmen kann, dass man also mit *einem* Massstabe für das ganze Blatt ausreicht; dieses gilt für konforme Coordinaten.

Dagegen bei Soldnerschen Coordinaten, bei welchen die Formel (4) S. 275 oder (4) S. 292 gilt, kommt man mit *einem* Massstabe für jedes Kartenblatt nicht aus, sondern man würde in die unangenehme Lage versetzt, eine ganze *Windrose* von Massstäben auf die Karte zu zeichnen, bei denen für jeden einzelnen das Vergrösserungsverhältnis nach $\cos^2 \alpha$ berücksichtigt werden muss.

Durch einen kleinen Kunstgriff kann man die Maximalverzerrung leicht auf die Hälfte ihres Wertes herunterbringen, indem man einen Mittelwert als konstante Verzerrung einführt, etwo so, dass $y = b$ dem Maximalwert m_1 und $y = c$ dem Mittelwert m_0 entspricht, also:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2} \quad , \quad m_0 = 1 + \frac{c^2}{2\,r^2} \qquad m_1 = 1 + \frac{b^2}{2\,r^2} \qquad \frac{m}{m_0} = 1 + \frac{y^2 - c^2}{2\,r^2}$$

Nimmt man $c^2 = \dfrac{b^2}{2}$, so wird für $y = 0$ und $y = b$:

$$Min\,\frac{m}{m_0} = 1 - \frac{c^2}{r^2} = 1 - \frac{b^2}{4\,r^2} \quad \text{und} \quad Max\,\frac{m}{m_0} = 1 + \frac{c^2}{2\,r^2} = 1 + \frac{b^2}{4\,r^2}$$

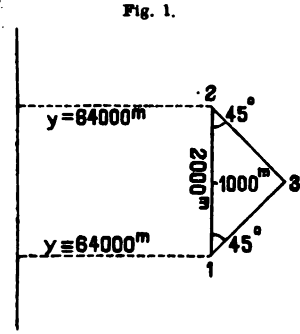
Man kann auch c^2 anders annehmen, z. B. so dass die Quadratsumme aller $\left(\dfrac{m}{m_0} - 1\right)^2$, als Integral aufgefasst, ein Minimum wird, was eintritt mit $c^2 : b^2 = 1 : 3$.

Solche und ähnliche Betrachtungen, für konforme und für Soldner sche Coordinaten haben wir angestellt in „Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 249—252, worauf hier verwiesen werden mag.

Die Flächenverzerrungen, von welchen auch schon in § 52. S. 293 gesprochen wurde, sind in der Soldner schen Projektion im allgemeinen halb so gross als bei der konformen Projektion, und dieser einzige Vorteil ist von Anhängern der Soldnerschen Projektion lebhaft hervorgehoben worden, jedoch ist dazu folgende Überlegung zu machen:

Wenn z. B. bei der preussischen Ordinatengrenze $y = 64\,000^m$ die Flächenverzerrung $1:20000$ in Soldner scher Projektion beträgt, und $1:10000$ in konformer Gauss scher Projektion, so ist das in beiden Fällen unschädlich neben den Messungsfehlern; z. B. auf 1^{ha} macht jenes $1:10000$ nur 1^{qm}, während nach preussischer Anweisung die zulässige Abweichung zweier Bestimmungen hiefür 80^{qm} oder der mittlere Fehler einer Bestimmung etwa $\frac{80}{3\sqrt{2}}$ = rund 20^{qm} beträgt, d. h. das 20 fache des Verzerrungsfehlers. Nimmt man grössere Flächen, etwa 1^{qkm}, so kann allerdings scheinbar der von der Projektionsverzerrung herrührende Flächenfehler an den Messungsfehler heranreichen, aber dann ist es zunächst ziemlich gleichgiltig, ob dieses im Verhältnis etwa $1:8$ oder $1:4$ stattfindet; zweitens aber werden grosse Flächen nicht selbständig gemessen, sondern sie werden auf irgend welchen, z. B. polygonometrischen, Wegen aus den Netzcoordinaten abgeleitet und nehmen von dort die Netzverzerrungsfehler als unschädlich mit in sich auf, gerade wie auch die Höhenreduktionen vgl. S. 295), welche gewöhnlich auch nicht besonders berücksichtigt werden. Es ist hier viel richtiger, dass alle Netzproben genügend in sich selbst stimmen, als dass die Netzverzerrung als ganzes mit in Rechnung gebracht wird, was übrigens auch ungehindert geschehen könnte, sowohl in der Soldner schen als in der konformen Projektion.

Fig. 1.



Übergehend zur Triangulierung betrachten wir mit Fig. 1 ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck, dessen Hypotenuse parallel der x-Axe des Coordinatensystems liegt mit $y_1 = y_2 = +64000^m$, und mit der Seite $1.2 = 2000^m$. Der dritte Punkt 3. hat dann $y_3 = +65000^m$.

Dieses sind Naturmasse auf der Kugel ohne Rücksicht auf ebene Kartenprojektion, und es folgen daraus die drei Dreieckswinkel, da das Dreieck hinreichend als eben berechnet werden kann, so:

Winkel 1.	Winkel 2.	Winkel 3.	
45° 0′ 0,00″	45° 0′ 0,00″	90° 0′ 0,00″	(1)

Wenn man eine Mittelbreite $\varphi = 50°$ annimmt, so hat man nach § 50. S. 286:

$$log\,\frac{1}{2\,r^2} = 6.089\,183,\quad log\,\frac{1}{6\,r^2} = 5.612\,062\quad \text{und}\quad log\,\frac{\varrho}{6\,r^2} = 0.926\,487$$

und damit werden die Coordinaten in Soldner scher und in konformer Projektion berechnet nach (7) § 49. S. 276 und nach (9) § 50. S. 281, wie folgt:

I. Projektion Soldner, kongruent:

Punkt			
Punkt 1.	$y_1 = + 64000^m$	$x_1 = + 0{,}0000^m$	
„ 2.	$y_2 = + 64000$	$x_2 = + 2000{,}1006$	$tang\,(1{,}3) = \dfrac{1000{,}0000}{1000{,}0503}$
„ 3.	$y_3 = + 65000$	$x_3 = + 1000{,}0503$	$(1{,}3) = 44^\circ\, 59'\, 54{,}813''$
	$y_3 - y_1 = + 10000$	$x_3 - x_1 = + 2000{,}1006$	$1.3 = 1414{,}2491^m$
	$y_2 - y_1 = + 0$	$x_2 - x_1 = + 1000{,}0503$	

Die Winkel des ebenen geradlinigen Dreiecks in der Soldner schen Projektion ergeben sich hieraus:

Winkel 1.	Winkel 2.	Winkel 3.	
44° 59′ 54,813″	44° 59′ 54,813″	90° 0′ 10,374″	(2)

Winkelsumme = 180° 0′ 0,000″

II. Projektion Gauss, konform.

Punkt			
Punkt 1.	$Y_1 = + 64001{,}0730$	$x_1 = + 0{,}0000$	
„ 2.	$Y_2 = + 64001{,}0730$	$x_2 = + 2000{,}1006$	$tang\,(1{,}3) = \dfrac{1000{,}0511}{1000{,}0503}$
„ 3.	$Y_3 = + 65001{,}1241$	$x_3 = + 1000{,}0503$	Richtungswinkel $(1{,}3) = 45^\circ\, 0'\, 0{,}082'$
	$Y_3 - Y_1 = + 1000{,}0511$	$x_3 - x^1 = + 1000{,}0503$	Entfernung $1.3 = 1414{,}2853^m$
	$Y_2 - Y_1 = + 0{,}0000$	$x^3 - x_2 = + 2000{,}1006$	

Es sind also die Winkel des ebenen geradlinigen Dreiecks in der Gauss schen konformen Projektion:

Winkel 1.	Winkel 2.	Winkel 3.	
45° 0′ 0,082″	45° 0′ 0,082″	89° 59′ 59,836″	(3)

Winkelsumme = 180° 0′ 0,000″

Die Richtungsreduktionen nach den Formeln (6) und (7) § 52. S. 294 werden für die Richtung (1,2):

$$\text{Soldner}\quad T_{12} - t_{12} = + 0{,}163'' + 5{,}268'' = + 5{,}431''$$
$$\text{Gauss}\quad T_{12} - t_{12} = + 0{,}163''$$

Dabei bezieht sich 0,163″ auf die der Dreiecksseite durch die Projektion erteilte Krümmung, welche in beiden Projektionen gemeinsam ist und der zweite Teil 5,268″ ist von der eigentümlich schädlichen Soldner sche einseitige Verzerrung herrührend. Wir wollen diese Reduktionen $T - t$ hier nicht weiter verfolgen. (Bei Soldner scher Projektion wären dabei die früher in Fig. 4. § 50. S. 278 behandelten Verhältnisse zu berücksichtigen).

Es ist uns hier vielmehr um die Betrachtung der *ebenen geradlinigen* Dreiecke in beiden Projektionen zu thun, welche durch die Dreieckswinkel (2) und (3) im Vergleiche mit (1) genügend charakterisiert sind. Während in der konformen Projektion die grösste Winkelverzerrung 0,2″ beträgt, steigt diese Verzerrung auf 10,4″ in der Soldner'schen Projektion, und damit ist der grosse Schaden der letzteren, d. h. der Soldner schen Projektion für Kleintriangulierung und Polygonzugsmessung deutlich vor Augen gelegt.

Der Mecklenburgische Kammeringenieur Vogeler, welcher die Vorteile der konformen Projektion in seinem Lande besitzt, hat in der „Zeitschr. f. Verm." 1896, S. 260—261 die Vergleichung so zusammengefasst:

Bei der konformen Projektion in Mecklenburg kann die Triangulirung III.—IV. Ordnung ohne alle Reduktionen $\frac{1}{r^2}$ u. s. w. ausgeführt werden, und zwar bis zu 100^{km}

Entfernung von der Hauptaxe, es sind hierbei Winkelverzerrungen von grösseren Beträgen als etwa 1″—2″ nicht zu befürchten.

Dagegen bei dem Soldnerschen System werden alle Winkel III.—IV. Ordnung bis herunter zu den Polygonzugswinkeln durch Verzerrungen von 5″—10″ entstellt, wenn man die Systemgrenze von 60000ᵐ vom Meridian erreicht, oder um ein geringes überschreitet.

Die nachstehende Tabelle lässt alle Vorzüge der konformen Gaussschen Projektion und die Nachteile, die die Soldnerschen Coordinaten mit sich bringen, klar erkennen. Dabei ist für die Mittelbreite 50° nach S. 286 $log \frac{\varrho}{6r^2} = 0.9264\,9$:

$T - t$ nach den Formeln (7) und (6) § 52. S. 294.

$\Delta x = x_2 - x_1$ und $\Delta y = y_2 - y_1$	$y_1 =$ 30 000ᵐ		$y_1 =$ 40 000ᵐ		$y_1 =$ 60 000ᵐ		$y_1 =$ 80 000ᵐ		$y_1 =$ 100 000ᵐ	
	Gauss	Soldner	Gauss	Soldner	Gauss	Soldner	Gauss	Soldner	Gauss	Soldner
	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″
50ᵐ	0,0	**1,1**	0,0	**2,0**	0,0	**4,6**	0,0	**8,1**	0,0	**12,7**
100ᵐ	0,0	**1,2**	0,0	**2,0**	0,0	**4,6**	0,0	**8,1**	0,0	**12,7**
500ᵐ	0,0	**1,2**	0,1	**2,1**	0,1	**4,7**	0,1	**8,2**	0,1	**12,9**
1000ᵐ	0,1	**1,3**	0,1	**2,2**	0,2	**4,8**	0,2	**8,4**	0,3	**13,0**
5000ᵐ	0,4	**1,7**	0,5	**2,8**	0,8	**5,7**	1,0	**9,6**	1,3	**14,0**
10000ᵐ	0,8	**2,4**	1,1	**3,7**	1,6	**7,0**	2,1	**11,3**	2,6	**16,6**
20000ᵐ	1,9	**3,9**	2,4	**5,6**	3,4	**9,6**	4,4	**14,7**	5,4	**20,8**

Hier fällt zuerst in die Augen, dass bei abnehmender Entfernung die Richtungs-Reduktionen bei der konformen Gaussschen Projektion verschwinden, bei der Soldnerschen Projektion aber *nicht*.

Ferner geht aus dieser Übersicht hervor, dass eine *ebene* Kleintriangulierung mit einer Genauigkeit von ± 2″ bis 3″, welche den heutigen Instrumenten entspricht und durchaus wünschenswert ist, bei der Soldnerschen Projektion schon von $y = 40000^m$ an zur inneren Unmöglichkeit wird. Die Soldnerschen Katastersysteme müssten auf 30 bis 40ᵏᵐ Abstand von der Hauptaxe beschränkt werden, wenn sie den konformen Coordinaten mit einem Geltungsbereiche von 80 bis 100ᵏᵐ Abstand vom Meridian das Gleichgewicht halten sollten.

In Bayern werden daher nach einer Mitteilung von Franke in „Zeitschr. f. Verm." 1896, S. 332 schon von $y = 20^{km}$ an die sphärischen Korrektionsglieder der Soldnerschen Formeln berücksichtigt und zwar mit graphischen Hilfsmitteln, die wir schon in § 46. S. 263 kurz erwähnt haben, und so bleibt die Bayerische Kleintriangulierung immer noch innerhalb 1″— 2″ richtig, während z. B. im Preussischen Kataster mit $y = 60^{km}$ ohne sphärische Korrektionen sich Winkelverzerrungen einstellen, welche die Messungsfehler guter Theodolite bereits merklich übersteigen, und zum mindesten als inkonsequent bezeichnet werden müssen.

Eine Triangulierungs-Betrachtung mag noch auf die Centrierungen bei excentrischen Triangulierungspunkten Bezug nehmen.



Wenn mit $y = 64^{km}$ im Soldner schen System *eben* trianguliert wird, so werden süd-nördliche Verschiebungen von 5^{cm} auf 1^{km} vernachlässigt, oder z. B. 15^{cm} auf 3^{km}.

Es ist das ähnlich wie wenn ein Trigonometer bei Turm-Centrierungen oder dergl. bei rund 4^{km} Zielweite in nordwestlicher Richtung eine süd-nördliche Excentricität von 15^{cm} vernachlässigen wollte, während er gleichzeitig sich abmühte, seine Winkel am Theodolit auf wenige Sekunden genau zu messen; — denselben Fehler begehen die Katastervermessungen, welche bei Soldner schen Coordinaten bis $y = 64^{km}$ eben triangulieren.

Eine letzte Betrachtung mag sich noch auf Polygonmessungen beziehen, welche bei Soldner schen Coordinaten mit $y = 64^{km}$ auch schon mehr Verzerrungen erleiden als bei genauen Messungen, z. B. bei einigermassen feinen Stadtvermessungszügen zulässig ist. Die Polygonwinkel erleiden im Soldner schen Systeme nach der Tabelle S. 478 Verzerrungen ganz unabhängig von der Streckenlänge bezw. Zielweite, welche bei Zügen zu rund 50^m—150^m angenommen werden mag. Nimmt man $y_2 - y_1 = x_2 - x_1 = 100^m$ oder $= 50^m$, so entsteht bei $y = 60^{km}$ eine maximale Richtungsreduktion von 4,6″ also eine maximale Winkelverzerrung von 9,2″. Im ganzen kann man bei $y = 64^{km}$ eine Winkelverzerrung von 5″—10″ annehmen, was bei feinen Stadtvermessungszügen bereits erheblich an die Messungsfehler heranreicht oder sie überschreitet.

Oder betrachte man die linearen Verschiebungen von rund 1 : 20000 oder 5^{mm} auf 100^m, so sind diese auch schon zu hoch bei feinen Stadtvermessungen.

Statt die Entfernungen s und die Richtungswinkel α einzeln nach den Formeln (3) S. 292 und S. 294 unten, zu reduzieren, könnte man zwar auch nur die $s \cos \alpha$ nach (4) S. 292 reduzieren, allein das würde wieder andere Übelstände mit sich bringen.

Mag man nun solche Fehler als unerheblich oder als bereits schädlich betrachten, jedenfalls muss man vor Augen führen, dass alle diese kleinen Widerwärtigkeiten mit einem Schlage verschwinden, wenn man statt der Soldner schen Projektion die konforme Gauss sche Projektion anwendet.

Vgl. hiezu auch mehrere Artikel in der „Zeitschr. f. Verm." 1896, S. 193—215, S. 249—252, S. 257—263, S. 321—339.

§ 90. Preussische Polyeder-Projektion.

Ausser den verschiedenen in diesem Kapitel behandelten mathematischen Projektionen zur ebenen Darstellung rechtwinkliger oder geographischer Coordinaten wollen wir zum Schlusse noch eine Projektionsart betrachten, welche sich hauptsächlich für geographische Coordinaten und Messtischzeichnung eignet, nämlich die Preussische sogenannte Polyeder-Projektion, welche wir in ihren Grundzügen schon in § 57. Fig. 2. S. 319 kennen lernten.

Es war dort davon die Rede, dass man die bekannten Messtisch-Trapeze der topographischen Abteilung der Landesaufnahme auf zweierlei Arten auftragen kann, erstens unmittelbar nach ihren Vierecksseiten (AB, CD, AC u. s. w. S. 318) und zweitens durch die Coordinaten ihrer Eckpunkte in irgend welchem anderen System.

Von letzterem sei aber nun nicht die Rede, sondern nur von dem Auftragen der *einzelnen* Trapeze, welche als geradlinig behandelt, mit ihren Rändern links und rechts zusammengelegt eine zusammenhängende Projektion eines Parallelkreisstreifens geben, aber mit ihren Nord- und Südrändern nicht scharf zusammenpassen können.



Das so entstehende Klaffen ist in der Praxis gleichgiltig, insofern man niemals mehr als einige benachbarte Blätter zusammenzulegen hat, wobei der Papiereingang viel wichtiger ist als jenes unmerkliche Klaffen; und wir betrachten daher die Herstellung nach S. 318 mit der Hilfstafel von S. [41] des Anhangs als erledigt, und haben nur noch eine Kleinigkeit nachzutragen, welche früher in § 57. S. 318 unten und S. 319 kurz berührt worden ist, nämlich die schwache Krümmung der Süd- und Nord-Ränder.

Fig. 1.

Wir nehmen hiezu nebenstehende Fig. 1. in Beziehung zu der früheren Fig. 1. § 81. S. 428, und betrachten die Kegelabwicklung SAB zur Breite φ' und SCD zur Breite φ. Dann ist der Abwicklungs-Halbmesser $SC = SD = SE = N \operatorname{cotg} \varphi$ und der Bogen $CD = N \cos \varphi \lambda$, wenn N wie gewöhnlich der Quer-Krümmungs-Halbmesser zur Breite φ ist. Dann giebt Fig. 1 die kleine Pfeilhöhe h in bekannter Näherung:

$$h = \frac{CE^2}{2SE} = \frac{(\frac{1}{2} N \cos \varphi \lambda)^2}{2 N \operatorname{cotg} \varphi} = \frac{\lambda^2}{8} N \sin \varphi \cos \varphi$$

oder für λ in Minuten:

$$h = \frac{\lambda^2}{8 \varrho'^2} N \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\lambda^2}{16 \varrho'^2} N \sin 2 \varphi \qquad (1)$$

Nehmen wir rund $\varphi = 50°$, also nach S. [20] $\log N = 6.80550$, dazu $\lambda = 10'$, so giebt vorstehende Formel (1):

$$h = 3{,}328^{m}$$

Dieses ist natürliches Mass und giebt in der Kartendarstellung in Verjüngung $1:25000$ den kleinen Wert $\frac{3{,}328^{m}}{25000} = 0{,}00013^{m} = 0{,}13^{mm}$.

Dieser Betrag von rund $0{,}1^{mm}$ ist so klein, dass man ihn kartographisch wohl vernachlässigen kann, indessen würde seine Berücksichtigung auch leicht sein.

Klaffen der Blätter. Ohne auf alles einzugehen, was hier in kartographischer Beziehung noch angefügt werden könnte, wollen wir nur noch bemerken, dass die im Vorstehenden beschriebenen preussischen Blätter in Parallelkreisschichten sich zwanglos aneinander fügen lassen, dass aber eine Schichte mit einer Mittelbreite φ an die benachbarte Schichte mit der Mittelbreite $\varphi + 6'$ oder $\varphi - 6$ *nicht* völlig anschliessen kann. Ohne die Formel für das Klaffen zwischen je zwei solchen Schichten hier zu entwickeln, wollen wir nur wenigstens die Formel selbst angeben. Wenn b der richtige Meridianbogen zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ ist und λ die Länge eines Meridians von der Mitte an gezählt, so wird in diesem Meridian statt des wahren Bogens b ein Bogen b' auftreten nach dem Verhältnis

$$\frac{b'}{b} = 1 + V^2 \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi \quad \text{mit} \qquad V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi$$

Man kann hieraus berechnen mit $d\varphi = 6'$, $b = M d\varphi$, und $\lambda = 10°$, dass $b' - b = 70^{m}$ oder verjüngt $b' - b = 70^{m} : 25000 = 3^{mm}$ wird, woraus sich die praktische Unschädlichkeit des fraglichen Klaffens im Vergleich mit dem Papiereingang u. s. w. herausstellt.

Wir wollen aber hieran noch eine weitere Bemerkung knüpfen, dass das Verhältnis $\frac{b'}{b} = 1 + V^2 \frac{\lambda}{2} \cos^2 \varphi$ (das übrigens hier auch nur genähert angegeben ist), dazu führen kann, aus der vorstehenden Betrachtung eine Art von konformer polykonischer Projektion abzuleiten, welche in erster Näherung mit der Gauss'schen konformen Projektion von § 86. übereinstimmt. Dieses später näher auszuführen möge vorbehalten bleiben.

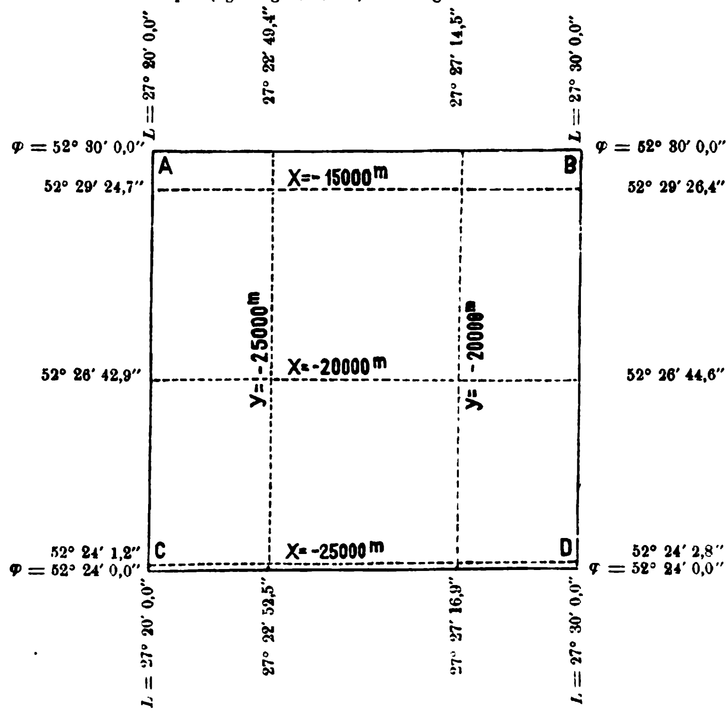
Wir wollen nun noch die Umkehrung derjenigen Aufgabe vornehmen, welche bereits in § 57. S. 319 durch Einrechnen der Trapezecken in ein Kataster-Coordinatensystem behandelt worden ist, d. h. wir wollen nun umgekehrt die Aufgabe stellen, in ein vorhandenes Messtischblatt der topographischen Karte $1:25000$ die x- und y-Linien

eines Katastersystems einzurechnen, etwa um Kartennachträge aus dem Kataster in das topographische Blatt bequem und genau hinüberzutragen u. s. w. Insofern es sich nur um Zeichnung im Massstab 1 : 25000 handelt, wollen wir uns mit Genauigkeit von rund 0,1″ in den Breiten φ und in den Längen L begnügen.

Man könnte daran denken, für runde Werte x und y die zugehörigen Breiten φ und L nach § 55. S. 308 auszurechnen, und darnach das Netz der x- und y-Parallelen in das topographische Blatt hineinzubringen; und man kann das wohl thun, wozu ausser dem Schema S. 308 keine weitere Anleitung nötig ist. Aber es bietet sich ein graphisch besseres Verfahren so dar, dass man nur die *Rand*schnitte bestimmt, d. h. auf dem West- und Ost-Rand des Blattes die Schnitte für runde x, und auf dem Süd- und Nord-Rand die Schnitte für runde y, wie auf nachfolgender Fig. 2 zu sehen ist.

Fig. 2.

Preussisches Messtischtrapez (vgl. Fig. 2. S. 319) mit eingerechneten Randschnitten für x und y.



Bleiben wir zuerst bei dem West- und Ost-Rand, so wird die Aufgabe lauten: für gegebene Länge L und Abscisse x soll die Breite φ berechnet werden. Wenn φ_0 und L_0 die Grundwerte des benützten Kataster-Coordinatensystems sind, z. B. nach S. 308—309:

$$\text{Celle} \qquad \varphi_0 = 52^\circ\, 37'\, 32{,}6709'' \qquad L_0 = 27^\circ\, 44'\, 54{,}8477'' \tag{2}$$

so hat man auch für jedes φ und L die

$$\text{Differenzen} \qquad \varphi - \varphi_0 = \Delta\,\varphi \qquad L - L_0 = \lambda \tag{3}$$

Aus (8) § 55. S. 304 und (19) S. 305 folgt:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{x}{M}\,\varrho - \frac{V^2}{2\,\varrho}\,\lambda^2 \sin\varphi\,\cos\varphi + \ldots \tag{4}$$

Desgleichen aus (10) S. 304 mit $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$:

$$\lambda = \frac{y}{N} \frac{\varrho}{\cos \varphi_0} + \frac{y \, \Delta \varphi}{N} \frac{tang \, \varphi_0}{\cos \varphi_0} + \dots \tag{5}$$

Die Ausrechnung mit dem Konstanten (2) giebt:

$$\varphi = 52° \, 37' \, 32{,}67'' + [8.509\,938] \, x - [4.06902] \, \lambda^2 \tag{6}$$

$$L = 27° \, 44' \, 54{,}85'' + [8.725\,662] \, y + [3.52823] \, y \Delta \varphi \tag{7}$$

Diese Näherungsformeln genügen für den angegebenen Zweck, auf 0,1″ genau; auf genauere Berechnung, welche leicht zu machen wäre, wollen wir hier nicht eingehen.

Man wird natürlich nach einem Netzbilde zuerst überlegen, welche Schnitte überhaupt in Frage kommen, und so wollen wir nach Fig. 2. S. 481 z. B. berechnen den Schnitt von $x = -20\,000^m$ auf dem West- und Ost-Rand:

West-Rand	Ost-Rand
$L_0 = 27° \, 44' \, 54{,}85''$	$L_0 = 27° \, 44' \, 54{,}85''$
$L = 27 \quad 20$	$L = 27 \quad 30$
$\lambda = -24' \, 54{,}85''$	$\lambda = -14' \, 54{,}85''$
$= -1494{,}85$	$= 894{,}85''$
$x = -20000^m$	$x = -20000^m$

Die Ausrechnung nach der Formel (6) giebt:

$\varphi_0 = 52° \, 37' \, 32{,}67''$	$\varphi_0 = 52° \, 37' \, 32{,}67$
$-10 \quad 47{,}10$	$-10' \, 47{,}10$
$- \quad 2{,}62$	$- \quad 0{,}94$
$\varphi = 52° \, 26' \, 42{,}95''$	$\varphi = 52° \, 26' \, 44{,}63''$

Zweitens wollen wir ausrechnen die Schnitte von $y = -25000^m$ mit dem Nord- und Süd-Rand:

Nord-Rand	Süd-Rand
$\varphi_0 = 52° \, 37' \, 32{,}67''$	$\varphi_0 = 52° \, 37' \, 32{,}67''$
$\varphi = 52° \, 30'$	$\varphi = 52° \, 24'$
$\Delta\varphi = -7' \, 32{,}67''$	$\Delta\varphi = -13' \, 32{,}67''$
$\Delta\varphi = -452{,}67''$	$\Delta\varphi = -812{,}67''$
$y = -25000^{mm}$	$y = -25000^{mm}$

Die Ausrechnung nach der Formel (7) giebt:

$L_0 = 27° \, 44' \, 54.85''$	$L_0 \; 27° \, 44' \, 54.85''$
$-22' \, 9.24$	$-22' \, 9.24''$
$+ \quad 3.82$	$+ \quad 6.86''$
$L = 27° \, 22' \, 49.43''$	$L = 27° \, 22' \, 52.47'$

In Fig. 2. sind diese Schnitte nebst anderen eingetragen. Diese Fig. 2 giebt das nördliche Blatt der Stadt Hannover, welches auch schon in § 57. S. 319 mit $A \, B \, C \, D$ gezeichnet ist.

Es sei dazu auch noch kurz erwähnt, dass man die nun berechneten Randschnitte von Fig. 2. auch dadurch erhalten kann, dass man die früher in § 55. S. 318—320 berechneten Randmasse proportional einteilt, z. B. auf dem West-Rand $A \, C$ hat man:

A	$\varphi = 52° \, 30'$	$x = -13909{,}6$		$\delta x = 1090{,}4$
			$x = -15000$	$5000{,}0$
			$x = -20000$	$5000{,}0$
			$x = -25000$	$35{,}9$
C	$\varphi = 52° \, 24'$	$x = -25035{,}9$		
	$\Delta\varphi = 0° \; 6'$	$\Delta x = 11126{,}3$		$11126{,}3$

Wenn man den δx entsprechende $\delta \varphi$ proportional einrechnet, so bekommt man dieselben Werte wie nach den Formeln (6) und (7).



§ 91. Abscissen als Meridianbogen.

Obgleich die Meridianbogenlängen schon in § 35. gründlich behandelt worden sind, wollen wir nun doch zum Schlusse dieses Kapitels über geodätische Coordinaten nochmals darauf zurückkommen, und noch eine ausführliche Tafel der Meridianbogenlängen B vom Äquator $\varphi = 0$ bis zur Breite φ, von Minute zu Minute, in den Anhangstafeln Seite [55]—[57] beigeben.

Um die Berechnung dieser Tafel nachzuweisen, greifen wir zuerst zurück auf die Werte B von § 35. S. 216, welche im Folgenden wiederkehren, (mit weiteren Dezimalstellen) nebst den Minutenbögen m, welche nach dem ersten Gliede von (40) S. 218 für $\varDelta\varphi = 1'$ berechnet sind:

$$m = M\frac{\varDelta\varphi}{\varrho} = M\frac{1'}{\varrho'} = \frac{c}{\varrho'}\frac{1}{V^3} = [3.269\,8237{\cdot}607]\,\frac{1}{V^3} \tag{1}$$

Dabei ist V oder $\log V$ für den Mittelwert φ zu nehmen, z. B. wenn es sich um m zwischen $45°\,0'$ und $45°\,1'$ handelt, so ist der Mittelwert $\varphi = 45°\,0'\,30''$ zu nehmen, um aus der Tafel Seite [4] des Anhangs $\log V = 0.000\,7280{\cdot}957$ zu entnehmen. So ist das Folgende entstanden:

Meridianbogenlängen B von 0° bis φ und Minutenbogen m von φ bis $\varphi + 1'$.

φ	B	von φ bis $\varphi + 1'$	m	$\varDelta m$	$\delta = \frac{\varDelta m}{60}$
45°	4 984 439,266 150	von 45° 0′ bis 45° 1′	1851,993567		
				0,324671	0,0054112
46	5 095 568,458 505	„ 46° 0′ „ 46° 1′	1852,318238		
				0,324366	0,0054061
47	5 206 717,124 088	„ 47° 0′ „ 47° 1′	1852,642604		
				0,323667	0,0053944
48	5 317 885,233 043	„ 48° 0′ „ 48° 1′	1852,966271		
				0,322572	0,0053762
49	5 429 073,731 700	„ 49° 0′ „ 49° 1′	1853,288843		
				0,321082	0,0053514
50	5 540 279,542 823	„ 50° 0′ „ 50° 1′	1853,609925		
				0,319202	0,0053200
51	5 651 505,565 163	„ 51° 0′ „ 51° 1′	1853,929127		
				0,316930	0,0052822
52	5 762 750,674 593	„ 52° 0′ „ 52° 1′	1854,246057		
				0,314265	0,0052378
53	5 874 014,723 147	„ 53° 0′ „ 53° 1′	1854,560322		
				0,311221	0,0051870
54	5 985 297,540 011	„ 54° 0′ „ 54° 1′	1854,871543		
				0,307794	0,0051299
55	6 096 598,930 561	„ 55° 0′ „ 55° 1′	1855,483323		

Wie man sieht, sind die $\frac{\varDelta m}{60} = \delta$ schon einigermassen beständig; und durch allmähliches Aufaddieren dieser δ könnte man bereits eine Tafel der m selbst herstellen, welche dann schrittweise zu den B addiert auch zu einer Tafel der B führen müssten. Das kann man aber besser machen durch Ausrechnung der δ als Differentiale nach (35) S. 217:

$$\frac{d^2 m}{d\varphi^2} = \frac{3\,M}{V^2}\,\eta^2\,t = \frac{3\,c}{V^5}\,e'^2 \cos^2\varphi \,\mathrm{tang}\,\varphi = \frac{3}{2}\,\frac{c\,e'^2}{V^3}\sin 2\varphi$$

und für Intervall von 1′:

$$\delta = \frac{3}{2}\,\frac{c\,e'^2}{\varrho'^2}\,\frac{\sin 2\varphi}{V^5} = [7.7369599]\,\frac{\sin 2\varphi}{V^5} \tag{2}$$

Z. B. zwischen $\varphi = 45°$ und $\varphi = 46°$ haben wir ausgerechnet:

$\varphi =$	45° 5′	45° 15′	45° 25′	45° 35′	45° 45′	45° 55′
$\delta =$	0,0054116	0,0054117	0,0054115	0,0054113	0,0054108	0,0054102

Die Summe dieser δ ist 0,0324671 und das 10 fache = 0,324 671 füllt also gerade das Intervall Δm zwischen den zwei ersten m unserer Tabelle S. 483.

Allerdings ist in der Gegend von $\varphi = 45°$ die ganze Rechnungsart am günstigsten, weil hier der Faktor $\sin 2\varphi$ in der Gleichung (2) nahezu konstant ist; aber auch in weiter abstehenden Breiten bleibt das Verfahren brauchbar, und es ist somit nachgewiesen, dass man nach Ausrechnen der nöthigen δ durch einfaches Aufaddieren (mit der Rechenmaschine) die Tabellen Seite [55]—[57] des Anhangs herstellen kann. Dieses ist geschehen in Verbindung mit der vergleichenden Zuziehung der schon auf S. 216 zugezogenen Tabellen von F. G. Gauss und Hartl. Wir haben auch dort schon gesehen, dass die verschiedenen Berechner in den letzten Stellen deswegen von einander abwichen, weil sie von verschiedenen Annahmen in Bezug auf die letzten Stellen der Bessel schen Erddimensionen ausgegangen sind. Unsere neue Tafel S. [55]—[57] des Anhangs giebt nun die Werte B und m entsprechend den Konstanten der preussischen Landesaufnahme von § 31. S. 191 unten; allerdings auch nicht mit voller Gewähr der letzten Millimeterstelle, weil dazu die bei (2) angedeutete Rechnungsart noch etwas schärfer gemacht werden müsste, was in Ermanglung eines Bedürfnisses scharfer Millimeterangaben vorerst unterblieben ist. Auch muss daran erinnert werden, dass die frühere Tabelle S. [38] aus den angegebenen Gründen die B ungefähr um 1^{mm} kleiner giebt als die nun ausführliche Tabelle S. [57].

Um eine Anwendung unserer Tabelle Seite [55]—[57] zu zeigen, wollen wir nochmals das Beispiel Celle von S. 220 vornehmen:

$$\text{Celle } \varphi_0 = 52° \, 37' \, 32{,}6709''$$

Dazu soll B gefunden werden. Man nimmt aus Seite [57]:

für $\varphi = 52° \, 37'$ $\quad B_1 = 5\,831\,361{,}276^m$

$\delta\varphi = 32{,}6709''$ $\quad$ mit $m = 1854{,}441^m$

Hiernach kann man ausrechnen:

$\log \delta\varphi$	1.514 1611
$\log 60$	1.778 1513
$\log \delta\varphi : 60$	9.736 0098
$\log m$	3.268 2130
$\log \delta B$	3.004 2228

$$\delta B = 1009{,}771^m$$
$$B = 5832\,371{,}047^m \quad (3)$$

Bequemer und ausserdem noch etwas schärfer rechnet man mit Zuziehung der Coëfficienten [1] aus der Anhangstafel S. [30]—[35]. In unserem Falle ist die Mittelbreite $\varphi = 52° \, 37' \, 16{,}33545''$ giltig, also nach S. [33] $\log [1] = 8.509\,9387$, womit man weiterrechnet:

$\log [1]$	8.509 9387	$B_1 = 5\,831\,361{,}276^m$
$\log \delta\varphi$	1.514 1611	$\delta B = 1\,009{,}770^m$
$\log (\delta\varphi : [1])$	3.004 2224	$B = 5\,832\,371{,}046^m$ (4)

Dieses stimmt mit B_0 von S. 220, weil die Tafeln S. [38] und S. [57] an dieser Stelle übereinstimmen, was, wie schon mehrfach bemerkt, sonst nicht auf 1^{mm} genau der Fall ist.

Mit den Anhangstafeln S. [38] und S. [55]—[57] kann nun stets der Meridianbogen B, welcher in den Formeln von § 58. S. 323 und dann in § 86. S. 461 vorkommt, als Funktion einer Breite φ bestimmbar betrachtet werden, ebenso wie auch umgekehrt φ als Funktion des zugehörigen B; und alle unsere Coordinatenformeln, in welchen ein solches B vorkommt, sind dadurch gesichert.

Wir wollen aber auch noch die Coordinatenformeln betrachten, in welchen eine Breitendifferenz $\Delta\varphi$ als Funktion eines Abscissenwertes x vorkommt oder umgekehrt. Z. B. die Dessauer queraxigen Coordinaten § 83. S. 441 geben mit $y = 0$ und $\lambda = 0$ aus (24) und (27) S. 441:

$$\Delta\varphi = x\frac{V^3}{c}\varrho - \frac{3}{2}\frac{x^2}{c^2}V^4\eta^2 t\,\varrho + \frac{x^3}{2\,c^3}V^5\eta^2\varrho(-1 + t^2 - \eta^2 + 5\,\eta^2 t^2) \qquad (5)$$

und
$$x = \frac{\Delta\varphi}{\varrho}\frac{c}{V^3} + \frac{3}{2}\frac{\Delta\varphi^2}{\varrho^2}\frac{c}{V^5}\eta^2 t - \frac{\Delta\varphi^3}{2\,\varrho^3}\frac{c}{V^7}\eta^2(-1 + t^2 - \eta^2 - 4\,\eta^2 t^2) \qquad (6)$$

Diese Formel für x stimmt mit der Formel für m in (37) § 35. S. 218, wie es sein muss, und ebenso auch mit (33) § 78. S. 413. Die andere Formel $\Delta\varphi$ ist die Umkehrung von x, wie man sich unmittelbar überzeugen kann. Wenn es sich nun um Hilfstafeln zu den Formeln S. 441 oder ähnlichen handelt, so wird man zuerst die Hauptglieder von (5) und (6) tabulieren, wie wir für die Dessauer Formeln S. 441 gethan haben, (nicht nur für x und $\Delta\varphi$, sondern auch für y und λ zu S. 441), und ebenso kann man auch die folgenden Gliedern von (5) und (6) tabellarisch ausrechnen, dabei auch die gleiche Zeichen habenden Glieder mit x und x^3, sowie $\Delta\varphi$ und $\Delta\varphi^3$ zusammenfassen u. s. w.; und solche Tafeln scheinen uns besser und bequemer als die Tafel der Werte B selbst von S. [55]—[57], weil man durch Untertabellen mit $\Delta\varphi =$ 1′ dann 10″ 1″ 0,1″ ... die Sache so bequem einrichten kann, dass nur noch glattes Zusammensetzen nötig ist, alles dieses unter der Voraussetzung, dass die x und $\Delta\varphi$ verhältnismässig klein sind, (bei queraxigen Coordinaten).

Dann kommt aber noch die Frage, ob die Coordinaten kongruent oder konform sind, also in § 83, ob die Formeln (24), (27) S. 441 oder (36), (39) S. 444 benützt werden sollen, oder ob die Hilfstafeln so eingerichtet werden sollen, dass sie auf beide Fälle passen.

Alles dieses sind kleine Formfragen, welche aus Veranlassung der Formeln von § 83. aufgestellt wurden, welche auch durch tabellarische Hilfen bereits teilweise beantwortet wurden, ohne dass hier weiter darauf einzugehen wäre.

Kapitel VIII.

Konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel.

§ 92. Allgemeines.

Ausser der konformen Abbildung des Ellipsoids auf die Ebene, welche wir in den früheren §§ 86.—88. behandelt haben, verdanken wir Gauss auch noch eine weitergehende Theorie dieser Art, bei welcher das Umdrehungsellipsoid auf eine Kugel konform abgebildet wird, so dass nur noch die Formeln der sphärischen Trigonometrie erforderlich sind, um geodätische Aufgaben des Ellipsoids zu lösen.

Ausser den schon in § 86. S. 459 zusammengestellten allgemeinen Litteraturangaben ist hier besonders als Quelle zu nennen: „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie von Carl Friedrich Gauss“, erste Abhandlung, der Königl. Sozietät überreicht 1843, Okt. 23. In der Gesamt-Ausgabe „Carl Friedrich Gauss ‚Werke‘“ ist diese Abhandlung aufgenommen in Band IV, Göttingen 1873, S. 259—300.

Die Theorie der konformen Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel hat in jüngster Zeit erhöhte Bedeutung erlangt, indem die trigonometrische Abteilung der

preussischen Landesaufnahme diese Theorie zur Anlage eines konformen rechtwinkligen Coordinatensystems über ganz Preussen verwertet hat, von welchem schon in dem früheren § 59. S. 331 kurz die Rede war, mit einigen Citaten, zu welchen auch noch eine Mitteilung von General Schreiber in den „Verhandlungen der 1887er Konferenz der perm. Kommission der internat. Erdmessung, Berlin 1888", Annex X^b, S. 10—11 gehört.

Die fragliche Anwendung, bestehend in einer Doppelprojektion, werden wir in dem nachfolgenden § 101. ausführlich behandeln. Zunächst haben wir die reine Kugelprojektion vorzunehmen.

Wir behandeln in dem nachfolgenden Kapitel die Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel nach den citierten klassischen Gauss'schen Original-Schriften.

Wir haben in unserer Bearbeitung die Bezeichnung von Gauss beibehalten, jedenfalls die Konstanten P, Q, α, m. u. s. w., während im übrigen unser auch sonst gebrauchtes $V^2 = 1 + \eta^2$ sich nützlich erwiesen hat.

Weggelassen haben wir alle Entwicklungen über die dritte Ordnung, unter Verweisung auf das Original-Werk.

Ändern mussten wir in § 98. den Art. 13, welcher über Azimut-Reduktion handelt, weil hiebei Gauss die geodätische Linie als kürzeste Linie nach der Theorie der Variations-Rechnung einführt, die in unseren Gang (Geodätische Linie S. 367—376) nicht passt, weshalb wir eine andere Entwicklung § 98. an Stelle von Art. 13 gesetzt haben.

Dazu wurde in § 99. eine andere allgemeine Formel von Schols eingefügt.

§ 93. Grundformeln.

In Fig. 1. bezeichnet ds das Differential einer geodätischen Linie auf dem Ellipsoid und in Fig. 2. ist ds' das Differential eines entsprechenden Grosskreisbogens auf einer Kugel vom Halbmesser A. Im übrigen gelten folgende Bezeichnungen und daraus folgende Beziehungen:

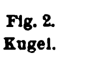
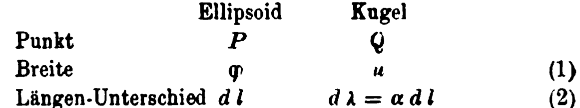


Fig. 1. Ellipsoid. Fig. 2. Kugel.



	Ellipsoid	Kugel	
Punkt	P	Q	
Breite	φ	u	(1)
Längen-Unterschied	dl	$d\lambda = \alpha\, dl$	(2)

Hiebei ist α eine vorläufig eingeführte Konstante, deren Wert sich nachher ergeben wird. Weiter haben wir einander entsprechend:

Parallelbogen $P_1P' = N \cos\varphi\, dl \quad Q_1Q' = A \cos u\, \alpha\, dl$ (3)

Meridianbogen $PP_1 = M\, d\varphi \quad QQ_1 = A\, du$ (4)

Dabei sind M und N wie gewöhnlich die beiden Hauptkrümmungs-Halbmesser des Umdrehungs-Ellipsoids.

Wenn nun QQ_1Q' konforme Abbildung von PP_1P' sein soll, so müssen die Seiten der beiden Dreiecke ein konstantes Verhältnis haben, welches mit m bezeichnet sei, also:

$$\frac{A\, du}{M\, d\varphi} = \frac{\alpha A \cos u}{N \cos\varphi} = m \tag{5}$$

Hieraus erhält man als Beziehung zwischen der sphärischen Breite u und der sphäroidischen Breite φ die Differentialgleichung:

$$\frac{du}{d\varphi} = \alpha \frac{M}{N} \frac{\cos u}{\cos\varphi}$$

Das Krümmungs-Verhältnis $M:N$ wird nach (25) § 32. S. 197 eingeführt:

$$\frac{M}{N} = \frac{1}{V^2} \text{ also } \frac{d\,u}{d\,\varphi} = \frac{\alpha}{V^2} \frac{\cos u}{\cos \varphi} \tag{6}$$

oder in anderer Form, mit W^2 statt V^2 nach (25) § 32. S. 197:

$$\frac{d\,u}{\cos u} = \frac{\alpha\,(1-e^2)}{W^2} \frac{d\,\varphi}{\cos \varphi} = \frac{\alpha\,(1-e^2)}{1-e^2 \sin^2 \varphi} \frac{d\,\varphi}{\cos \varphi} \tag{7}$$

Zur Integration zerlegen wir in Teilbrüche:

$$\frac{1-e^2}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} - \frac{1}{2} \frac{e^2 \cos \varphi}{1+e \sin \varphi} - \frac{1}{2} \frac{e^2 \cos \varphi}{1-e \sin \varphi}$$

Damit giebt die Integration von (7):

$$\log tang \left(45^\circ + \frac{u}{2}\right) = \alpha \left\{ \log tang \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{2}\, e \log (1 + e \sin \varphi) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\, e \log (1 - e \sin \varphi) \right\} - \log \frac{1}{k}$$

Dabei ist $-\log \frac{1}{k}$ als Integrations-Konstante zugesetzt; die vorstehende Gleichung lässt sich damit auch so schreiben:

$$tang \left(45^\circ + \frac{u}{2}\right) = \frac{1}{k} tang^\alpha \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{1-e \sin \varphi}{1+e \sin \varphi}\right)^{\frac{\alpha e}{2}} \tag{8}$$

Wenn diese Beziehung zwischen u und φ erfüllt ist, so wird m aus beiden Formeln (5) übereinstimmend erhalten, und zwar nach der zweiten Form von (5), mit Einsetzung von N nach (22) S. 197, $N = a : W$ also aus (5):

$$m = \frac{\alpha\, A \cos u}{N \cos \varphi} \quad , \quad m = \alpha \frac{A}{a} \frac{\cos u}{\cos \varphi} W \tag{9}$$

oder auch nach S. 189 und S. 197:

$$\frac{W}{a} = \frac{V}{c} \qquad \text{also} \qquad m = \frac{A}{c} \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} V \tag{10}$$

Die Beziehung zwischen den geographischen Längen l und λ ergiebt sich, da α konstant ist, nach (2) sofort:

$$\lambda = \alpha\, l \tag{11}$$

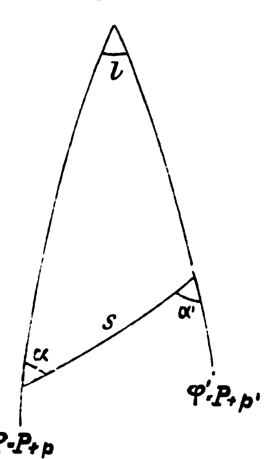
Die Gleichungen (8), (10) und (11) enthalten bereits die Lösung der gestellten Aufgabe im Grundzuge, und wir wollen im Anschluss an die umstehenden Fig. 3. und Fig. 4. die bis jetzt gewonnenen Ergebnisse zusammenfassen:

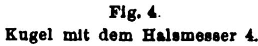
Fig. 3. S. 488 stellt ein geodätisches Polar-Dreieck auf dem Ellipsoid vor, mit den Breiten φ und φ' und dem Längenunterschiede l; die geodätische Linie, welche die beiden Punkte mit den Breiten φ und φ' verbindet, hat die lineare Grösse s und die beiden Azimute α und α'.

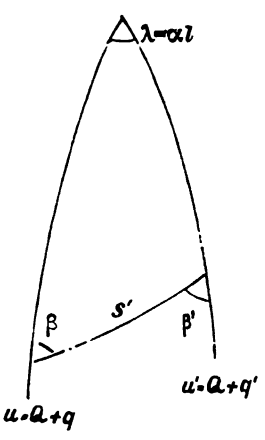
Fig. 4. S. 488 ist das konforme sphärische Abbild von Fig. 3.; den Breiten φ und φ' entsprechen die sphärischen Breiten u und u' nach der Gleichung (8), der sphärische Längenunterschied $\lambda = \alpha\, l$ wird aus dem Längenunterschied l des Ellipsoids erhalten durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor α; und der Grosskreisbogen s' steht zu der geodätischen Linie s in Beziehung durch das Vergrösserungs-Verhältnis m, indem $s' = \int m\, d\, s$ sein muss.

Die Azimute β und β' auf der Kugel sind *nicht* genau gleich den Azimuten α und α' auf dem Ellipsoid, jedoch werden bei den nachfolgenden Anwendungen die β und α wenigstens nahezu einander gleich sein.

Fig. 3.
Ellipsoid.




Fig. 4.
Kugel mit dem Halbmesser A.



Durch die Breiten-Bezeichnungen $\varphi = P + p$ und $u = Q + q$ ist angedeutet, dass P eine gewisse Normalbreite auf dem Ellipsoid und Q die entsprechende Normalbreite auf der Kugel ist, sowie dass p und q Breiten-Differenzen sind.

§ 94. Wahl der Konstanten.

Die Grundgleichungen (8), (10) und (11), welche am Schluss des vorigen § 93. gefunden wurden, enthalten drei willkürliche Konstanten, nämlich α, k und den Kugel-Halbmesser A.

Man hat nun in seiner Gewalt, durch zweckmässige Bestimmung dieser Konstanten α, k und A zu bewirken, dass für ein bestimmtes Gebiet die Abweichung des Vergrösserungs-Verhältnisses m von dem Wert 1 möglichst klein wird.

Zu diesem Zwecke nehmen wir einen etwa der Mitte des Gebietes zugehörigen Wert P der Breite φ an, welchem auch ein gewisser Wert Q der Breite u auf der Kugel entsprechen wird.

Indem wir zugleich auch die Bezeichnungen p und q für Breiten-Differenzen auf dem Ellipsoid und auf der Kugel einführen, haben wir, wie auch schon in Fig. 3. und Fig. 4. des vorigen § 93. eingeschrieben ist, die zusammengehörenden Bezeichnungen:

$$\text{Ellipsoid-Breite} \quad \varphi = P + p \tag{1}$$

$$\text{Kugel-Breite} \quad u = Q + q \tag{2}$$

In der Normalbreite P, bzw. Q soll das Vergrösserungs-Verhältnis $m = 1$, also $\log m = 0$ sein, und für irgend welche andere Breite soll $\log m$ bestimmt sein durch eine Reihe, deren erste Glieder die Ableitungen $\dfrac{d \log m}{d u}$ und $\dfrac{d^2 \log m}{d u^2}$ sein werden.

Wir können nun über die drei Konstanten α, k und A so verfügen, dass auch diese beiden ersten Ableitungen für die Normalbreite verschwinden, wir haben also für die drei Konstanten α, k und A folgende drei Bedingungen:

$$\text{für } u = Q \text{ soll sein: } 1)\ m = 1 \text{ oder } \log m = 0 \tag{3}$$

$$2)\ \frac{d \log m}{d u} = 0 \tag{4}$$

$$3)\ \frac{d^2 \log m}{d u^2} = 0 \tag{5}$$

Hiernach haben wir uns zuerst mit den beiden ersten Ableitungen von $\log m$ zu beschäftigen, und nehmen zuerst von (10) und (6) § 93. S. 487 die zwei Gleichungen:

$$m = \frac{A}{c}\,\frac{\alpha \cos u}{\cos\varphi}\,V \qquad \text{wobei } V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \tag{6}$$

und

$$\frac{d\,\varphi}{d\,u} = \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} \tag{7}$$

Durch Ableitung von V erhält man, ebenso wie bei (13) §. 74. S. 393:

$$\frac{d\,V}{d\,\varphi} = -\frac{e'^2}{V} \sin \varphi \cos \varphi = -\frac{\eta^2}{V} \tang \varphi \qquad (\text{wo } \eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi) \tag{8}$$

Nun giebt (6):

$$\log m = \log \frac{A\,\alpha}{c} + \log \cos u - \log \cos \varphi + \log V$$

$$\frac{d \log m}{d\,u} = -\tang u + \tang \varphi \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} - \frac{\eta^2}{V} \tang \varphi \frac{V^3 \cos \varphi}{\alpha \cos u}$$

$$\frac{d \log m}{d\,u} = -\tang u + \frac{\sin \varphi}{\alpha \cos u} \tag{9}$$

$$\frac{d^2 \log m}{d\,u^2} = -\frac{1}{\cos^2 u} + \frac{1}{\alpha \cos^2 u}\left(\cos \varphi \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} + \sin \varphi \sin u\right)$$

$$\frac{d^2 \log m}{d\,u^2} = \frac{1}{\alpha^2 \cos^2 u}(-\alpha^2 + V^2 \cos^2 \varphi + \alpha \sin \varphi \sin u) \tag{10}$$

Um nun die Bedingungen (3), (4) und (5) einzuführen, hat man in (6), (9) und (10) zu setzen: $\varphi = P$ und $u = Q$. Dieses giebt:

aus (6):
$$1 = \frac{A}{c}\,\frac{\alpha \cos Q}{\cos P}\,V \qquad (\text{wo } V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 P) \tag{11}$$

aus (9):
$$0 = -\tang Q + \frac{\sin P}{\alpha \cos Q} \tag{12}$$

aus (10):
$$0 = -\alpha^2 + V^2 \cos^2 P + \alpha \sin P \sin Q \tag{13}$$

Nun giebt sofort (12):
$$\alpha \sin Q = \sin P \tag{14}$$

Dieses in (13) gesetzt giebt, mit Rücksicht auf V^2 in (11):

$$\alpha^2 = 1 + e'^2 \cos^4 P \tag{15}$$

(14) giebt auch $\alpha^2 \cos^2 Q = \alpha^2 - \sin^2 P$ und dieses nebst (15) in (11) gesetzt, giebt:

$$A = \frac{c}{V^2} = \frac{c}{1 + e'^2 \cos^2 P} \tag{16}$$

Dieses ist nach (24) § 32. S. 197 der mittlere Krümmungs-Halbmesser in der Breite P. Aus (14) und (15) findet man auch:

$$\alpha^2 \cos^2 Q = (1 + e'^2 \cos^4 P) - (\sin^2 P) = \cos^2 P + e'^2 \cos^4 P$$
$$= \cos^2 P (1 + e'^2 \cos^2 P)$$

$$\alpha \cos Q = \cos P\, V \qquad \text{wobei } V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 P \tag{17}$$

Aus (14) und (17) folgt auch:

$$\tang Q = V \tang P \tag{17a}$$

Aus (15) und (16) haben wir also die Konstanten α und A, und durch (14) wird auch die dritte Konstante k bestimmt, insofern dadurch P und Q miteinander verbunden sind; setzt man nun in (8) § 93. S. 487 $\varphi = P$ und $u = Q$, d. h. wendet man jene Gleichung auf die Normalbreite an, so erhält man:

$$k = \frac{\tang^{\alpha}\left(45^\circ + \frac{P}{2}\right)}{\tang\left(45^\circ + \frac{Q}{2}\right)}\left(\frac{1 - e \sin P}{1 + e \sin P}\right)^{\frac{\alpha e}{2}} \tag{18}$$

Es bietet sich nun folgender Gang der Rechnung dar: Man nimmt eine Normalbreite P auf dem Ellipsoid willkürlich an, berechnet damit den mittleren Krümmungs-Halbmesser A nach (16), dann α nach (15), Q nach (14) und endlich k nach (18); dann kann man für jede Ellipsoidbreite φ die zugehörige Kugelbreite u und auch das zugehörige Vergrösserungsverhältnis m nach (8) und (9) § 93. S. 487 berechnen.

Statt dessen kann man aber auch so verfahren, dass nicht eine Normalbreite P auf dem Ellipsoid, sondern eine Normalbreite Q auf der *Kugel* als willkürlich (runde Zahl) angenommen wird. In diesem Falle, der nicht wesentlich verschieden von dem ersten Falle ist, kann man aber nicht geradezu nach den Formeln (14) und (15) rechnen, sondern man muss aus (14) und (15) die Breite P eliminieren, um α^2 in Q auszudrücken. Wenn man hiezu aus (14) nimmt:

$$\cos^4 P = (1 - \alpha^2 \sin^2 Q)^2 = 1 - 2\,\alpha^2 \sin^2 Q + \alpha^4 \sin^4 Q$$

und wenn man dieses in (15) einsetzt, so wird man auf eine Gleichung geführt, welche α^2 und α^4 enthält, und nach α^2 aufgelöst dieses giebt:

$$\alpha^2 = \frac{1 + 2\,e'^2 \sin^2 Q - \sqrt{1 + 4\,e'^2 \sin^2 Q \cos^2 Q}}{2\,e'^2 \sin^4 Q} \tag{19}$$

Diese Gleichung (19) nebst (14) gestattet dann die Weiterrechnung in der früheren Weise.

Da aber die Formel (19) zur unmittelbaren Ausrechnung sehr wenig geeignet ist, d. h. unmittelbar angewendet keine scharfe Berechnung geben kann, empfiehlt es sich, sie in eine Reihe zu entwickeln nach S. 196:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{1 + 4\,e'^2 \sin^2 Q \cos^2 Q} = 1 + \frac{4}{2}\,e'^2 \sin^2 Q \cos^2 Q - \frac{16}{8}\,e'^2 \sin^4 Q \cos^4 Q \\ + \frac{64}{16}\,e'^6 \sin^6 Q \cos^6 Q - \frac{5}{128}\,256\,e'^8 \sin^8 Q \cos^8 Q\end{aligned}\right\}$$

Damit giebt (19) eine Reihe, deren drei erste Glieder sind:

$$\alpha^2 = 1 + e'^2 \cos^4 Q - 2\,e'^4 \sin^2 Q \cos^6 Q + 5\,e'^6 \sin^4 Q \cos^8 Q \tag{20}$$

Damit ist alles zur Anwendung vorbereitet.

Es handelt sich um Einführung einer Normalbreite P oder Q. Das nächstliegende wäre, die Ellipsoidbreite P als runde Zahl für die Mitte des geographischen Anwendungsbereiches anzunehmen; aber Gauss hat einen sphärischen Normalwert Q zu Grunde gelegt, nämlich:

$$\text{Kugel} \quad Q = 52^\circ\,40'\,0'' \tag{21}$$

Ausserdem werden von Gauss als Bessel sche Erddimensionen angenommen:

$$\log a = 6.514\,8235{\cdot}337 \text{ für Toisen}$$

und
$$\log a = 6.804\,6434{\cdot}637 \text{ für Meter} \tag{22}$$

$$\log \sqrt{1 - e^2} = 9.998\,5458{\cdot}202 \tag{23}$$

$$\log e = 8.912\,2052{\cdot}079 \qquad \log e^2 = 7.824\,4104\,158 \tag{24}$$

Diese Werte (23) und (24) sind dieselben wie die von uns in § 31. S. 190 angegebenen, während $\log e^2$ nach (24) in den letzten Stellen von unserer Annahme auf S. 191 abweicht. Dieses rührt von den Unsicherheiten her, welche früher überhaupt in Bezug auf die letzten Stellen der Bessel schen Erddimensionen bestanden haben (vgl. § 31. S. 190—191).

Die trigonometrische Abteilung der Preussischen Landesaufnahme hat von der ganzen Gauss schen Theorie der konformen Kugelabbildung mit ihren eigenen Konstanten (d. h. mit den auf S. 191 fett gedruckten Zahlen) eine Neuberechnung mit Tabellen durchgeführt, welche wohl später auch veröffentlicht werden wird.

Soweit wir im Folgenden eigene Berechnungen angeben, haben wir die Zahlen von S. 191 und S. 193 beibehalten, nämlich:

$$log\, a = 6.804\,6434{\cdot}637 \text{ für Meter} \tag{25}$$

$$log\, c = 6.806\,0976{\cdot}435 \quad " \quad " \tag{26}$$

$$log\, e^2 = 7.824\,4104{\cdot}237 \quad , \quad log\, e'^2 = 7.827\,3187{\cdot}888 \tag{27}$$

$$log(1-e^2) = log\frac{1}{1+e'^2} = 9.997\,0916{\cdot}404 \tag{28}$$

Damit wollen wir die übrigen Konstanten nach den vorstehenden Formeln ausrechnen. Als willkürliche Annahme wird zu Grunde gelegt, wie bei (21) angegeben:

$$\text{Normal-Kugelbreite} \quad Q = 52°\,40'\,0'' \tag{29}$$

Damit berechnet man α^2 nach der Reihe (20):

$$\alpha^2 = 1{,}00090\,88703 - 28399 + 111 = 1{,}00090\,60415$$

$$log\, \alpha = 0.000\,1966{\cdot}553 \tag{30}$$

$$\alpha = 1 + 0{,}000\,425\,918 \qquad \frac{1}{\alpha} = 1 - 0{,}000\,452\,718 \tag{31}$$

Es folgt die Berechnung von P nach (14); man findet:

$$P = 52°\,42'\,2{,}53251'' \tag{32}$$

$$log sin\, P = 9.900\,6297{\cdot}679 \quad , \quad log cos\, P = 9.782\,4573{\cdot}113 \quad , \quad log tang\, P = 0.118\,1724{\cdot}566$$

Mit $cos\, P$ hat man auch:

$$log\, e'^2\, cos^2\, P = log\, \eta^2 = 7.392\,2334{\cdot}059 \tag{33}$$

und damit kann man geradezu $V^2 = 1 + \eta^2$ berechnen:

$$log\, V^2 = 0.001\,0702.432 \quad , \quad log\, V = 0.000\,5351{\cdot}216 \tag{34}$$

Zur Probe kann man auch $log\, V^2$ nach der Formel (24) S. 211 berechnen, oder $log\, V$ durch Interpolation aus der Hilfstafel S. [57] des Anhangs bestimmen; beides giebt dasselbe Ergebnis wie (34).

Ehe man weiter geht, kann man auch die Probe nach (17), $\alpha\, cos\, Q = V cos\, P$ anstellen, welche mit einem Fehler von 0·001 schliesst, der nicht weiter zu verfolgen ist.

Mit $log\, V^2$ nach (34) hat man auch nach (16) den Kugelhalbmesser A, die Ausrechnung mit (26) und (34) giebt:

$$log\, A = 6.805\,0274{\cdot}003 \tag{35}$$

Endlich ist auch noch k nach (18) zu berechnen, man hat hiezu $e\, sin\, P = 0{,}064\,988\,270\,546$ und weiter:

$$\left.\begin{array}{r|l} log\left(\dfrac{1 - e\, sin\, P}{1 + e\, sin\, P}\right)^{\frac{\alpha e}{2}} & 9.997\,6898{\cdot}845 \\ log\, tang^{\alpha}\left(45° + \dfrac{P}{2}\right) & 9.471\,9371{\cdot}356 \\ log\, cotg\left(45° + \dfrac{Q}{2}\right) & 9.528\,7020{\cdot}994 \end{array}\right\} \begin{array}{l} log\, k = 9.998\,3291{\cdot}195 \\ log\dfrac{1}{k} = 0.001\,6708{\cdot}805 \end{array}$$

$$\text{Gauss giebt } log\frac{1}{k} = 0.001\,6708{\cdot}804 \tag{36}$$

Hier haben wir die unerhebliche Differenz 0.001 gegen die Angabe von Gauss in Art. 6. der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie", während die anderen Konstanten P, $log\, \alpha$, $log\, A$ nach (32), (30), (35) bis auf die letzte Dezimale mit den Angaben von Gauss stimmen.

Dieses ist eine Versicherung, dass die Verschiedenheit der Werte $log\, e^2$ in (24) und (27) sich in den Konstanten P, α, A und k bei Rechnung mit 10stelligen Logarithmen nicht mehr bemerklich macht; während in den späteren Coëfficienten-Berechnungen, wenn der Faktor η^2 auftritt, die kleine Verschiedenheit in den Annahmen von e^2 bzw. e'^2 bemerklich wird.

Wir haben früher auch ein Zahlenbeispiel zur Bestimmung von u und m bei gegebenem φ durchgerechnet, nach den Grundformeln (8) und (10) § 93. S. 487. Die Einzelheiten dieser Rechnung waren in den früheren Auflagen, z. B. 3. Aufl. 1890, S. 431—432 angegeben, wir wollen hier nur noch das Ergebnis dieser Rechnung hersetzen, für die Karlsruher Breite:

$$\varphi = 49° \, 0' \, 0'' \qquad u = 48° \, 58' \, 18{,}08'' \qquad log\, m = 0.000\,0002{\cdot}7 \tag{37}$$

Die genaueren Werte hiefür, welche man aus der Hilfstafel S. [60] des Anhangs durch Interpolation finden kann, sind:

$$\varphi = 49° \, 0' \, 0'' \qquad u = 48° \, 58' \, 18{,}0784'' \qquad log\, m = 0.000\,0002{\cdot}48 \tag{38}$$

Die Übereinstimmung zwischen (37) und (38) ist insofern hinreichend, als die Werte u und $log\, m$ von (37) nur mit 7stelligen Logarithmen ($\pm$ 0·25) gerechnet sind.

Die Rechnung nach den geschlossenen Formeln (8) und (10) § 93. S. 487 ist umständlich und verhältnismässig ungenau.

Ein besseres Rechnungs-Verfahren erhält man durch Reihen-Entwicklungen, zu welchen wir in § 96.—97. übergehen werden.

§ 95. Goniometrische Hilfsgrössen.

Unsere vorstehenden Entwicklungen und Berechnungen zur Bestimmung der Konstanten in den Grundformeln sind sachlich nichts anderes, als was Gauss in Art. 3.—5. der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, erste Abhandlung“ gegeben hat. In der Form aber sind wir von Gauss abgewichen, indem wir die bisherigen Bezeichnungen unseres Buches, namentlich $V^2 = 1 + \eta^2$ mit $\eta^2 = e'^2 \cos \varphi^2$ beibehielten, und dann die Ausrechnung auf dem zuerst sich darbietenden Wege machten; und da wir damit den Gauss schen Zahlenwerten innerhalb der Genauigkeit 10stelliger Logarithmen-Rechnung gleichgekommen sind, wäre nichts weiter zu bemerken.

Nun hat aber Gauss in Art. 4. der „Untersuchungen“ u. s. w. eine Gruppe von goniometrischen Hilfsgrössen, φ, ζ, η, Θ eingeführt, welche dazu dienen sollen, die logarithmischen Rechnungen bequemer und schärfer zu machen, deren Zusammenhang unter sich und mit den übrigen Grössen e, P, Q nicht sofort einzusehen ist.

Dieser Zusammenhang ist uns durch eine sphärische Figur am besten klar geworden, welche wir in Fig. 1. S. 493 nebst den zugehörigen Gleichungen mitteilen.

Dabei behalten wir die Gauss sche Numerierung der Gleichungen bei, indem z. B. die Nummern (13), (14) u. s. w. der Gauss schen Original-Abhandlung „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, erste Abhandlung“ entsprechen.

Es wird zuerst ein Hilfswinkel φ eingeführt durch die Gleichung:

$$\sin \varphi = e \tag{13}$$

damit wird:

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} = tang^2\, \varphi$$

Folglich nach (15) § 94. S. 489:

$$\alpha^2 = 1 + e'^2 \cos^4 P = 1 + tang^2\, \varphi \cos^4 P$$

Nun setzt man abermals:

$$tang\, \varphi \cos^2 P = tang\, \zeta \tag{14}$$

folglich:

$$\alpha^2 = 1 + tang^2\, \zeta \quad , \quad \alpha = \frac{1}{\cos \zeta} \tag{16}$$

Weiter wird gesetzt:

$$e \sin P = \sin \Theta \tag{22}$$

Die durch (13), (14) und (22) eingeführten Hilfswinkel φ, ζ und Θ lassen sich nebst den Breiten P und Q in einer sphärischen Figur vereinigen, welche in Fig. 1. gezeichnet ist. Man hat hiebei den Bogen $AB = \Theta$, auf welchem die Bögen AD und BD rechtwinklig aufgesetzt sind, so dass D der Pol von AB ist, also bei D der Winkel Θ wieder erscheint.

Fig. 1.

Nach (13) und (22) ist $BC = P$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks ABC, dessen eine Kathete $AB = \Theta$ und dessen Winkel bei $C = \varphi$ ist. Dadurch ist der Punkt C bestimmt und es wird von ihm eine Senkrechte CF auf BD gefällt, ferner $FB' = FB$ abgetragen, so dass BCB' ein gleichschenkliges Dreieck wird. Dass der bei C eingeschriebene Winkel $BCF = 90° - \zeta$ in Übereinstimmung mit (14) ist, zeigt sich so:

Dreieck CBF giebt

$$\cos P = \operatorname{cotg} (90° - \zeta) \operatorname{cotg} (90° - x)$$

Dreieck CBA giebt $\cos P = \operatorname{cotg} \varphi \operatorname{cotg} x$ woraus durch Multiplikation die Gleichung (14) folgt.

Von (14) und (16) haben wir:

$$\sin Q = \sin P \cos \zeta \tag{17}$$

Dieses entspricht dem rechtwinkligen Dreieck BCF als Sinus-Gleichung, ausführlich geschrieben:

$$\sin Q = \sin P \sin (90° - \zeta)$$

Nun haben wir das Recht, aus der sphärischen Figur, Fig. 1. beliebige Gleichungen herauszulesen, welche die gleiche Berechtigung haben, wie wenn sie aus den bisherigen Gleichungen rein goniometrisch abgeleitet wären. Die Senkrechte $CF = \eta$ wird aus dem rechtwinkligen Dreieck CFB erhalten durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \eta = \sin \zeta \operatorname{tang} P \tag{15}$$

Dasselbe Dreieck CFB giebt auch:

$$\cos \eta \cos Q = \cos P \tag{18}$$

und

$$\sin \eta = \operatorname{tang} \zeta \operatorname{tang} Q \tag{19}$$

und wenn man auf dasselbe Dreieck CFB eine der Gleichungen anwendet, welche durch Division der zweiten und vierten Gauss schen Gleichungen von § 27. S. 165 entsteht, so bekommt man:

$$\operatorname{tang} \frac{P - Q}{2} = \frac{\sin {}^1\!/_2 \Big(90° - (90° - \zeta)\Big)}{\sin {}^1\!/_2 \Big(90° + (90° - \zeta)\Big)} \operatorname{tang} \frac{\eta}{2}$$

$$\operatorname{tang} \frac{P - Q}{2} = \operatorname{tang} \frac{\zeta}{2} \operatorname{tang} \frac{\eta}{2} \tag{20}$$

Das Dreieck $C\,D\,B'$ giebt:

$$\frac{\sin(\varphi - 2\zeta)}{\sin(2\,Q - 90^\circ)} = \frac{\sin\Theta}{\sin P}$$

Dann wegen (22) und (13):

$$\sin(2\zeta - \varphi) = e\cos 2\,Q = \sin q\,\cos 2\,Q \tag{21}$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken $A\,B\,C$ und $B\,C\,F$ findet man:

$$\cos\varphi = \sin x \cos\Theta$$

$$\cos(90^\circ - x) = \sin(90^\circ - \zeta)\cos\eta \quad , \quad \text{oder } \sin x = \cos\zeta\cos\eta$$

und durch Elimination von x aus diesen beiden Gleichungen:

$$\cos\varphi = \cos\zeta\cos\eta\cos\Theta \tag{23}$$

Unser V^2 lässt sich ebenfalls in φ und Θ ausdrücken. Nach (22) und (13) ist:

$$V^2 = 1 + e'^2\cos^2 P = \frac{1 - e^2\sin^2 P}{1 - e^2} = \frac{\cos^2\Theta}{\cos^2\varphi}$$

Nach (9) S. 189:

$$a = c\sqrt{1 - e^2} = c\cos\varphi \quad \text{dazu} \quad A = \frac{c}{V^2}, \quad \text{also:}$$

$$A = \frac{a\cos\varphi}{\cos^2\Theta}$$

Der Hilfswinkel Θ von (22) (s. oben bei (16), nämlich $\sin\Theta = e\sin P$, giebt auch eine Umformung für k nach (18) § 94., nämlich zunächst nach (22):

$$\frac{1 - e\sin P}{1 + e\sin P} = \frac{1 - \sin\Theta}{1 + \sin\Theta} = \cot g^2\left(\frac{90^\circ + \Theta}{2}\right)$$

Damit geht die frühere Formel für k von (18) § 94. über in:

$$k = \frac{\tan g^\alpha(45^\circ + 1/2\,P)}{\tan g\,(45^\circ + 1/2\,Q)}\cot g^{\alpha e}(45^\circ + 1/2\,\Theta)$$

Wir werden im Nachfolgenden die goniometrischen Hilfsgrössen nicht anwenden, merken uns aber zum Umsetzen unserer Bezeichnungen in jene, hauptsächlich die oben nach (23) gefundene Beziehung:

$$\cos\Theta = V\cos\varphi$$

§. 96. Reihen-Entwicklung für die Breiten-Differenz.

Die Beziehung zwischen der Breite φ auf dem Ellipsoid und der zugehörigen Breite u auf der Kugel ist zwar durch die Gleichung (8) § 93. S. 487 gegeben, welche zu jedem Werte φ den zugehörigen Wert u berechnen lässt; allein mancherlei Bedürfnisse werden dadurch doch nicht befriedigt; jene geschlossene Formel ist zur Rechnung überhaupt unbequem (vgl. das Zahlenbeispiel § 94. S. 492), und kann zur Auflösung nach φ bei gegebenem u nur etwa indirekt benützt werden. Dieses und andere Gründe machen eine Reihen-Entwicklung erwünscht.

Da auf dem Ellipsoid eine Normalbreite P und auf der Kugel eine Normalbreite Q angenommen wurde, sollen die Breiten allgemein durch ihre Differenzen gegen P und Q ausgedrückt werden, d. h. wir setzen nach § 94. (1) und (2) S. 488:

$$\text{Ellipsoid} \quad \varphi = P + p \tag{1}$$

$$\text{Kugel} \quad u = Q + q \tag{2}$$

Da die Beziehung zwischen P und Q bekannt ist, handelt es sich jetzt nur noch um eine Beziehung zwischen p und q, welche in zwei Formen aufgestellt werden kann, nämlich:



entweder: $$p = \frac{d\,\varphi}{d\,u}\Big]\, q + \frac{d^2\,\varphi}{d\,u^2}\Big]\, \frac{q^2}{2} + \frac{d^3\,\varphi}{d\,u^3}\Big]\, \frac{q^3}{6} + \cdots \tag{3}$$

oder: $$q = \frac{d\,u}{d\,\varphi}\Big]\, p + \frac{d^2\,u}{d\,\varphi^2}\Big]\, \frac{p^2}{2} + \frac{d^3\,u}{d\,\varphi^3}\Big]\, \frac{p^3}{6} + \cdots \tag{4}$$

Dabei soll das Zeichen] andeuten, dass nach Ausführung der Differentiierungen, $p = 0$ und $q = 0$, oder $\varphi = P$ und $u = Q$ zu setzen sei.

Wir wollen zuerst die Form (4) vornehmen und haben hiezu von (6) § 93. S. 487:

$$\frac{d\,u}{d\,\varphi} = \frac{1}{V^2}\,\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \tag{5}$$

Hiebei ist, wie schon früher in § 34. S. 208 angegeben:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 + \eta^2} \tag{6}$$

$$\frac{d\,V}{d\,\varphi} = -\,\frac{\eta^2}{V}\,t \qquad (t = \tan \varphi) \tag{7}$$

$$\frac{d\,V^n}{d\,\varphi} = -\,n\,\eta^2\,V^{n-2}\,t \quad \text{und} \quad \frac{d\,\eta^n}{d\,\varphi} = -\,n\,\eta^n\,t \tag{8}$$

Dieses haben wir, weil es wiederholt gebraucht wird, vorausgeschickt, und nehmen die ebenfalls mehrfach vorkommende Ableitung des zweiten Faktors von (5) besonders:

$$\frac{d}{d\,\varphi}\left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\right) = \frac{1}{\cos^2 \varphi}\left(-\,\alpha \sin u\,\frac{d\,u}{d\,\varphi}\cos \varphi + \alpha \cos u \sin \varphi\right) \tag{9}$$

Setzt man hier (5) ein, und berücksichtigt $V^2 = 1 + \eta^2$ nach (6), so wird:

$$\frac{d}{d\,\varphi}\left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\right) = \frac{1}{V^2}\,\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\left(-\,\frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi} + t + \eta^2 t\right) \tag{10}$$

Wenn man nun (5) nochmals ableitet, so hat man zuerst wegen (8):

$$\frac{d^2\,u}{d\,\varphi^2} = \frac{2\,\eta^2}{V^4}\,t\,\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} + \frac{1}{V^2}\,\frac{d}{d\,\varphi}\left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\right)$$

Setzt man den bereits in (9) vorbereiteten Wert ein, so erhält man:

$$\frac{d^2\,u}{d\,\varphi^2} = \frac{1}{V^4}\,\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\left(t + 3\,\eta^2\,t - \frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi}\right) \tag{11}$$

Als Vorbereitung der nächsten Ableitung hievon behandeln wir zuerst den letzten Teil, und finden in ähnlicher Weise wie oben bei (9) und (10):

$$\frac{d}{d\,\varphi}\left(\frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi}\right) = \frac{1}{V^2}\left(\left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\right)^2 + \frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi}\,t\,(1 + \eta^2)\right) \tag{12}$$

Nun giebt (11) weiter:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^3\,u}{d\,\varphi^3} &= \frac{4\,\eta^2}{V^6}\,t\,\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\left(t + 3\,\eta^2\,t - \frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi}\right) \\ &+ \frac{1}{V^4}\,\frac{d}{d\,\varphi}\left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\right)\left(t + 3\,\eta^2\,t - \frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi}\right) \\ &+ \frac{1}{V^4}\,\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\left((1 + t^2) - 6\,\eta^2\,t^2 + 3\,\eta^2\,(1 + t^2) - \frac{d}{d\,\varphi}\left(\frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi}\right)\right) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Da wir bei der dritten Potenz stehen bleiben wollen, handelt es sich jetzt darum, alle die Substitutionen zu machen, welche bei (3) und (4) durch] angedeutet sind, d. h. $\varphi = P$, $u = Q$ zu setzen. Es ist aber nach (14) und (17) § 94. S. 489 $\alpha \sin Q = \sin P$ und $\alpha \cos Q = V \cos P$, und daraus folgt:

$$\frac{\alpha \sin u}{\sin \varphi}\Big] = 1 \qquad \frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi}\Big] = t \qquad \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\Big] = V \tag{14}$$

und dieses in (10) und (12) gesetzt, giebt (da $V^2 = 1 + \eta^2$ ist):

$$\frac{d}{d\varphi}\left.\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\right] = \frac{\eta^2 t}{V} \qquad \frac{d}{d\varphi}\left.\frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi}\right] = 1 + t^2 \tag{15}$$

Wenn man diese (14) und (15) in den drei allgemeinen Ableitungen (5), (11) und (13) einsetzt, so ziehen sich diese Ableitungen sehr zusammen, und wenn man alles gleichartige zusammen ordnet, so erhält man:

$$\left.\frac{du}{d\varphi}\right] = \frac{1}{V} \quad , \quad \left.\frac{d^2 u}{d\varphi^2}\right] = \frac{3\,\eta^2}{V^3}\,t \tag{16}$$

$$\left.\frac{d^3 u}{d\varphi^3}\right] = \frac{3\,\eta^2}{V^5}(1 - t^2 + \eta^2 + 4\,\eta^2 t^2) \tag{17}$$

Mit diesen (16) und (17) kann man die Formel (4) zusammensetzen:

$$q = \frac{1}{V}\,p + \frac{3}{2}\,\frac{\eta^2 t}{V^3}\,p^2 + \frac{1}{2}\,\frac{\eta^2}{V^5}(1 - t^2 + \eta^2 + 4\,\eta^2 t^2)\,p^3 \tag{18}$$

Auf ähnlichem Wege wie diese Reihe, welche nach Potenzen von p fortschreitet, kann man auch die umgekehrte Reihe (3) finden, welche nach Potenzen von q fortschreitet und p bestimmt; indessen, wenn wir nicht weiter als bis zur dritten Ordnung gehen, bekommen wir die umgekehrte Reihe auch dadurch, dass wir geradezu die Reihe (18) stufenweise umkehren (vgl. § 29. S. 179—181). In erster Näherung giebt (18):

$$p = q\,V + q^2 \ldots \quad , \quad p^2 = q^2\,V^2 + q^3 \ldots$$

$$p = q\,V - \frac{3}{2}\,q^2\,\eta^2\,t \quad , \quad p^2 = q^2\,V^2 - 3\,q^3\,V\,\eta^2\,t +$$

Dieses p^2 und $p^3 = q^3\,V^3$, in (18) eingesetzt, und alles nach gleichen Potenzen geordnet, giebt sofort:

$$p = q\,V - \frac{3}{2}\,\eta^2\,q^2\,t + \frac{1}{2}\,\frac{\eta^2}{V}(-1 + t^2 - \eta^2 + 5\,\eta^2 t^2)\,q^3 \tag{19}$$

In den Reihen (18) und (19) sind p und q in analytischem Masse verstanden; wir wollen nun statt dessen die unabhängige Veränderliche p in (18), q in (19) in Graden, und die Funktion q oder p in Sekunden zählen; dann nehmen die Reihen (18) und (19) folgende Formen an (welche (6) und (5) S. 485 entsprechen):

$$q = \frac{3600}{V}\,p + \frac{3600}{\varrho^\circ}\,\frac{3}{2}\,\frac{\eta^2 t}{V^3}\,p^2 - \frac{3600}{\varrho^{\circ 2}}\,\frac{\eta^2}{2\,V^5}(-1 + t^2 - \eta^2 - 4\,\eta^2 t^2)\,p^3 \tag{20}$$

$$p = 3600\,V\,q - \frac{3600}{\varrho^\circ}\,\frac{3}{2}\,\eta^2\,t\,q^2 + \frac{3600}{\varrho^{\circ 2}}\,\frac{\eta^2}{2\,V}(-1 + t^2 - \eta^2 + 5\,\eta^2 t^2)\,q^3 \tag{21}$$

Wenn man hier die Coëfficienten mit den Konstanten von § 94. ausrechnet, so bekommt man:

$$q = 3595{,}566\,945\,p + 0{,}304\,138\,6587\,p^2 - 0{,}000\,946\,265\,801\,p^3 + \ldots \tag{22}$$

$$p = 3604{,}438\,521\,q - 0{,}305\,264\,9836\,q^2 + 0{,}001\,002\,642\,525\,q^3 + \ldots \tag{23}$$

Wenn man diese Reihen als konvergierend und mit der dritten Potenz abbrechend behandeln will, so braucht man die Coëfficienten nicht mit so vielen Stellen; wir haben jedoch viele Stellen ausgerechnet zur Vergleichung mit den Zahlenangaben von Gauss, welcher in Art. 6. und Art. 8. der Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie die Reihen bis zur fünften Potenz ausgeführt giebt. Insbesondere die zur Tafel-Berechnung von Gauss angegebene Reihe von Art. 8. ist



$$
\left.\begin{aligned}
p - q = {} & 443{,}852\,122\,\frac{q}{100} \\
& - 3952{,}649\,780\left(\frac{q}{100}\right)^2 \quad [3.484\,6769{\cdot}820] \\
& + 1002{,}642\,506\left(\frac{q}{100}\right)^3 \quad [3.001\,1461{\cdot}121] \\
& + 4119{,}589\,282\left(\frac{q}{100}\right)^4 \quad [3.614\,8539{\cdot}196] \\
& - \ 431{,}181\,623\left(\frac{q}{100}\right)^5 \quad [2.634\,661]
\end{aligned}\right\} \tag{24}
$$

Die Anwendung dieser Reihe auf $q = -7°$ und $q = +7°$ giebt:

	$u = Q + q =$ 45° 40′ 0″	59° 40′ 0″
	$q = -7°$	$q = +7°$
	— 31,069 995″	+ 31,069 965
	— 14,957 984	— 14,957 984
	— 0,343 906	+ 0,343 906
	+ 0,098 911	+ 0,098 911
	+ 0,000 725	— 0,000 725
	$p - q =$ — 46,272 219	+ 16,554 073
	$p =$ — 7° 0′ 46,272 219″ ,	+ 7° 0′ 16,554 073″
hiezu	$P =$ 52° 42′ 2,53251″	52° 42′ 2,53251″
	$\varphi = P + p =$ 45° 41′ 16,26029″	59° 42′ 19,08658″

Diese Werte liegen bereits jenseits der Grenzen der Gauss schen Tafel, von der wir einen an den Grenzen etwas erweiterten Auszug auf Seite [60]—[61] des Anhangs gegeben haben.

Da das letzte Rechnungsglied immer noch 0,0007″ ausmacht, und die Konvergenz nicht sehr stark ist, kann man schliessen, dass für die Genauigkeit von 0,00001″, welche Gauss seiner Tafel gegeben hat, die Werte $q = -7°$ und $q = +7°$ als äusserste Grenzen zu betrachten sind.

§ 97. Reihen-Entwicklung für das Vergrösserungs-Verhältnis.

Das Vergrösserungs-Verhältnis ist nach (10) § 93. S. 487:

$$m = \frac{A}{c}\,\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\,V \tag{1}$$

In der Normalbreite $\varphi = P$ (und $u = Q$) ist dieses Verhältnis $m = 1$; und wenn, wie bisher, irgend eine Breite auf der Kugel $u = Q + q$ gesetzt wird, so wird für irgend eine solche Breite sich das Verhältnis m als Funktion von q darstellen lassen, oder die Reihe für $\log m$ habe zunächst diese Form:

$$\log m = \left.\frac{d \log m}{d q}\right] q + \left.\frac{d^2 \log m}{d q^2}\right] \frac{q^2}{2} + \left.\frac{d^3 \log m}{d q^3}\right] \frac{q^3}{6} + \ldots \tag{2}$$

Da aber die beiden ersten Ableitungen von $\log m$ gleich Null gesetzt wurden (4) und (5) § 94. S. 488), so zieht sich (2) zusammen auf:

$$\log m = \left.\frac{d^3 \log m}{d q^3}\right] \frac{q^3}{6} + q^4 \ldots \tag{3}$$

Hiezu haben wir von (10) § 94. S. 489 die zweite Ableitung:

$$\frac{d^2 \log m}{d u^2} = \frac{-\alpha^2 + V^2 \cos^2 \varphi + \alpha \sin \varphi \sin u}{\alpha^2 \cos^2 u} = \frac{Z}{N} \tag{4}$$

also weiter:

$$\frac{d^3 \log m}{d u^3} = \frac{1}{N^2}\left(\frac{d Z}{d u} N - \frac{d N}{d u} Z\right) \tag{5}$$

Wenn man nachher wieder die Substitutionen für die Normalbreiten Q und P nach (14) § 96. S. 495 zu machen hat, wird man finden, dass der Zähler Z in (4) verschwindet, es bleibt also nur von (5):

$$\left.\frac{d^3 \log m}{d u^3}\right] = \left.\frac{1}{N} \frac{d Z}{d u}\right] \tag{6}$$

Da auch α^2 im Zähler Z von (4) konstant ist, handelt es sich also nur noch um:

$$\frac{d Z}{d u} = \frac{d}{d u}(V^2 \cos^2 \varphi + \alpha \sin \varphi \sin u)$$

$$= \left(2 V \frac{d V}{d \varphi} \cos^2 \varphi - 2 V^2 \cos \varphi \sin \varphi\right) \frac{d \varphi}{d u} + \alpha \cos \varphi \frac{d \varphi}{d u} \sin u + \alpha \sin \varphi \cos u \tag{7}$$

Dabei ist nach (8) und (7) § 94. S. 489 zu beachten mit $\tang \varphi = t$:

$$\frac{d V}{d \varphi} = -\frac{\eta^2}{V} t \quad \text{und} \quad \frac{d \varphi}{d u} = \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u}$$

Dieses in (7) eingesetzt giebt:

$$(-2 \eta^2 t \cos^2 \varphi - 2 V^2 \cos \varphi \sin \varphi) \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} + \alpha \cos \varphi \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} \sin u + \alpha \sin \varphi \cos u$$

Nun muss man wieder die Substitutionen (14) § 96. S. 495 machen, wodurch $\frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} = V$ wird, und die vorstehende Gleichung giebt dadurch mit $t = \tang \varphi$:

$$\left.\frac{d Z}{d u}\right] = -2 V \eta^2 t \cos^2 \varphi - 2 V^3 \cos \varphi \sin \varphi + \alpha \cos \varphi\, V + \alpha \sin \varphi \cos u$$

Wenn man weiter den Nenner $N = \alpha^2 \cos^2 u$ aus (4) zusetzt und wieder von (14) § 96. S. 495 berücksichtigt, dass $\frac{\cos^2 \varphi}{N} = \frac{1}{V^2}$, so wird man vollends erhalten:

$$\left.\frac{d^3 \log m}{d u^3}\right] = -\frac{2 \eta^2}{V} t - 2 V t + \frac{1}{V} t + \frac{1}{V} t$$

und mit $V^2 = 1 + \eta^2$ zieht sich dieses zusammen, wobei nun $t = \tang P$ wird:

$$\left.\frac{d^3 \log m}{d u^3}\right] = \frac{-4 \eta^2}{V} t = -\frac{4 \eta^2}{V} \tang P \tag{8}$$

Die gesuchte Reihe für $\log m$ ist daher nach (3):

$$\log m = -\frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V} t q^3 + q^4 \ldots \qquad \text{mit } t = \tang P \tag{9}$$

Wenn man hiebei stehen bleiben will, d. h. wenn man q^4 und p^4 vernachlässigen will, so kann man leicht auch $\log m$ in p^3 ausdrücken, denn da nach (19) § 96. S. 496 in erster Näherung $p = q V$ ist, kann man (9) auch so schreiben:

$$\log m = -\frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V_4} t p^3 + \ldots \qquad \text{mit } t = \tang P \tag{10}$$

In (9) und (10) bedeutet *log* den natürlichen Logarithmus; will man also gewöhnliche Briggsche Logarithmen haben, so muss man noch den Modulus μ zusetzen, und wenn man zugleich die Formeln für q oder p in Graden einrichten will, so muss man noch mit $\varrho^{\circ 3}$ dividieren; d. h. man erhält aus (9):

$$log\, m = -\frac{\mu}{\varrho^{\circ 3}} \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V} t\, q^3 \qquad \text{mit } t = tang\, P \tag{11}$$

Die Ausrechnung mit den Konstanten von (25)—(28) § 94. S. 491 giebt für Einheiten der siebenten Logarithmenstelle:

$$log\, m = -0{\cdot}049\,796\,165\, q^3 + \ldots \tag{12}$$

Auf gleiche Weise erhält man von (10):

$$log\, m = -0{\cdot}049\,612\,434\, p^3 + \ldots \tag{13}$$

In Art. 7. und Art. 9. der „Untersuchungen über Gegenst. d. höheren Geodäsie" hat Gauss diese Entwicklungen bis zur sechsten Potenz fortgesetzt, wodurch erhalten wurde:

$$\left. \begin{aligned} log\, m = -49796{\cdot}16394 \left(\frac{q}{100}\right)^3 - 16150{\cdot}3076 \left(\frac{q}{100}\right)^4 - 23973{\cdot}954 \left(\frac{q}{100}\right)^5 \\ - 125\,671{\cdot}0 \left(\frac{q}{100}\right)^6 \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

Dabei ist q in Einheiten von 1° und $log\, m$ in Einheiten der 7ten Dezimale des Logarithmus gezählt. Unsere Formel (12) ist also nur die erste Näherung der Gaussschen Formel (12a), nach welcher die Gaussschen Werte $log\, m$ unserer Anhangstafel Seite [60]—[61] berechnet sind. Beispielshalber nehmen wir für $q = -4°$ oder $u = 46° 40'$ und für $q = +4°$ oder $u = 58° 40'$ aus jener Tafel $log\, m = +10{\cdot}559$ und $log\, m = -10{\cdot}990$, während die Näherungsformel (12) in beiden Fällen nur giebt $log\, m = +10{\cdot}7$ und $= -10{\cdot}7$.

Bisher haben wir immer nur $log\, m$ behandelt, eine Formel für m selbst erhalten wir, da in (9) und (10) natürliche Logarithmen gelten, sehr einfach hieraus:

$$m = 1 - \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V} t\, q^3 + \ldots \quad \text{oder} \quad m = 1 - \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V^4} t\, p^3 \tag{15}$$

und umgekehrt (wobei immer $t = tang\, P$ bedeutet):

$$\frac{1}{m} = 1 + \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V} t\, q^3 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{m} = 1 + \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V^4} t\, p^3 \tag{16}$$

Reduktion von Entfernungen.

Der Wert m gilt nur für unendlich kleine Entfernungen, d. h. wenn dS eine kleine Entfernung auf dem Ellipsoid und ds die entsprechende Entfernung auf der Kugel bedeutet, so ist

$$m = \frac{ds}{dS} \quad \text{oder} \quad dS = \frac{1}{m} ds$$

und um auch endliche Entfernungen s und S vergleichen zu können, hat man diese Gleichung zu integrieren, ähnlich wie schon in § 50. S. 282 und in § 85. S. 455 geschehen ist.

Zu diesem Zwecke zählen wir die sphärische Breiten-Differenzen q von einem Werte q_1 an, welcher dem Anfang des ganzen Bogens s entspricht und die Länge des Bogens s selbst zählen wir ebenfalls vom Anfang an mit $+x$ in dem Azimut β_1.

Da der Kugelhalbmesser = A ist, haben wir die Breiten-Differenz $q - q_1$ als eine Reihe nach Potenzen von x mit dem Ausgangs-Azimut β_1, d. h. wir können dazu die früheren allgemeinen Reihenentwicklungen von § 64. benützen, d. h. wir haben von (27) S. 359 mit $u = \frac{x}{A} \cos \beta_1$ und mit $v = \frac{x}{A} \sin \beta_1$:

Breitendifferenz $$q - q_1 = \frac{x}{A} \cos \beta_1 - \frac{x^2}{2\,A^2} \sin^2 \beta_1 \tang (Q + q_0)$$

Es genügt für das Folgende zu wissen, dass dieses eine quadratische Funktion von x ist, und dass damit auch $\frac{1}{m}$ nach (16) sich in eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln lassen wird, ganz ebenso wie bei einer früheren ähnlichen Betrachtung von § 85. sich der Ausdruck $\frac{1}{m}$ als eine Potenzreihe $\alpha + \beta\, l + \gamma\, l^2 + \ldots$ auf S. 456. oben darstellen liess.

Das genügt auch, um die Beziehung zwischen einer auf dem Ellipsoid liegenden geodätischen Linie S und ihrem Abbilde s auf der Kugel durch eine Beziehung darzustellen, welche der früheren (31) § 85. S. 457 oder auch (16) § 50. S. 282 entsprechend, in erster Näherung so lautet:

$$\frac{S}{s} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_2}\right) \tag{17}$$

wobei m_1 das Vergrösserungs-Verhältnis am Anfang, m_0 in der Mitte und m_2 am Ende bedeutet.

Wenn die verschiedenen m nicht sehr verschieden sind, so kann man noch mehr genähert rechnen, und z. B. logarithmisch kurz so nehmen:

$$\log s - \log S = \frac{\log m_1 + \log m_2}{2} \tag{18}$$

Das ist auch dasselbe, wie wenn man schreibt:

$$\frac{s}{S} = \sqrt{m_1\, m_2} \tag{19}$$

Dazu sei auch nochmals bemerkt, dass S die geodätische Linie auf dem Ellipsoid und s die entsprechende Linie auf der konformen Kugel vom Halbmesser A ist.

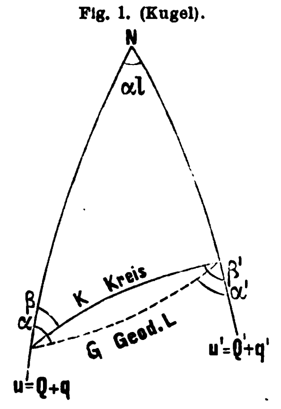
§ 98. Azimut-Reduktion.

Wenn zwei Punkte des Ellipsoids auf die Kugel konform abgebildet sind, so kann man auch die Verbindungslinien beider Punkte in Betracht ziehen, und zwar denken wir uns auf dem Ellipsoid beide Punkte durch eine geodätische Linie und auf der Kugel durch einen Grosskreisbogen verbunden.

Man darf aber nicht annehmen, dass nun der Grosskreisbogen schlechthin die Abbildung der geodätischen Linie sei; das ist ebensowenig der Fall, als dass bei der ebenen konformen Abbildung von § 50. die Gerade in der Ebene als Abbildung des Grosskreisbogens genommen werden dürfte, und wir werden eine ähnliche Betrachtung wie bei Fig. 5. S. 281 oder Fig. 2. S. 453 nun auch für die Kugelabbildung anzustellen haben.

In nebenstehender Fig. 1., welche sich auf die Kugel bezieht, betrachten wir zwei von dem Ellipsoid herübergetragene Punkte mit den Kugelbreiten u und u' und dem Längen-Unterschied $\alpha\, l$. Der mit K bezeichnete Verbindungsbogen sei grösster Kreisbogen der Kugel, und ausserdem haben wir eine Kurve G gezogen, welche das konforme Kugel-Abbild der geodätischen Linie des Ellipsoids ist.

Fig. 1. (Kugel).



Eine geodätische Linie des Ellipsoids bildet sich, wie schon zu Anfang bemerkt wurde, im allgemeinen nicht als Grosskreisbogen der Kugel ab, und es handelt sich nun darum, die Azimut-Differenzen $\alpha - \beta$ und $\beta' - \alpha'$ zwischen dem Abbild G der geodätischen Linie und dem Grosskreisbogen K zu bestimmen.

Nach dem Prinzip der Konformität sind hiebei die Azimute α und α', welche das Abbild der geodätischen Linie auf der Kugel zeigt, gleich den Azimuten α und α' der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid, so dass die Azimut-Differenzen $\alpha - \beta$ und $\alpha' - \beta'$ der sphärischen Fig. 1. das sind, was wir bestimmen müssen.

Unsere nächste Aufgabe wird sein, das Krümmungs-Differential der Linie G relativ gegen K (Fig. 1.) zu bestimmen, und dafür haben wir mit Fig. 2. eine Differential-Figur zu Fig. 1. besonders herausgezeichnet.

Fig. 2.

Wir betrachten mit Fig. 2. die Meridian-Konvergenz $\alpha_2 - \alpha_1$ für ein kleines Stück des Abbildes der geodätischen Linie, und die Meridian-Konvergenz $\beta_2 - \beta_1$ für ein entsprechendes, zwischen denselben Meridianen liegendes Stück des Kreisbogens. Dabei ist $d\,l$ der Längenunterschied auf dem Ellipsoid, also $\alpha\, d\, l$ der entsprechende Längenunterschied auf der Kugel, wobei α die Längen-Reduktionskonstante nach (15) § 94. S. 489 bedeutet.

Dazu bestehen zwei Differentialgleichungen:

Grosskreisbogen KK' $\qquad \beta_2 - \beta_1 = d\,l \sin\varphi \qquad$ (1)

Ellipsoid oder Kugel-Abbild GG' $\qquad \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha\, d\, l \sin u \qquad$ (2)

Also die Differenz $\quad \delta = (\beta_2 - \beta_1) - (\alpha_2 - \alpha_1) = d\,l\,(\alpha \sin u - \sin\varphi) \qquad$ (3)

Diese Differenz δ ist die Krümmung des Bogens GG', indem die drei anderen Seiten des unendlich kleinen Vierecks Fig. 2. als Grosskreisbogen keine geodätische Krümmung haben und in der Differentialbetrachtung als Gerade zu betrachten sind. Es ist nämlich die Winkelsumme des kleinen Vierecks von Fig. 2.:

$$(180^\circ - \beta_1) + \beta_2 + (180 - \alpha_2) + \alpha_1 = 360^\circ + (\beta_2 - \beta_1) - (\alpha_2 - \alpha_1) = 360^\circ + \delta$$

und dieses stimmt mit dem in Fig. 2. eingeschriebenen Winkel δ, sowie mit der Bedeutung von δ in der Gleichung (3).

Zur schärferen Begründung der Gleichung (3) mag auch noch bemerkt werden, dass der Querabstand y der Linien K und G sich nachher als sehr klein, nur von der Ordnung $\eta^2 s^2 q^2$ zeigen wird und deswegen kommt der sphärische Excess des kleinen Vierecks, d. h. die Flächenkrümmung neben der Linienkrümmung, nicht in Betracht.

Wir wollen nun mit Fig. 3. ein sphärisches Coordinatensystem $x\,y$ annehmen, wobei der Kreisbogen $Q_1\,Q_2$ als x-Axe die Bedeutung von der Linie K in Fig. 1. und der Linie L' von Fig. 3. dieselbe Bedeutung wie die Linie G in Fig. 1. hat, nämlich konformes Abbild der geodätischen Linie.

Fig. 3.

Da man nun aus den schon angegebenen Gründen das sphärische Coordinatensystem $x\,y$ in erster Näherung wie ein ebenes rechtwinkliges System behandeln darf, dürfen wir auch das bei (3) gefundene Krümmungs-Differential zu der Gleichung benützen:

$$-\frac{d^2 y}{d\,x^2} = \frac{\delta}{d\,x} = (\alpha \sin u - \sin \varphi)\frac{d\,l}{d\,x} \tag{4}$$

Dabei mussten wir die linke Seite negativ schreiben, weil bei dem Coordinatensystem von Fig. 3. die Kurve L' gegen die x-Axe konkav ist.

Nun kommt es zuerst darauf an, die Funktion $\alpha \sin u - \sin \varphi$ zu entwickeln, und dazu haben wir nach Fig. 3. und Fig. 4. § 93. S. 488

$$\varphi = P + p \qquad u = Q + q$$

also nach der Taylorschen Reihe:

$$\sin \varphi = \sin P + p \cos P - \frac{p^2}{2} \sin P \tag{5}$$

$$\alpha \sin u = \alpha \sin Q + \alpha\, q \cos Q - \alpha \frac{q^2}{2} \sin Q \tag{6}$$

Zur Vergleichung zwischen p und q hat man nach (18) § 96. S. 496 die Reihe:

$$q = \frac{p}{V} + \frac{3}{2}\frac{\eta^2}{V^3} p^2 \operatorname{tang} P \tag{7}$$

Zugleich beachte man auch die Grundformeln für P und Q nach (14) und (17) § 94. S. 489:

$$\alpha \sin Q = \sin P \quad \text{und} \quad \alpha \cos Q = V \cos P \tag{8}$$

Aus (5) und (6) bekommt man zunächst, da sich die ersten Glieder wegen (8) aufheben:

$$\alpha \sin u - \sin \varphi = \alpha\, q \cos Q - p \cos P + \frac{p^2 - q^2}{2} \sin P \tag{9}$$

Wegen (8) und (7) ist aber:

$$\alpha\, q \cos Q = V \cos P\left(\frac{p}{V} + \frac{3}{2}\frac{\eta^2}{V^3} p^2 \operatorname{tang} P\right)$$

und wegen (7):

$$p^2 = q^2\, V^2 = q^2 (1 + \eta^2) \quad \text{oder} \quad p^2 - q^2 = \frac{p}{V^2}\eta^2$$

Damit kann man (9) zusammensetzen:

$$\alpha \sin u - \sin \varphi = \frac{3}{2}\frac{\eta^2}{V^2} p^2 \sin P + \frac{1}{2}\frac{p^2}{V^2}\eta^2 \sin P$$

$$\alpha \sin u - \sin \varphi = \frac{2\,\eta^2}{V^2} p^2 \sin P \quad \text{oder} \quad = 2\,\eta^2\, q^2 \sin P \tag{10}$$

Zurückgreifend auf (4) haben wir also die Krümmungs-Differentialgleichung:

$$-\frac{d^2 y}{d x^2} = 2\eta^2 q^2 \sin P \frac{d l}{d x} \tag{11}$$

Das Differential dl der geographischen Länge l hat man nach der allgemeinen Reihenentwicklung von (6) § 74. S. 393:

$$d l = \frac{V}{c} \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} = \frac{d S}{N} \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} \tag{12}$$

Statt dS für die geodätische Linie können wir in unserem Falle genügend genau dx setzen, und indem wir auch noch in erster Näherung $\varphi = P$ nehmen, haben wir aus (11) und (12):

$$-\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{2\eta^2}{N} q^2 \sin \alpha \tang P \tag{13}$$

Dabei beziehen sich N, α und P auf das Ellipsoid, und wenn wir zur Kugel übergehen wollen, ist $N = A\, V$ zu setzen (da N die Bedeutung von r in (24) § 32. S. 197 hat). Das Azimut α kann hinreichend genau gleich dem Kugelazimut β gesetzt werden und nach (8) ist $\tang Q = V \tang P$, folglich giebt nun (13) beim Übergang zur Kugel:

$$-\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{2\eta^2 q^2}{A\, V^2} \sin \beta \tang Q \tag{14}$$

wobei wir zur Abkürzung schreiben wollen:

$$\frac{2\eta^2}{A\, V^2} \sin \beta \tang Q = F \tag{15}$$

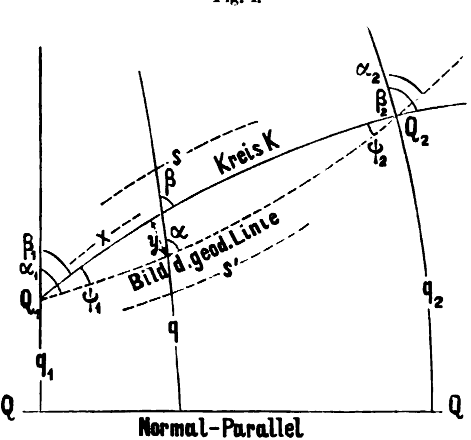
oder

$$\frac{2\eta^2}{A\, V} \sin \beta \tang P = F \tag{15a}$$

Um auf x überzugehen, haben wir in erster Näherung nach Fig. 4. zu setzen:

$$q = q_1 + \frac{x}{A} \cos \beta_1 + \ldots \quad \text{also} \quad q^2 = q_1^2 + 2\, q_1 \frac{x}{A} \cos \beta_1 + \ldots \tag{16}$$

Fig. 4.



Hiebei ist q_1 derjenige Wert von q, welcher zu dem Anfangspunkt Q_1 gehört, und q_2 derjenige Wert von q, welcher zu dem Endpunkte Q_2 des betrachteten Bogens s

gehört. In gleicher Weise haben wir auch für das Azimut β, welches der Breite q und der Abscisse x entspricht, nach (29) S. 359 mit $v = \frac{x}{A} \sin \beta_1$:

$$\beta = \beta_1 + \frac{x}{A} \sin \beta_1 \, tang \, Q_1$$

$$\sin \beta = \sin \beta_1 + \frac{x}{A} \sin \beta_1 \cos \beta_1 \, tang \, Q_1 \tag{17}$$

Man hat also aus (16) und (17):

$$q^2 \sin \beta = q_1^2 \sin \beta_1 + \frac{x}{A} (2 \, q_1 \sin \beta_1 \cos \beta_1 + q_1^2 \sin \beta_1 \cos \beta_1 \, tang \, Q_1) \tag{18}$$

Dieses ist eine lineare Funktion von x, welche zur vorübergehenden Abkürzung so geschrieben werden mag:

$$q^2 \sin \beta = f + g \, x \quad , \quad \text{wobei } f = q_1^2 \sin^2 \beta_1 \tag{19}$$

Damit wird nach (14) und (15):

$$-\frac{d^2 y}{d x^2} = F (f + g \, x) \tag{20}$$

$$\text{integriert:} \qquad -\frac{dy}{dx} = -\psi_1 + F \left(f x + \frac{g \, x^2}{2} \right) \tag{21}$$

$$-y = -\psi_1 \, x + F \left(\frac{f x^2}{2} + \frac{g \, x^3}{6} \right) \tag{22}$$

Dabei ist $-\psi_1$ bei (2) als Integrations-Konstante zugesetzt, während in (22) bei y, das mit $x = 0$ verschwinden muss, keine weitere Integrations-Konstante hinzukommt. Wenn $x = s$ wird, so muss $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = -\psi_2$ werden, dieses giebt aus (22) und (21) folgende zwei Gleichungen:

$$0 = -\psi_1 \, s + F \left(f \frac{s^2}{2} + g \frac{s^3}{6} \right)$$

$$+ \psi_2 = -\psi_1 + F \left(f s + g \frac{s^2}{2} \right)$$

Diese zwei Gleichungen dienen zur Bestimmung von ψ_1 und ψ_2, und geben nach ψ_1 und ψ_2 aufgelöst:

$$\psi_1 = F s \left(\frac{f}{2} + g \frac{s}{6} \right) \quad \text{oder} \quad = \frac{F s}{6} (2 f + f + g \, s) \tag{23}$$

$$\psi_2 = F s \left(\frac{f}{2} + g \frac{s}{3} \right) \quad \text{oder} \quad = \frac{F s}{6} \Big(f + 2 (f + g \, s) \Big) \tag{24}$$

Die Bedeutungen von f und g sind durch (19) zu bestimmen:

für $x = 0$ wird $q_1^2 \sin^2 \beta_1 = f$

" $x = s$ " $q_2^2 \sin^2 \beta_2 = f + g \, s$

Diese zwei Gleichungen in Verbindung mit (23) und (24) geben:

$$\psi_1 = \frac{F s}{2} \, \frac{2 \, q_1^2 \sin \beta_1 + q_2^2 \sin \beta_2}{3} \qquad \psi_2 = \frac{F s}{2} \, \frac{q_1^2 \sin \beta_1 + 2 \, q_2^2 \sin \beta_2}{3} \tag{25}$$

Um den Faktor F nach (15) oder (15_a) einzuführen, und nachher das, was sich tabellarisch berechnen lässt, abzutrennen, führen wir die Funktion ein:

$$\frac{\eta^2}{V^2} \, tang \, Q \, q^2 \quad \text{oder} \quad \frac{\eta^2}{V} \, tang \, P q^2 = k \tag{26}$$

Dieses allgemeine k wird auf den Anfangspunkt und auf den Endpunkt angewendet mit:

$$k_1 = \frac{\eta^2}{V} tang\, P q_1^2 \quad \text{und} \quad k_2 = \frac{\eta^2}{V} tang\, P q_2^2 \tag{27}$$

Damit gehen die Formeln (25) und (26) in diese Formen über:

$$\alpha_1 - \beta_1 = \psi_1 = \frac{2\, k_1 \sin \alpha_1 + k_2 \sin \alpha_2}{3} \frac{s}{A} \tag{28}$$

$$\beta_2 - \alpha_2 = \psi_2 = \frac{k_1 \sin \alpha_1 + 2\, k_2 \sin \alpha_2}{3} \frac{s}{A} \tag{29}$$

Zur Anwendung in Zahlen muss man die Funktion k nach (26) auf bestimmtes Mass einrichten. Nehmen wir wie bisher q in Graden und dann die kleinen Winkel ψ in Sekunden, so hat man zu setzen:

$$k = \frac{\varrho''}{\varrho^{\circ 2}} \frac{\eta^2}{V} tang\, P q^2 = 20\, \pi \frac{\eta^2}{V} tang\, P q^2$$

mit den Konstanten von § 98. wird dieses ausgerechnet:

$$k = 0{,}203\,259\,386\, q^2 \qquad (log = 1.798\,1798 \cdot 684)$$

Die hiernach berechneten Werte k sind nur erste Näherungen, welche von den genaueren Werten k der Gauss schen Tafel ähnliche Abweichungen zeigen, wie zwischen den ersten Näherungen und den genauen Werten von $log\, m$, welche wir bei (14) § 97. S. 499 zusammengestellt haben.

§ 99. Allgemeine Beziehung zwischen dem Vergrösserungs-Verhältnis m und dem Krümmungs-Differential der Abbildung.

Im vorigen § 98. haben wir das Krümmungs-Differential δ des Abbildes einer geodätischen Linie durch eine Differentialbetrachtung in Fig. 2. S. 501 aus den besonderen Eigenschaften unseres Abbildungsfalles hergeleitet, und es wird wohl immer möglich sein, die besondere Art einer konformen Abbildung zu Rat zu ziehen, um jenes Krümmungs-Differential zu erlangen.

So haben wir z. B. auch in § 50. mit Fig. 2. S. 283 und in § 85. mit Fig. 2. S. 453, und auch noch bei der Gauss schen konformen ebenen Abbildung in § 88. S. 472 verfahren.

Es giebt aber eine ganz allgemeine Beziehung zwischen dem Differential $d\,m$ und dem Krümmungs-Differential $\delta = \frac{d\,s}{R}$, mit Hilfe deren man, sobald m, das man ja jedenfalls haben muss, entwickelt ist, sofort auch δ finden kann.

Die allgemeine Theorie zur Bestimmung von δ aus m ist von Gauss in Art. 12.—13. der Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie und in §. 14. von Schreiber, Theorie der Projektionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung, Hannover 1866, gegeben, wobei beidemal die geodätische Linie nach den Regeln der Variationsrechnung als kürzeste Linie aufgefasst wird.

Eine mehr geometrisch anschauliche Entwicklung und Darstellung dieser Bahn hat Professor *Schols* in Delft gegeben in der Abhandlung: Annales de l'école polytechnique de Delft. 1re livraison. Leide, E. J. Brill 1884. Sur l'emploi de la projection de Mercator pour le calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'équateur, par Ch. M. Schols.



In § 10. dieses Werkes wird mit beistehender Fig. 1. entwickelt:

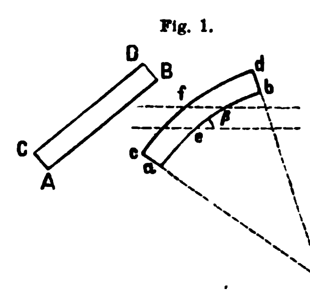
Das Rechteck $ABCD$ des Urbildes sei aus unendlich kleinen geodätischen Linien gebildet, und werde konform abgebildet in dem krummlinigen Viereck $abcd$. Durch die Mitten e und f der Seiten ab und cd werden Linien gezogen, in welchen das Vergrösserungs-Verhältnis konstant ist.

(Diese Linien für konstantes Vergrösserungs-Verhältnis m sind in Fig. 1. punktiert gezogen, wobei auch bemerkt sei, dass e die Mitte von ab sein sollte, was in dem Holzschnitt etwas verfehlt dargestellt ist).

Wenn dz der Parallelabstand der beiden punktierten Linien und β deren Winkel mit ab ist, so haben wir:

$$ac = bd = ef \frac{dz}{\cos\beta} \tag{1}$$

Fig. 1.



Die kurzen Linien ca und db werden verlängert bis zu ihrem Schnitte o, so dass oa der Krümmungs-Halbmesser der Kurve ab ist, woraus folgt:

$$\frac{oc}{oa} = \frac{oa + ac}{oa} = \frac{cd}{ab} \tag{2}$$

also aus (1) und (2) zusammen:

$$\frac{oa + \frac{dz}{\cos\beta}}{oa} = 1 + \frac{1}{oa}\frac{dz}{\cos\beta} = \frac{cd}{ab} \tag{3}$$

Nun ist zu beachten, dass Fig. 1 eine Differentialfigur sein soll, dass also cd und ab unendlich klein sind, dass also längs cd und ab das Vergrösserungs-Verhältnis m als konstant gilt, und zwar sei:

$$m = \frac{ab}{AB} \quad \text{und} \quad m + dm = \frac{cd}{CD} = \frac{cd}{AB}$$

$$\frac{cd}{ab} = \frac{m + dm}{m} = 1 + \frac{dm}{m} \tag{4}$$

Man hat also aus (3) und (4):

$$1 + \frac{1}{oa}\frac{dz}{\cos\beta} = 1 + \frac{dm}{m}$$

Bezeichnen wir den Krümmungs-Halbmesser oa mit R oder die Krümmung mit $1:R$, so haben wir also:

Krümmung
$$\frac{1}{R} = \frac{dm}{m\,dz}\cos\beta \tag{5}$$

oder wenn mit $\log m$ der natürliche Logarithmus von m bezeichnet wird:

Krümmung
$$\frac{1}{R} = \frac{d\log m}{dz}\cos\beta \tag{6}$$

Als erste Anwendung dieser allgemeinen Formel wollen wir den besonderen Fall von § 50. S. 281 nehmen mit:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2r^2} \quad \text{oder} \quad \log m = \frac{y^2}{2r^2} \tag{7}$$

Die Richtung der z ist hier mit der Richtung y übereinstimmend, weil die Linien für konstantes m nach Fig. 3. S. 279 parallel der x-Axe gehen, und β von (6) ist

der Richtungswinkel t_1 von Fig. 6. S. 283, es giebt also die allgemeine Gleichung (6) in unserem besonderen Falle:

Krümmung
$$\frac{1}{R} = \frac{d\frac{y^2}{2r^2}}{dy}\cos t_1 = \frac{y}{r^2}\cos t_1 \tag{8}$$

Dieses (12) stimmt mit (28) Fig. 50. S. 283, wenn man das auf der folgenden Seite 284 oben stehende $\frac{dx}{d\xi} = \cos t_1$ berücksichtigt, und auch das Vorzeichen — entsprechend der Lage des Coordinatensystems einsetzt.

Nach dieser ersten Anwendung auf den einfachen Fall von § 50. wollen wir auch die Anwendung der allgemeinen Formel (6) auf unseren Fall der konformen Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel vornehmen.

Dabei ist es zuerst nötig, die Bedeutung des Winkels β aufzusuchen, d. h. des Winkels, welchen eine abzubildende geodätische Linie mit den Linien konstanter Vergrösserung m bildet, und da in unserem Falle die Vergrösserung m nur von der geographischen Breite abhängt, ist das β der allgemeinen Formel (6) entsprechend $90° - \alpha$, wenn α das von der Meridianrichtung an gezählte Azimut ist. Setzen wir ausserdem die Krümmung $1 : R = -\frac{d^2 y}{d x^2}$ in dem Sinne von Fig. 3. und Fig. 4. § 98. S. 502 und 503, so haben wir aus (6) zunächst:

$$-\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d \log m}{d z}\sin\alpha \quad \text{oder} \quad = \frac{d \log m}{d z}\sin\beta \tag{9}$$

wobei die Azimute α und β von Fig. 4. § 98. S. 503 hinreichend als gleich angenommen werden können. Weiter haben wir von (9) und (10) § 97. S. 498:

$$\log m = -\frac{2}{3}\frac{\eta^2}{V^4}\tan g\, P p^3 \quad \text{oder} \quad = -\frac{2}{3}\frac{\eta^2}{V}\tan g\, P q^3 \tag{10}$$

Das Differential dz, welches in der allgemeinen Formel (6) vorkommt, ist in der Meridianrichtung zu suchen, d. h. es ist $dz = A\,dq$, wobei nach (24) S. 197 der mittlere Krümmungs-Halbmesser des Ellipsoids, welcher als Kugelabbildungs-Halbmesser dient, ist:

$$A = \frac{c}{V^3} \quad \text{oder auch} \quad A = \frac{N}{V}$$

weshalb man nun hat:

$$\frac{d \log m}{d z} = \frac{d \log m}{d q}\frac{d q}{d z} = -\frac{2\,\eta^2}{V} q^2 \tan g\, P \frac{d q}{d z}$$

$$\frac{d \log m}{d z} = -\frac{2\,\eta^2\,q^2}{V\,A}\tan g\, P = -\frac{2\,\eta^2\,q^2}{V^2\,A}\tan g\, Q \tag{11}$$

Dabei ist $\tan g\, Q = V \tan g\, P$ gesetzt nach (17a) § 94. S. 489.

Aus (6) und (7) hat man also jetzt:

$$-\frac{d^2 z}{d x^2} = \frac{2\,\eta^2\,q^2}{V^2\,A}\tan g\, Q \sin\beta \tag{12}$$

Dieses (8) stimmt mit dem früheren (14) § 98. S. 503, womit also eine zweite Herleitung des Krümmungs-Differentials gegeben ist, aus welchem die Azimut-Reduktionen von § 98. sich ergeben.

§. 100. Hilfstafeln und Zahlenbeispiele.

Gauss hat eine ausführliche Tafel zur Reduktion der sphärischen Breiten auf sphäroidische Breiten nebst *log m* und *k* berechnet und in den „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie", erste Abhandlung S. 37—45 mitgeteilt. (Carl Friedrich Gauss' Werke, IV. Band, Göttingen 1873, S. 293—300.)

Auf Seite [60]—[61] unseres Anhangs haben wir einen Auszug der Gauss schen Tafel abgedruckt, mit dem 10fachen Intervall $\varDelta u = 10'$, ($\varDelta u = 1'$ bei Gauss). Ausserdem haben wir auf Seite [59] eine Hilfstafel zur Reduktion der geographischen Längen mit der Konstanten α beigegeben.

Unsere Haupttafel Seite [60]—[61] verlangt Interpolation mit zweiten Differenzen, wozu § 30. S. 183 Anleitung giebt. Damit bekommt man nahezu dieselbe Genauigkeit, wie mit der Originaltafel selbst, so dass für einzelne Fälle der Auszug als Ersatz des nicht immer zugänglichen Originals dienen kann. Auch giebt der Auszug eine bequeme Übersicht der Gesamt-Verhältnisse; man sieht z. B., dass *log m* nicht über 0·1 geht auf der ganzen breiten Zone von 51° 20′ bis 54° 0′. Ähnlich verhält es sich mit den Azimut-Korrektionen, welche von der Tafelgrösse *k* abhängen; man kann also auf dieser ganzen nahe 3° oder rund 300 000 Meter breiten Zone eine Triangulierung sphärisch berechnen, ohne eine andere Nebenarbeit als das Verwandeln der Breiten φ und u durch Aufschlagen in der Tafel.

Wenn die neuen Berechnungen der trigonometrischen Abteilung der Preussischen Landesaufnahme, die wir schon in § 94. bei (24)—(25) S. 490 erwähnt haben, veröffentlicht sein werden, so werden diese an Stelle der alten Gauss schen Originaltafeln zu benützen sein.

Ausser der Gauss schen Tafel ist in neuerer Zeit noch eine zweite solche Tafel mit südlicherer Normalbreite, nämlich $Q = 46°\ 36'$, berechnet worden von Marek und Horsky. Dieselbe, welche, wie die Gauss sche Tafel, die Bessel schen Erddimensionen zu Grunde legt, ist mitgeteilt in dem Werke von Marek: „Technische Anleitung zur Ausführung der trigonometrischen Operationen des Katasters, Budapest 1875", S. 252 262. Einiges weitere hierüber haben wir früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1877", S. 40—46 mitgeteilt, und einen Auszug der Marek schen Tafel gab unsere frühere dritte Auflage, Karlsruhe 1878, S. 403—404.

Als Anwendung der Gauss schen Theorie und der zugehörigen Hilfstafeln wollen wir die Berechnung unseres kleinen sphäroidischen Normal-Beispiels (1) § 73. S. 391 nehmen in dieser Form:

$$\text{Gegeben:}\ \varphi_1 = 49°\ 30'\ 0'' \qquad \varphi_2 = 50°\ 30'\ 0'' \tag{1}$$

$$l = 1°\ 0'\ 0'' \tag{2}$$

Gesucht: α_1, α_2 und s.

Das erste ist, die Breiten φ_1 und φ_2 auf die Kugel zu übertragen, d. h. die entsprechenden u_1 und u_2 aus der Tafel zu entnehmen. Von Seite [60] unseres Anhangs haben wir:

u	φ	Differenzen	
49° 20′ 0″	49° 21′ 44,31358″	+ 10′ 1,07480″	— 0,01736″
49° 30′ 0″	49° 31′ 45,38838″		
10′ 0″		= 601,07480″	
= 600″			

$\varphi = 49°\ 30'$ hat gegen die Nachbarwerte die Differenzen:

$$\left.\begin{array}{ll} & -8'\ 15{,}68642'' = -495{,}68642'' \\ \text{und} & +1'\ 45{,}38838'' = +105{,}38838'' \end{array}\right\}\ 601{,}07480''$$

Die Interpolation mit Rücksicht auf zweite Differenzen gab:

$$u = 49° \ 28' \ 14{,}79882''$$

Die Rechnung nach der Gaussschen Originaltafel gab auf 0,00001″ genau dasselbe, nämlich die Zusammenstellung für alle Werte, die uns hier interessieren:

Ellipsoid, φ	Kugel, u	$\log m$	k
49° 30′ 0″	$u_1 = 49° \ 28' \ 14{,}79881''$	1·609	2,049″
50° 0′ 0″	$49° \ 58' \ 11{,}67462''$	0·969	1,462″
50° 30′ 0″	$u_2 = 50° \ 28' \ 8{,}70541''$	0·525	0,973″

(3)

Aus den drei Werten $\log m$ bilden wir einen Mittelwert nach dem Gesetze der Gleichung (17) § 97. S. 500, welcher in der dort angegebenen Weise auch für $\log m$ gilt, und in unserem Falle giebt:

$$\log m = \frac{1{\cdot}609 + 4 \times 0{\cdot}969 + 0{\cdot}525}{6} = 1{\cdot}017 \tag{4}$$

Der Längenunterschied $l = 1° \ 0' \ 0''$ wird auf die Kugel reduziert durch Multiplikation mit der Konstante α, bzw. durch Benützung der Hilfstafel Seite [59] des Anhangs, mit dem Ergebnis:

$$\lambda = \alpha \, l = 1° \ 0' \ 1{,}630505'' \tag{5}$$

Nun macht man mit u_1 und u_2 von (3) nebst λ von (5) eine sphärische Polar-Dreiecksberechnung nach (4) und (5) § 60. S. 339, wodurch man erhält:

Sphärische Azimute $\beta_1 = 32° \ 25' \ 21{,}4923''$ $\quad \beta_2 = 33° \ 11' \ 19{,}4197''$ (6)

und $\quad \log \sin \frac{\sigma}{2} = 8{\cdot}015\,5452{\cdot}409 \quad , \quad \frac{\sigma}{2} = 0° \ 35' \ 37{,}85453''$

$$s' = A \frac{\sigma}{\varrho} \text{ giebt } \log s' = 5.121\,6104{\cdot}130$$

hiezu nach (4) $\quad - \log m = \quad - 1{\cdot}017$

$$\log s = 5.121\,6103{\cdot}113 \quad , \quad s = 132\,315{,}375^{m} \tag{7}$$

Es folgen noch die Azimut-Reduktionen nach den Formeln (28) und (29) §. 98. S. 505. Man hat hiezu die schon bei (3) angegebenen k und die abgerundeten Azimute:

$$k_1 = 2{,}049'' \qquad k_2 = 0{,}973''$$
$$\alpha_1 = 32° \ 25' \qquad \alpha_2 = 33° \ 11'$$

Die Ausrechnung nach den Formeln (28) und (29) S. 505 giebt:

$$\psi_1 = \alpha_1 - \beta_1 = +0{,}0189'' \qquad = \psi_2 = \alpha_2 - \beta_2 = -0{,}0149''$$

Diese Reduktionen zu β_1 und β_2 in (6) hinzugefügt, geben die sphäroidischen Azimute:

$$\alpha_1 = 32° \ 25' \ 21{,}5112'' \qquad \alpha_2 = 33° \ 11' \ 19{,}4048'' \tag{8}$$

In diesen (7) und (8) besteht die Auflösung der gestellten Aufgabe, und diese (7) und (8) stimmen auch hinreichend überein mit den entsprechenden Zahlenwerten von § 73. (1) S. 391.

§ 101. Doppel-Projektion der Preussischen Landesaufnahme.

Die Gausssche konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel ist zu einer wichtigen, praktischen Anwendung gebracht worden durch General Schreiber bei der trigonometrischen Abteilung der Preussischen Landesaufnahme.



Als Quellenschriften hiefür sind zu citieren:

„Verhandlungen der 1887er Konferenz in Nizza der perm. Komm. d. intern. Erdm., Berlin 1888, Annex Xb", S. 10—12, und frühere Mitteilung in Jordan-Steppes „Deutsches Vermessungswesen, 1882, I", S. 151—154. Weiteres ist auch citiert und erläutert in „Zeitschr. f. Verm., 1886", S. 253—256, und „Zeitschr. f. Verm., 1889", S. 8—14.

Namentlich v. Schmidt: Projektionsmethode der trigonometrischen Abteilung der Königl. Preuss. Landesaufnahme, „Zeitschr. f. Verm., 1894". S. 385—401 und S. 409—418.

Es mag auch hier nochmals an das erinnert werden, was wir schon in § 59. S. 330—332 hiezu angegeben haben.

Wenn man nach der Gauss schen Theorie das Ellipsoid auf eine Kugel abgebildet hat, so dass jedem Punkte mit der Länge l und der Breite φ auf dem Ellipsoid, ein Punkt mit der Breite u und der Länge λ auf der Kugel entspricht, so kann man mit diesen sphärischen geographischen Coordinaten u, λ beliebige sphärische Umwandlungen vornehmen, z. B. daraus sphärische rechtwinklige Coordinaten x, $\mathfrak{y}$ ableiten, und diese letzteren Coordinaten kann man wieder konform in ebene rechtwinklige Coordinaten x, y abbilden.

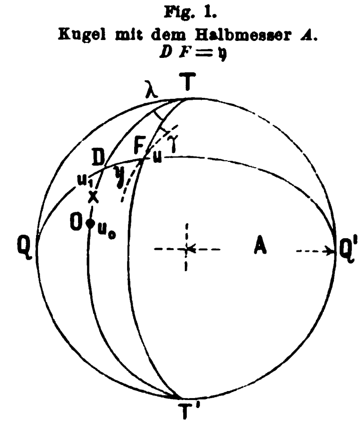
Dieses ist das System der Doppel-Projektion, welches für die trigonometrische Abteilung der Preussischen Landesaufnahme angenommen worden ist.

Als Vorbereitung hiezu haben wir bereits in § 50. und in § 85. manches gehabt, was nun weiter auszuführen ist.

I. Berechnung der sphärischen rechtwinkligen Coordinaten x, $\mathfrak{y}$.

In Fig. 1. haben wir die Gauss sche Kugel, vom Halbmesser A (nach § 94. S. 489), und darauf einen Meridian $T\,O\,T'$, von welchem die Längen λ gezählt werden.

Fig. 1.
Kugel mit dem Halbmesser A.
$D\,F = \mathfrak{y}$



Irgend ein Punkt F habe von diesem Anfangs-Meridian an gezählt, die Länge λ, nach Osten positiv, und ferner die Breite u. Derselbe Punkt habe auch die rechtwinkligen Coordinaten x, $\mathfrak{y}$ in Bezug auf den Ursprungs-Meridian, in welchem der Nullpunkt O mit der Breite u_0 angenommen wird. Die Ordinate $\mathfrak{y}$ liegt auf einem Bogen $Q\,Q'$ rechtwinklig zu $T\,O\,T'$ und bestimmt auf $T\,O$ die Fusspunktsbreite u_1 des Punktes D. Wir betrachten auch einen Parallelbogen zu $T\,O\,T'$, um die Meridian-Konvergenz γ zur Anschauung zu bringen, welche in dem Punkte F gegen den Anfangs-Meridian stattfindet.

Wenn wir nun die Aufgabe stellen, aus gegebenen u_0, u, λ die rechtwinkligen Coordinaten x, $\mathfrak{y}$, nebst der Meridian-Konvergenz γ zu bestimmen, so liefert uns die sphärische Trigonometrie sofort:

$$tang\, u_1 = \frac{tang\, u}{cos\, \lambda} \quad , \quad x = \frac{u_1 - u_0}{A} \tag{1}$$

$$sin \frac{\mathfrak{y}}{A} = sin\, \lambda\, cos\, u \tag{2}$$

$$tang\, \gamma = tang\, \lambda\, sin\, u \tag{3}$$

Diese Formeln werden wir in dieser geschlossenen Form benützen, und nicht in Reihen entwickeln, weil es sich um grosse Werte x und $\mathfrak{y}$ handelt, bei welchen die Entwicklung viele Glieder haben müsste.



II. Konforme ebene Abbildung der rechtwinkligen Coordinaten.

In Fig. 2. haben wir wieder dieselben Verhältnisse, wie in der vorhergehenden Fig. 1., jedoch mit zwei Punkten F und G, welche bzw. die rechtwinkligen Coordinaten x, $\mathfrak{y}$ und x', $\mathfrak{y}'$ haben.

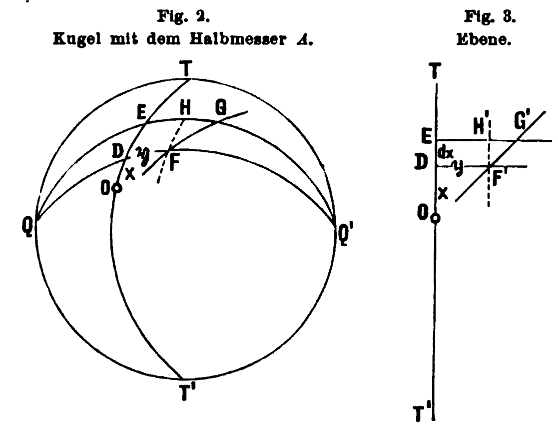


Fig. 3. zeigt ein ebenes Abbild von Fig. 2., wobei zuerst der Anfangs-Meridian $T\,E\,D\,O\,T'$ wieder als $T\,E\,D\,O\,T'$ erscheint, und zwar in unveränderter Grösse, so dass also $O\,D\,E$ in Fig. 2. und in Fig. 3. in gleichen Massen dargestellt sind, namentlich auch $O\,D = O\,D$ und $D\,E = D\,E$ in *beiden* Figuren.

Da der Punkt D die Breite u_1 und O die Breite u_0 hat, erhält man die Abscisse x des Punktes D und aller Punkte auf der Ordinate $D\,F$ aus der Differenz $u_1 - u_0$:

$$x = (u_1 - u_0)\frac{A}{\varrho} \tag{4}$$

wobei: $\quad log\,\frac{A}{\varrho} = 1.490\,6022{\cdot}671 \quad$ und $\quad u_0 = 52°\,40'\,0''$

Die Ordinatenlinie $D\,F'$ und $E\,G'$ in Fig. 3. sind geradlinig rechtwinklig zu $T\,T'$ gezogen, und die Ordinatenlängen $D\,F' = y$ und $E\,G' = y'$ sollen so gewählt werden, dass die Abbildung konform wird, d. h. so dass die beiden rechtwinkligen Dreiecke $F\,G\,H$ und $F'\,G'\,H'$, die wir nun als unendlich klein annehmen, einander ähnlich werden. Hiezu ist nötig, dass zwischen den Katheten ein konstantes Verhältnis besteht:

$$\frac{F'\,H'}{F\,H} = \frac{H'\,G'}{H\,G} = m \tag{5}$$

Hiebei ist:

$$\left.\begin{array}{ll} F'\,H' = d\,x \quad , & H'\,G' = d\,y \\ F\,H = d\,x\cos\frac{\mathfrak{y}}{A} \quad , & H\,G = d\,\mathfrak{y} \end{array}\right\} \tag{6}$$

Daraus folgt:

$$d\,y = \frac{1}{\cos\frac{\mathfrak{y}}{A}}\,d\,\mathfrak{y} \tag{7}$$

Die Integration dieser Gleichung giebt:

$$y = \frac{A}{\mu}\,log\,tang\left(45° + \frac{\mathfrak{y}}{2\,A}\right) \tag{8}$$

wobei, wie gewöhnlich, μ der logarithmische Modulus ist. Nachdem die Beziehung zwischen $\mathfrak{y}$ und y bestimmt ist, hat man auch das Vergrösserungs-Verhältnis m nach (4) und (7):

$$m = \frac{d\,y}{d\,\mathfrak{y}} = sec\,\frac{\mathfrak{y}}{A} \tag{9}$$

Diese Funktion kann man in eine Reihe entwickeln, wie schon in § 85. S. 451, 452 gezeigt wurde, namentlich nach (5) S. 452, wobei nun statt r der Wert A genommen wird:

$$y = \mathfrak{y} + \frac{\mathfrak{y}^3}{6\,A^2} + \frac{\mathfrak{y}^3}{24\,A^4} + \cdots \tag{10}$$

Dabei ist $\mathfrak{y}$ linear (in Metern) vorausgesetzt; wenn man aber $\mathfrak{y}$ in Winkelmass hat, was durch $\mathfrak{y}''$ (d. h. $\mathfrak{y}$ in Sekunden) ausgedrückt sein soll, so hat man (10) so zu schreiben:

$$y = A\left(\frac{\mathfrak{y}''}{\varrho''} + \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{y}''}{\varrho''}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{\mathfrak{y}''}{\varrho''}\right)^5 + \cdots\right) \tag{11}$$

oder:

$$y = \frac{A}{\varrho}\,\mathfrak{y}'' + \frac{A}{6\,\varrho^3}\,\mathfrak{y}''^3 + \frac{A}{24\,\varrho^5}\,\mathfrak{y}''^5$$

und mit ausgerechneten Coëfficienten-Logarithmen:

$$y = [1.490\,6022{\cdot}671]\,\mathfrak{y}'' + [0.083\,6007{\cdot}5]\,\mathfrak{y}''^3 + [8.85269]\,\mathfrak{y}''^5 \tag{11a}$$

Statt der Reihe (11) kann man auch eine Reihe entwickeln, welche y als Funktion von $sin\,\mathfrak{y}$ giebt. Nach § 28. S. 172 ist die *arc sin*-Reihe:

$$\frac{\mathfrak{y}}{A} = sin\,\frac{\mathfrak{y}}{A} + \frac{1}{6}\,sin^3\,\frac{\mathfrak{y}}{A} + \frac{3}{40}\,sin^5\,\frac{\mathfrak{y}}{A}$$

also nach (10):

$$\frac{y}{A} = \left(sin\,\frac{\mathfrak{y}}{A} + \frac{1}{6}\,sin^3\,\frac{\mathfrak{y}}{A} + \frac{3}{40}\,sin^5\,\frac{\mathfrak{y}}{A}\right) + \frac{1}{6}\left(sin^3\,\frac{\mathfrak{y}}{A} + \frac{1}{2}\,sin^5\,\frac{\mathfrak{y}}{A}\right) + \frac{1}{24}\,sin^5\,\frac{\mathfrak{y}}{A}$$

$$y = A\,sin\,\frac{\mathfrak{y}}{A} + \frac{A}{3}\,sin^3\,\frac{\mathfrak{y}}{A} + \frac{A}{5}\,sin^5\,\frac{\mathfrak{y}}{A} \tag{12}$$

und mit ausgerechneten Coëfficienten-Logarithmen:

$$y = [6.80502\,74{\cdot}003]\,sin\,\frac{\mathfrak{y}}{A} + [6.327\,9061]\,sin^3\,\frac{\mathfrak{y}}{A} + [6.10606]\,sin^5\,\frac{\mathfrak{y}}{A} \tag{12a}$$

Diese Entwicklung bis zur fünften Ordnung ist ausreichend für Abstände etwa bis zu 3°; für weitere Ausdehnung ist eine Entwicklung von Schols gegeben in der Abhandlung: Annales de l'école polytechnique de Delft, 1re livraison, Leide, 1884. Sur l'emploi de la projection de Mercator pour le calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'équateur, par Ch. M. Schols. Bis zur 11ten Ordnung giebt Schols § 25.:

$$y = \mathfrak{y} + \frac{1}{6}\,\frac{\mathfrak{y}^3}{A^2} + \frac{1}{24}\,\frac{\mathfrak{y}^5}{A^4} + \frac{61}{5040}\,\frac{\mathfrak{y}^7}{A^6} + \frac{277}{72576}\,\frac{\mathfrak{y}^9}{A^8} + \frac{50521}{39916800}\,\frac{\mathfrak{y}^{11}}{A^{10}}$$

und die Umkehrung:

$$\mathfrak{y} = y - \frac{1}{6}\,\frac{y^3}{A^2} + \frac{1}{24}\,\frac{y^5}{A^4} - \frac{61}{5040}\,\frac{y^7}{A^6} + \frac{277}{72576}\,\frac{y^9}{A^8} - \frac{50521}{39916800}\,\frac{y^{11}}{A^{10}}$$

Schols giebt auch die Umkehrung unserer Formel (12) bis zur 11. Ordnung und noch vieles Interessante, was auch zu unserem früheren § 85. in Beziehung steht.

Alles weitere, was für die Preussische Landesaufnahme gebraucht wird, haben wir schon in § 50. und in § 85. entwickelt und es ist nur noch zu bemerken, dass der dort mit r bezeichnete Kugel-Halbmesser nun überall durch A zu ersetzen ist, mit $log\,A = 6.805\,0274{\cdot}003$ nach (35) § 94. S. 491.

Wir wollen die Anwendung der besprochenen Theorieen an unserem schon mehrfach benützten hannoverschen Beispiele Ägidius-Wasserturm zeigen (vgl. S. 309, 314 und Fig. 3. S. 315).

Diese beiden Punkte haben folgende geographische Coordinaten im Systeme der Landesaufnahme.

	Breite	Länge L	$l = L\,31°$	
Ägidius	$\varphi_2 = 52°\,22'\,14{,}9611''$	$L_2 = 27°\,24'\,24{,}6290''$	$l_2 = -3°\,35'\,35{,}3710''$	(13)
Wasser-turm	$\varphi_1 = 52°\,21'\,49{,}9080''$	$L_1 = 27°\,22'\,25{,}0168''$	$l_1 = -3°\,37'\,34{,}9832''$	
Differenzen	$+0'\,25{,}0531''$	$+1'\,59{,}6122''$	$= \quad +1'\,59{,}6122''$	

Die Reduktion auf die Gauss sche Kugel geschieht bei φ durch Anwendung der Hilfstafel Seite [61] (bzw. der Gauss schen Originaltafel), und bei l durch Multiplikation mit der Konstante $\alpha = 1{,}000\,452\,918$, bzw. nach der hiezu gehörigen Hilfstafel Seite [59]. Man findet auf diese Weise:

Ägidius	$u_2 = 52°\;20'\;13{,}92412''$	$\lambda_2 = -3°\;35'\;41{,}22966''$	(14)
Wasserturm	$u_1 = 52°\;19'\;48{,}90327''$	$\lambda_1 = -3°\;37'\;40{,}89604''$	
Differenzen	$+0'\;25{,}02085''$	$+0'\;59{,}66638''$	

Für die weitere Rechnung nach den sphärischen Formeln (1) und (2) wollen wir eine kleine Zeichenänderung machen, nämlich die Fusspunktsbreite, welche in Fig. 1. und in den Gleichungen (1) mit u_1 bezeichnet ist, soll nun mit u' bezeichnet werden, also:

$$tang\, u' = \frac{tang\, u}{cos\, \lambda} \qquad x = \frac{u' - u_0}{A} \tag{15}$$

$$sin\, \frac{\mathfrak{y}}{A} = sin\, \lambda\, cos\, u \quad , \quad tang\, \gamma = tang\, \lambda\, sin\, u \tag{16}$$

Hiernach ist berechnet:

Ägidius	Wasserturm	
$u_2' = 52°\,23'\,36875''$	$u_1' = 52°\,23'\,9{,}01197''$	(17)
$log\, sin\, \frac{\mathfrak{y}_2}{A} = 8.583\,3160{\cdot}272$	$log\, sin\, \frac{\mathfrak{y}_1}{A} = 8.587\,3764{\cdot}060$	
$\frac{\mathfrak{y}_2}{A}\varrho = 2°\,11'\,44{,}00948''$	$\frac{\mathfrak{y}_1}{A}\varrho = 2°\,12'\,58{,}29036''$	
$= 7904{,}00948''$	$= 7978{,}29036''$	
$\gamma_2 = 2°\,50'\,49{,}5606''$	$\gamma_1 = 2°\,52'\,23{,}4645''$	

$$\gamma_1 - \gamma_2 = 1'\,33{,}9039''$$

Wir gehen über zur Berechnung von x:

Ägidius	Wasserturm
$u_2' = 52°\,23'\,30{,}36875''$	$u_1' = 52°\,23'\;\;9{,}01197''$
$u_0 = 52°\,40'$	$u_0 = 52°\,40'$
$u_2' - u_0 = -\;16'\,29{,}63125''$	$u_1' - u_0 = -\;16'\,50{,}98803''$
$= -989{,}63125''$	$= -1010{,}98803''$

Dann nach der Gleichung (4) ausgerechnet:

$$x_2 = -30624{,}970^{m} \qquad x_1 = -31285{,}873^{m} \tag{18}$$

Die Berechnung der y geschieht nach der Reihe (11) bzw. (11a) und giebt:

$-244\,596{,}2079^{m}$	$-246\,894{,}8920^{m}$
$-59{,}8609$	$-61{,}5645$
$-0{,}0220$	$-0{,}0230$
$y_2 = -244\,656{,}0908^{m}$	$y^1 = -246\,956{,}4795^{m}$ (19)

Zur Kontrolle kann man auch nach der Reihe (12) bzw. (12a) rechnen, was insofern angenehm ist, als man ja die $\log \sin \frac{\mathfrak{y}}{A}$ bereits von der Rechnung (17) her hat. Man bekommt in unserem Falle:

$$\begin{array}{rr} -244\,536{,}3511^{m} & -246\,833{,}3323^{m} \\ -119{,}6339 & -123{,}0368 \\ -0{,}1053 & -0{,}1104 \\ \hline y_2 = -244\,656{,}0903^{m} & y_1 = -246\,956{,}4795^{m} \end{array} \tag{20}$$

Dieses stimmt hinreichend mit (19).

Aus (18)—(20) haben wir also nun in Zusammenstellung:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Ägidius} & y_2 = -244\,656{,}090^{m} & x_2 = -30624{,}970^{m} \\ \text{Wasserturm} & y_1 = -246\,956{,}480^{m} & x_1 = -31285{,}873^{m} \end{array}\right\} \tag{21}$$

Zu diesen von uns selbst auf dem angegebenen Wege berechneten Coordinaten stellen wir auch die im Jahre 1887 amtlich von der Landesaufnahme erhaltenen Werte zur Vergleichung:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Ägidius} & y_2 = -244\,656{,}090^{m} & x_2 = -30\,621{,}971^{m} \\ \text{Wasserturm} & y_1 = -246\,956{,}479^{m} & x_1 = -31\,285{,}875^{m} \end{array}\right\} \tag{22}$$

Die Übereinstimmung zwischen (21) und (22) ist genügend. Wir behalten (22) bei, und haben davon:

$$y_2 - y_1 = +2300{,}389^{m} \qquad x_2 - x_1 = +660{,}904^{m} \tag{23}$$

Hieraus die Richtungswinkel, von Nord über Ost, zunächst eben:

$$tang\, t_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad tang\, t_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$t_1 = 73^\circ\, 58'\, 14{,}12'' \qquad t_2 - 253^\circ\, 58'\, 14{,}12''$$

Hiezu kommen die Korrektionsglieder nach (31) und (32) § 50. S. 284, nämlich:

$$T_1' - t_1 = [0.92622]\,(x_2 - x_1)\,(2\,y_1 + y_2) = -0{,}41''$$

$$T_2 - t_2 = [0.92622]\,(x_1 - x_2)\,(y_1 + 2\,y_2) = +0{,}41''$$

Nehmen wir auch die schon bei (17) berechneten Meridian-Konvergenzen γ dazu, so haben wir:

	Ägidius	Wasserturm	
ebene Richtungswinkel:	$t_1 = 73^\circ\, 58'\, 14{,}12''$	$t_2 = 253^\circ\, 58'\, 14{,}12''$	
	$T_1 - t_1 \quad -0{,}41''$	$T_2 - t_2 = \quad +0{,}41''$	
sphär. Richtungswinkel:	$T_1 = 73^\circ\, 58'\, 13{,}71''$	$T_2 = 253^\circ\, 58'\, 14{,}53''$	
	$\gamma_1 = -2^\circ\, 52'\, 23{,}46''$	$\gamma_2 = -2^\circ\, 50'\, 49{,}56''$	
Azimute:	$\alpha_1 = 71^\circ\, 5'\, 50{,}25''$	$\alpha_2 = 251^\circ\, 7'\, 24{,}97''$	(24)

Um auch die Entfernung zu bestimmen, haben wir zunächst eben:

$$s = \frac{y_2 - y_1}{\sin t_1} = \frac{x_2 - x_1}{\cos t_1} \qquad \log s = 3.379\,0236$$

Die Reduktion auf S geschieht nach (14) § 50. S. 282, und giebt:

$$S = 2391{,}672^{m} \qquad \begin{array}{r} \log S - \log s = -3220 \\ \hline \log S = 3.378\,7016 \end{array} \tag{25}$$

Bei dieser kleinen Entfernung kann man $\log s - \log S$ auch kurz $= \log m = \log 1 + \frac{y^2}{2\,A_2}$ nehmen, indem man für y das Mittel aus y_1 und y_2, nämlich $y = -245\,806^{m}$ nimmt, nämlich $y = -245\,806^{m}$; dieses genügt hier, weil die fragliche Entfernung sehr klein ist.

Zur Berechnung von m in beiden Punkten getrennt, hat man auch noch die scharfe Formel (9) nämlich:

$$m = sec \frac{\mathfrak{y}}{A}$$

Nimmt man hiezu die bei (17) angegebenen Winkel $\frac{\mathfrak{y}}{A}$ bzw. $\frac{\mathfrak{y}}{A} \varrho$, so findet man:

$$\begin{array}{lll} \text{Ägidius} & log\, sec\, 2^\circ\, 11'\, 44{,}009'' & = 0{,}000\, 3189{\cdot}4 \\ \text{Wasserturm} & log\, sec\, 2^\circ\, 12'\, 58{,}290'' & = \underline{0{,}000\, 3249{\cdot}6} \\ & \text{Mittel } log\, m & = 0{,}000\, 3219{\cdot}5 \end{array} \qquad (26)$$

Dieses stimmt mit 3220 bei (25).

Zur Versicherung können wir auch noch die früheren Berechnungen mit Soldnerschen Coordinaten zuziehen, nämlich in § 56. S. 315 wurde gefunden (18) $log\, s = 3.378\,7020$, und auf S. 314 bei (14) $log\, s = 3.378\,7016$, was alles mit dem neuen (25) $log\, S = 3.378\,7016$ genügend stimmt.

Auch hatten wir früher schon die Azimute bei (14) S. 314:

$$\alpha = 71^\circ\, 5'\, 50{,}33'' \qquad \alpha' = 71^\circ\, 7'\, 25{,}05'' \qquad (27)$$

Diese α und α' sollen mit unserem neuen (24) übereinstimmen (abgesehen von $\pm 180^\circ$ bei α'). Wenn nun kleine Differenzen von 0,28″ zwischen (24) und (27) bestehen, während wir doch in allen trigonometrischen Rechnungen mindestens auf 0,01″ scharf gerechnet haben, so ist das hier doch unerheblich, weil der Rechnungsweg über rechtwinklige lineare Coordinaten (22) geführt hat, die auf $0{,}001^m$ als letzte Recheneinheit angegeben wurden, so dass sie die gewöhnlichen Abrundungs-Unsicherheiten in den rechtwinkligen Coordinaten bei kurzer Entfernung bereits 0,01″ erheblich beeinflussen.

Oder kurz: Ebenso wie auf S. 314—315 die Berechnungen für geographische Coordinaten und rechtwinklige Soldner sche Coordinaten in Bezug auf den Meridian von Celle hinreichend unter sich gestimmt haben, so stimmen auch nun alle Berechnungen mit den konformen rechtwinkligen Coordinaten in Bezug auf den 31. Längengrad als x-Axe, sowie alle unsere auf die konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel gemachten Berechnungen völlig hinreichend unter sich überein.

§ 102. Die Haupt-Dreiecksketten und Netze der Preussischen Landes-Triangulation.

Im Anschluss an die Projektions-Theorie der Preussischen Landes-Triangulation wollen wir auch noch eine Übersichts-Karte der Haupt-Dreiecksketten und Netze der Preussischen Landes-Triangulation hier vorführen in der Zeichnung von S. 520—521.

Dieselbe ist eine verkleinerte und vereinfachte Darstellung nach dem VII. Teil des Werkes: „Preussische Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, gemessen und bearbeitet von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme, Berlin 1895“ (Mittler & Sohn, Kochstrasse 68/70). Dieser schon auf S. 134 von uns citierte Band enthält eine Karte in 1 : 2 000 000 mit allen Dreieckspunkten I. Ordnung, nach welcher unsere verkleinerte Übersichtskarte in 1 : 5 000 000 hergestellt wurde.

Es sind darauf alle Haupt-Dreiecks*ketten* dargestellt mit allen Dreieckspunkten und Verbindungslinien, und mit Namen der Punkte an den *Grenzen* der Ketten, während alle Namen einzuschreiben der Raum nicht ausreichte.

Im unteren Teile von S. 520—521 ist auch eine Übersicht aller Ketten und Netze seit 1834, im wesentlichen nach der Zeitfolge geordnet, beigefügt, wobei die „Netze", d. h. die Ausfüllnetze zwischen den Ketten, mit kleinerer Schrift angegeben sind. Diese Füllnetze, im ganzen sechs an der Zahl, konnten in unserer Figur S. 520 und 521 nur als leere Räume angedeutet werden, weil die ursprünglich versuchte Punkt- und Linien-Ausführung in diesen Ketten den Zusammenhang der Ketten nicht mehr deutlich hätte hervortreten lassen. Die kleinen Füllnetze im Nordosten sind auch in dem Originalplan des VII. Teiles, Hauptdreiecke, nur als leere Flächen angegeben, während die schönen Netze von 1872 an, dort mit allen Sichten ausgeführt sind. (Zu bemerken ist auch, dass Mecklenburg, welches ganz von preussischen Ketten umschlossen ist, nicht preussisches Netz, sondern eigenes mecklenburgisches Netz ist, dessen Projektions-Theorie in unseren §§ 80.—81. S. 419—431 mitgeteilt wurde.)

Wie schon in unserem früheren § 21. S. 134 unten zusammengestellt wurde, sind einzelne Ketten und Netze schon besonders von uns beschrieben worden und als Ergänzung jener Citate S. 134 wollen wir auch noch einige Berichte aus der „Zeitschr. f. Verm." hier anführen, die übrigens mit jenen auf S. 134 angegebenen Darstellungen zum Teil übereinstimmen.

„Zeitschr. f. Verm." 1888 S. 382 und S. 399 die Elbkette,
„ „ 1889 S. 4 das Wesernetz,
„ „ 1891 S. 229,
„ „ 1891 S. 456 die Elbkette,
„ „ 1892 S. 193,
„ „ 1893 S. 1,
„ „ 1894 S. 3, mit Netzbild S. 9,
„ „ 1894 S. 454 das Schlesisch-posensche Dreiecksnetz,
„ „ 1895 S. 115,
„ „ 1895 S. 311 Hannoversch-sächsische Kette und sächsisches Netz.

Obgleich durch alle diese Einzeldarstellungen der Gang der Preussischen Landes-Triangulation im wesentlichen als bekannt vorausgesetzt werden kann, wird es doch beim Anblick der Übersichtskarte S. 520 und 521, da das nun vor 60 Jahren begonnene Werk im wesentlichen fertig vorliegt, angezeigt sein, folgendes kurz zu rekapitulieren:

Der wissenschaftliche Grund zu der heutigen Landes-Triangulation wurde gelegt durch die berühmte Gradmessung in Ostpreussen von Bessel und Baeyer 1832—1834 und durch die daran anschliessende Küstenvermessung von Baeyer 1837—1846.

Die heutigen geographischen Coordinaten der Landesaufnahme wurden 1859 bestimmt durch *eine* astronomische Messung bzw. Annahme für den Ausgangspunkt Berlin Sternwarte bzw. dessen Übertragung auf den benachbarten Punkt Rauenberg, und durch *ein* astronomisches Azimut, Rauenberg-Marienturm (vgl. hiezu § 59. S. 331).

Man könnte die Frage aufwerfen, warum für ein so grosses Gebiet von rund 1100^{km} Länge und 800^{km} Breite nicht mehr als *ein* astronomischer Orientierungs-ausgangspunkt genommen wurde, etwa mit Ausgleichung der Lotablenkungswidersprüche an den Grenzen u. s. w.?

Indessen wären solche Fragen nicht angebracht, angesichts der Entwicklung, welche ein so wichtiges Staatsunternehmen unter wechselnder Leitung seit mehr als einem halben Jahrhundert thatsächlich genommen hat.

Man hat dem rein trigonometrischen widerspruchsfreien Zusammenhang aller geodätischen Elemente des grossen preussischen Staates den Vorzug gegeben vor dem Hereinziehen astronomisch-physikalischer Elemente, und erst das nächste Jahrhundert und künftige Generationen von Erd- und Landmessern werden hierin Neues sehen.

Acht Grundlinien, mit dem Bessel schen Apparate gemessen, geben die lineare Fundierung in den verschiedenen Landesteilen, nämlich Königsberg 1834, Berlin 1846, Bonn 1847, Strehlen 1854, Braak 1871, Oberhergheim 1877, Göttingen 1880, Meppen 1883 mit Nachmessungen von Strehlen, Berlin, Bonn. (Näheres hiezu s. S. 101—102 und S. 146.)

Der Ausgleichungsgang ist nun im wesentlichen ganz klar: Die Ketten legen sich zunächst frei aus, nur mit ihren eigenen inneren Bedingungsgleichungen ausgeglichen, und erst wenn eine Anzahl von Ketten sich zu einem Kranze schliessen, muss auch Polygonausgleichung stattfinden, deren Zwang dann gewöhnlich die letzte Kette zu tragen hat, weil, dem Fortschreiten der Messungen II.—III. Ordnung entsprechend, man unmöglich mit dem Kranzabschluss warten konnte, bis alle Ketten gemessen waren.

Als Beispiel hierfür wollen wir aus unserem I. Band, „Handb. d. Verm.", 4. Aufl. 1895, S. 511 (oder auch „Zeitschr. f. Verm." 1895, S. 313) entnehmen, dass die Hannoversch-sächsische Kette 1880—1881 zwischen Hagelsberg und Lüss einem Anschlusszwang von 0,173^m in y und von 0,367^m in x zu tilgen hatte.

Ist ein Kranzsystem geschlossen, so folgt die Einschaltung des Füllnetzes ebenfalls mit Anschlusszwang am Rande, wie ebenfalls in Band I, 4. Aufl. 1895, S. 512 (oder Zeitschr. 1895, S. 314) an dem Beispiele des sächsischen Dreiecksnetzes 1881—1882 ersehen werden kann, oder an dem Beispiele des Schlesisch-posen schen Netzes in Band I, 4. Aufl. 1895, S. 415.

Je weiter die Ketten und Netze hinausgehen, desto grösser muss natürlich der Anschlusszwang wachsen, doch ist er nirgends so gross, dass deswegen die praktische Verwendung der ausgeglichenen Coordinaten Schwierigkeiten begegnete.

Von besonderem Interesse für die Theorieen solcher Zwangsanschlüsse ist eine Abhandlung von Krüger: „Über den Anschluss eines sekundären Dreiecksnetzes an ein Hauptnetz" in „Zeitschr. f. Verm." 1895, S. 289—307, S. 339—347 und S. 368—375. Es wird hier zuerst die Theorie der konformen Übertragung mit Anschluss an 2 feste Punkte (S. 291), 3 feste Punkte (S. 293) und 4 feste Punkte (S. 298) behandelt mit Citaten nach Baur und Schols, und auch der allgemeine Fall mit n festen Punkten (S. 306) behandelt.

Nach diesem wird ein Näherungsverfahren angegeben (S. 342), welches darin besteht, dass die Coordinaten-Transformationsformeln mit solchen Konstanten für lineare Vergrösserung und für Verdrehung versehen werden, welche den aus allen Anschlüssen hervorgehenden Mittelvergrösserungen und Mittelverdrehungen sich am besten anpassen.

Solches Verfahren wird dann angewendet („Zeitschr. 1895" S. 368) auf das thüringische Dreiecksnetz 1880, dessen Lage aus unserem kleinen Netzbilde S. 520—521 genügend ersehen werden kann, indem es gegen Norden die 4 festen Anschlusspunkte Inselsberg, Ettersberg, Wilsdorf, Leipzig hat, und im übrigen frei ausliegt. Krüger giebt an der citierten Stelle („Zeitschr. f. Verm. 1895", S. 368—375) zwei eigene Ausgleichungen nach seinem angegebenen Näherungsverfahren und deren Vergleichung mit der amtlichen Ausgleichung der Landesaufnahme, welch letztere nach der Correlatenmethode unter Einführung von 6 Zwangsanschlussgleichungen gemacht ist (Königl. Preuss. Landestriangulation, Hauptdreiecke, VII. Teil, 1895, S. 79 85).

Nach diesen nicht unwichtigen Citaten Krüger betrachten wir nochmals die Gesamtheit der Preussischen Landes-Triangulation in dem Übersichtsbilde S. 520—521.

Dieses grosse in sich widerspruchsfrei geodätisch ausgeglichene Werk, welches für alle praktischen Vermessungszwecke in ganz Preussen einheitliche widerspruchsfreie Coordinaten und Abrisse liefert, ist ein Werk, welches seinesgleichen kaum in einem anderen Staate haben wird, welches jeden Landmesser mit Freude erfüllen muss, der auf irgend welchem Teile desselben und in irgend einer der Formen, in welchen die Ergebnisse desselben noch verwertet werden können, mitzuwirken berufen sein wird.

Kapitel IX.

Polar-Dreieck mit reduzierten Breiten.

§ 103. Die reduzierte Breite.

Eine neue Behandlung der geodätischen Linie bekommen wir durch Einführung eines sphärischen Hilfsdreiecks mit „reduzierten Breiten". Es ist das eine Theorie, welche bei Berechnung sehr langer geodätischer Linien eine wichtige Rolle spielt.

Fig. 1.

Wir betrachten mit Fig. 1. einen Hilfswinkel, der „reduzierte Breite" heisst, und den wir im Folgenden allgemein mit ψ bezeichnen wollen, während die geographische Breite wie immer mit φ bezeichnet werden soll.

Man kann die gewöhnliche Ellipsen-Gleichung zur Einführung von ψ benützen, denn wenn für die Ellipse die Gleichung besteht:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

so kann man unbedingt setzen:

$$\frac{x}{a} = \cos\psi \quad , \quad \frac{y}{b} = \sin\psi \tag{2}$$

Dabei ist nach (16) § 32. S. 196:

$$\frac{x}{a} = \frac{\cos\varphi}{W} \quad , \quad \frac{y}{b} = \frac{y}{a\sqrt{1-e^2}} = \frac{\sin\varphi}{W}\sqrt{1-e^2} \tag{3}$$

also:

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi}{W} \quad , \quad \sin\psi = \frac{\sin\varphi}{W}\sqrt{1-e^2} \tag{4}$$

wobei gesetzt ist:

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi} \tag{5}$$

Die geometrische Bedeutung des so eingeführten Winkels ψ ist durch Fig. 1. veranschaulicht, man wird auf die Hilfsbreite ψ auch geführt durch eine bekannte Ellipsen-Konstruktion, bei welcher zwei konzentrische Kreise mit den Halbmessern a und b benützt werden.

Eine zweite Veranlassung zur Einführung der reduzierten Breite haben wir in dem Satze von der geodätischen Linie, den wir in (11) § 69. S. 378 gefunden haben, nämlich:

$$p \sin\alpha = k \tag{6}$$

wo p der Parallelkreis-Halbmesser des Umdrehungs-Ellipsoids ist, d. h. derselbe Wert, der in (1) und (2) mit x bezeichnet wurde, man hat also:

$$p = x = \frac{a\cos\varphi}{W} = a\cos\psi, \text{ d. h. } \cos\psi = \frac{\cos\varphi}{W} \tag{7}$$

Der dadurch bestimmte Wert ψ ist derselbe, den wir schon in (4) kennen gelernt und reduzierte Breite genannt haben. Damit giebt die Gleichung (6):

$$a \cos\psi \sin\alpha = a \cos\psi' \sin\alpha' = k \tag{8}$$

Die letzte Gleichung ist eine Anwendung des Satzes (6) auf zwei zusammengehörige Wertpaare ψ, α und ψ', α'; und indem man dabei den konstanten Faktor a und das allgemeine Zeichen k fortlässt, hat man aus (6) oder (8):

$$\cos\psi \sin\alpha = \cos\psi' \sin\alpha' \tag{9}$$

Dieser Gleichung (9) entspricht ein sphärisches Dreieck, das wir in Fig. 2. des nächsten § 104. näher betrachten wollen; und damit erlangt die reduzierte Breite ψ, welche nun als Repräsentant des sphäroidischen Parallelkreis-Halbmessers $p = x$ in Gleichung (7) erscheint, erhöhte Bedeutung.

Wir haben also durch die Gleichung (7) ausführlicher:

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi}{W} \qquad (\text{wo } W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}) \tag{10}$$

oder auch mit Einführung von $V = W : \sqrt{1-e^2}$ wie immer nach (1) und (2), S. 202 bis 203:

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi}{V\sqrt{1-e^2}} \qquad \left(\text{wo } V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2\varphi}\right) \tag{11}$$

Daraus findet man durch geometrische Umformung:

$$\sin\psi = \frac{1}{V}\sin\varphi \qquad \text{und} \qquad \cos\varphi = \frac{\cos\psi}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2\psi}} \tag{12}$$

$$\tang\psi = \tang\varphi\sqrt{1-e^2}, \qquad \text{oder} \qquad \tang\varphi = \tang\psi\sqrt{1+e'^2} \tag{13}$$

Wir brauchen auch noch die Differentialbeziehung zwischen φ und ψ, welche sich am einfachsten aus (13) ergiebt, nämlich:

$$\frac{d\psi}{\cos^2\psi} = \frac{d\varphi\sqrt{1-e^2}}{\cos^2\varphi}$$

also wegen (11):

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = V^2\sqrt{1-e^2} \tag{14}$$

Aus (11) findet man auch: $V^2 = \dfrac{1+e'^2}{1+e'^2\sin^2\psi}$

und

$$V = \sqrt{1 + e'^2\cos^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\psi}} \tag{15}$$

Die geometrische Bedeutung von V^2 ist, nach (25) S. 197, das Haupt-Krümmungsverhältnis, d. h. das Verhältnis der beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser N und M in einem Punkte des Ellipsoids mit der Breite φ; und die Formel (15), welche nun V^2 bzw. V auch als Funktion von ψ giebt, ist für spätere Anwendung wichtig.

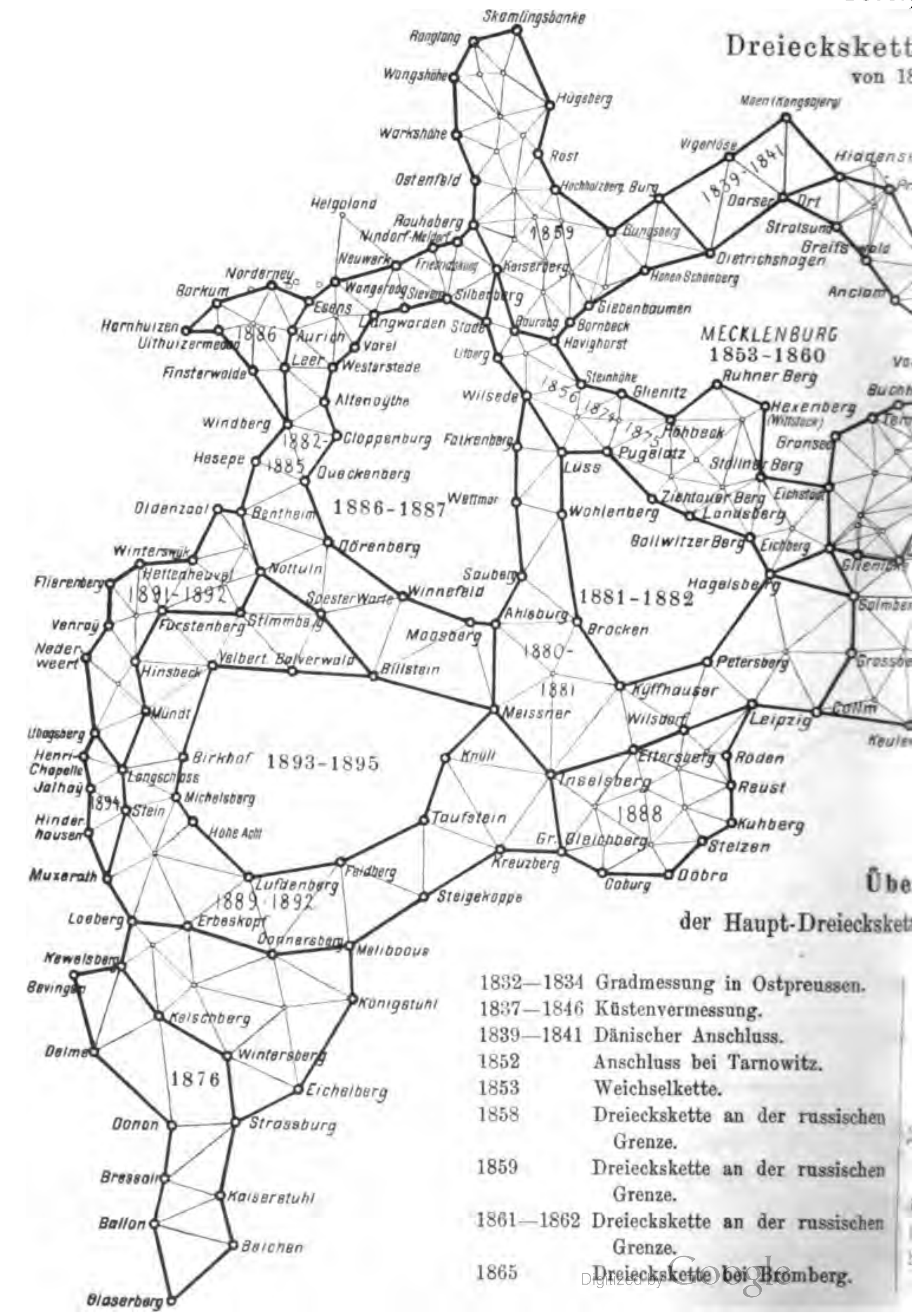
Numerische Berechnung von $\varphi - \psi$.

Um zu gegebenem φ das zugehörige ψ zu berechnen oder umgekehrt, kann man zuerst die Gleichung (13) anwenden:

$$\tang\psi = \tang\varphi\sqrt{1-e^2} \qquad \left(\log\sqrt{1-e^2} = 9.998\ 5458{\cdot}202\right) \tag{16}$$

Wenn man aber besondere Zahlenschärfe wünscht, so wird es besser sein, auf die Differenz $\varphi - \psi$ geradezu auszugehen, und hiezu hat man nach (12) und (11):

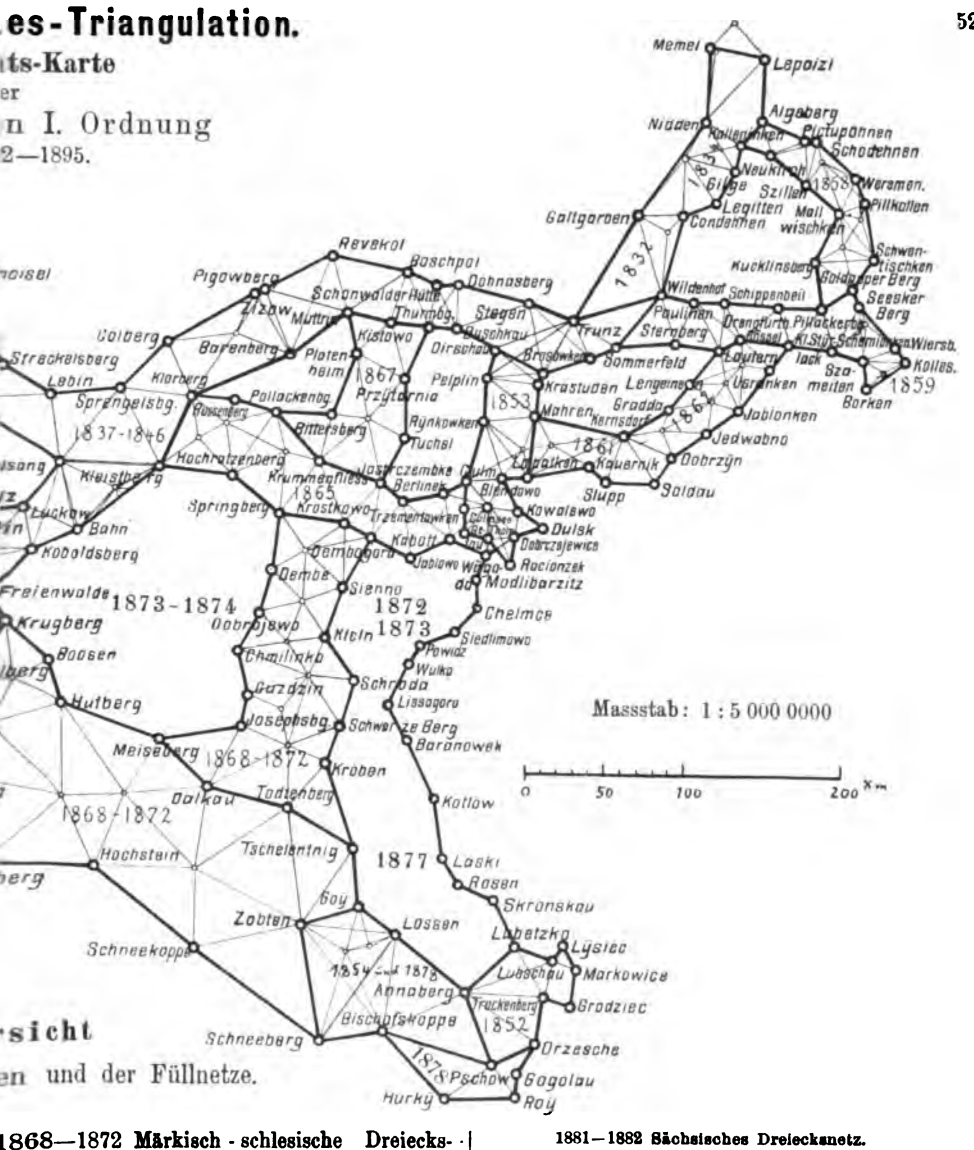
$$\sin\varphi = V\sin\psi \qquad \sin\psi = \frac{\sin\varphi}{V} \tag{17}$$



Übe

der Haupt-Dreieckske

1832—1834	Gradmessung in Ostpreussen.
1837—1846	Küstenvermessung.
1839—1841	Dänischer Anschluss.
1852	Anschluss bei Tarnowitz.
1853	Weichselkette.
1858	Dreieckskette an der russischen Grenze.
1859	Dreieckskette an der russischen Grenze.
1861—1862	Dreieckskette an der russischen Grenze.
1865	Dreieckskette bei Bromberg.



1868—1872 **Märkisch - schlesische Dreiecks-kette.**

1868—1872 **Schlesisch - posensche Dreiecks-kette.**

1872—1873 **Posensches Dreiecksnetz.**

1877 **Schlesisch-posensches Dreiecksnetz.**

854—1878 **Schlesische Dreieckskette.**

878 **Österreichischer Anschluss.**

1873—1874 **Märkisches Dreiecksnetz.**

856, 1874 und 1875 **Elbkette.**

869 **Schleswig-holst. Dreieckskette.**

880—1881 **Hannoversch-sächsische Dreiecks-kette.**

1881—1882 **Sächsisches Dreiecksnetz.**

1882—1885 **Hannoversche Dreieckskette.**

1886—1887 **Wesernetz.**

1888 **Thüringisches Dreiecksnetz.**

1889—1892 **Rheinisch - hessische Dreiecks-kette.**

1893—1894 **Niederrheinisches Dreiecksnetz.**

1886, 1889—1892 **Niederländischer Anschluss.**

1894 **Belgischer Anschluss.**

1895 **Pfälzisches Dreiecksnetz.**

1876 **Elsass-lothringische Kette.**

$$\cos\varphi = V\sqrt{1-e^2}\cos\psi \qquad \cos\psi = \frac{\cos\varphi}{V\sqrt{1-e^2}} \tag{18}$$

Nun ist $\sin(\varphi-\psi) = \sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi$; dieses kann man in zweifacher Weise auf (17) und (18) anwenden, wodurch man findet:

$$\sin(\varphi-\psi) = \sin 2\varphi\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{2\,V\sqrt{1-e^2}} \tag{19}$$

oder:

$$\sin(\varphi-\psi) = \sin 2\psi\,\frac{V}{2}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right) \tag{20}$$

Hiebei ist V je nach der einen oder anderen Form von (15) zu benützen.

Zur Anwendung von (19) und (20) hat man von (7) S. 180 und S. 192 unten:

$$\log\left(1-\sqrt{1-e^2}\right) = \log\alpha = 7.524\,1069{\cdot}093 \tag{21}$$

Indem man noch zum Übergang von $\log\sin(\varphi-\psi)$ auf $\log(\varphi-\psi)$ die Formel für $\log\sin x$ S. 173 benützt, bekommt man aus (19) und (21):

$$\log(\varphi-\psi) = \log\frac{\sin 2\varphi}{V} + 2.538\,9562{\cdot}266 + [5.23078]\,(\varphi-\psi)^2 \tag{22}$$

wobei [5.23078] der Coëfficienten-Logarithmus für 7te Logarithmenstelle ist.

Hiernach kann man in der äussersten Schärfe rechnen, z. B.:

Gegeben Berlin $\varphi = 52°\,30'\,16{,}7''$, $2\varphi = 105°\,0'\,33{,}4''$

Damit giebt die Hilfstafel auf Seite [5] des Anhangs $\log V = 0.000\,5399{\cdot}278$, und wenn man im übrigen nach der vorstehenden Formel (22) rechnet, so erhält man:

	2.538 9562·266
$\log\sin 2\varphi$	9.984 9249·285
$\log 1:V$	9.999 4600·722
	2.523 3412·273
hiezu das letzte Glied von (22):	+ 1.894
$\log(\varphi-\psi)$	2.523 3414·167
$\varphi-\psi =$	333,68864

$\varphi-\psi = 5'\,33{,}68864''$
$\varphi = 52°\,30'\,16{,}70000''$

$$\psi = 52°\,24'\,43{,}01136'' \tag{23}$$

Mit so vielen Dezimalen wird man natürlich im allgemeinen nicht rechnen, wir haben aber diese scharfe Rechnung hier geführt, um sie zugleich als Kontrolle für das nachfolgende Näherungs-Verfahren zu benützen.

Die beste Form zur numerischen Berechnung von $\varphi-\psi$ aus gegebenen φ oder ψ erhält man durch eine Reihen-Entwicklung nach dem Grundsatze des Mittelarguments (§ 29. S. 178—179). Nach (13) ist:

$$\operatorname{tang}\psi = \sqrt{1-e^2}\,\operatorname{tang}\varphi = \left(1-\frac{e^2}{2}-\frac{e^4}{8}\right)\operatorname{tang}\varphi$$

andererseits $\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\psi = \dfrac{\varphi-\psi}{\cos^2\mu} + (\varphi-\psi)^3\ldots$ mit $\dfrac{\varphi-\psi}{2} = \mu$

damit wird: $\varphi-\psi = \left(\dfrac{e^2}{2}+\dfrac{e^4}{8}\right)\cos^2\mu\,\operatorname{tang}\varphi$, $\varphi = \mu + \dfrac{e^2}{4}\sin\mu\cos\mu$

woraus weiter: $\varphi-\psi = \left(\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{e^4}{8}\right)\sin(\varphi+\psi)$

Dieses kann man noch um einen Grad weiter treiben, was hier nicht ausführlich angegeben wird, wodurch man erhält (mit Zusetzung von ϱ''):

$$\varphi - \psi = \left(\frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \frac{5}{64} e^6\right) \varrho'' \sin(\varphi - \psi) + \frac{1}{384} e^6 \varrho'' \sin^3(\varphi + \psi) \qquad (24)$$

Mit Bessels Excentricität $\log e^2 = 7.824\,4104{\cdot}237$ giebt dieses ausgerechnet:

$$\varphi - \psi = 345{,}325\,3808 \sin(\varphi + \psi) + 0{,}000\,160 \sin^3(\varphi + \psi) \qquad (25)$$
$$(\log = 2.538\,2285{\cdot}0) \qquad\qquad (\log = 6.2033)$$

Das zweite Glied mit höchstens 0,00016″ ist für gewöhnlich zu vernachlässigen. Um die Formel (25) bequem anzuwenden, muss man einen Näherungswert von $\varphi - \psi$ vorher haben, und ein solcher wird durch unsere Hilfstafel Seite [58] des Anhangs geliefert; die Anwendung mag ein Beispiel zeigen:

Gegeben Berlin $\varphi = 52^\circ\ 30'\ 16{,}7''$
Hiezu nach S. [58]: $\varphi - \psi = 5'\ 33{,}65''$ genähert

$\psi = 52^\circ\ 24'\ 43{,}05''$
$\varphi + \psi = 104^\circ\ 54'\ 59{,}75''$

$\log \sin(\varphi + \psi)$	9.985 1126.8
$\log 345{,}3\ldots$	2.538 2285.0
$\log 345{,}3\ldots \sin(\varphi + \psi)$	2.523 3411.8

$345{,}3\ldots \sin(\varphi + \psi) = 333{,}68847''$
Hiezu das zweite Glied von (25): $+0{,}00014$

$(\varphi - \psi) = 333{,}68861''$
$= 5'\ 33{,}68861''$
Ursprünglich gegeben $\varphi = 52^\circ\ 30'\ 16{,}70000''$

Also: $\psi = 52^\circ\ 24'\ 43{,}01139''$ (26)

Dieses stimmt hinreichend mit dem schärfer berechneten Wert (23).

Die Frage, wie genau man den Näherungswert $\varphi + \psi$ haben muss, um eine gewisse Endgenauigkeit zu erreichen, kann man durch Differentiieren von (25) beantworten; man findet, dass ein Fehler von 1″ an dem Näherungswert nur einen Fehler von etwa 0,001″ erzeugt, weshalb eine Genauigkeit von 0,1″ im Näherungswert (wie sie die Hilfstafel Seite [58] gewährt) zur endgiltigen Berechnung genügt.

Für die sphäroidischen Normal-Beispiele, welche wir in (1)—(5) § 73. S. 391—392 vorangestellt haben, sind die geographischen Breiten φ und die entsprechenden reduzierten Breiten ψ die folgenden:

φ	ψ
$\varphi = 45^\circ\ 0'\ 0''$	$\psi = 44^\circ\ 54'\ 14{,}67493''$
$49^\circ\ 30'\ 0''$	$49^\circ\ 24'\ 18{,}83709''$
$50^\circ\ 0'\ 0''$	$49^\circ\ 54'\ 19{,}82230''$
$50^\circ\ 30'\ 0''$	$50^\circ\ 24'\ 20{,}91117''$
$55^\circ\ 0'\ 0''$	$54^\circ\ 54'\ 35{,}31462''$

Mecklenburg

φ	ψ
$\varphi = 53^\circ\ 0'$	$\psi = 52^\circ\ 54'\ 27{,}89895''$
$54^\circ\ 30'$	$54^\circ\ 24'\ 33{,}31059''$

	φ	ψ
Tübingen	$\varphi = 48^\circ\ 31'\ 12{,}4000''$	$\psi = 48^\circ\ 25'\ 29{,}6082''$
Hornisgrinde	$\varphi = 48^\circ\ 36'\ 21{,}8966''$	$\psi = 48^\circ\ 30'\ 30{,}2280''$
Berlin	$\varphi = 52^\circ\ 30'\ 16{,}7''$	$\psi = 52^\circ\ 24'\ 43{,}0014''$
Königsberg	$\varphi = 54^\circ\ 42'\ 50{,}6''$	$\psi = 54^\circ\ 37'\ 24{,}7564''$

§ 104. Das sphärische Hilfsdreieck mit reduzierten Breiten.

Wir knüpfen an die im vorigen § 103. (9) S. 521 gefundene Gleichung an:

$$\cos\psi \sin\alpha = \cos\psi' \sin\alpha' \tag{1}$$

Dieser Gleichung entspricht die nachstehende Fig. 2.

In nachstehender Fig. 1. sind P und P' zwei Punkte auf dem Ellipsoid, s die verbindende geodätische Linie mit den Azimuten α und α'. Die beiden Punkte P und P' haben die geographischen Breiten φ und φ' und den Längen-Unterschied l.

Fig. 1. Ellipsoid.

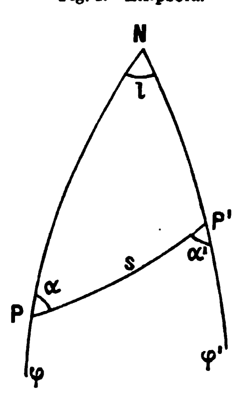
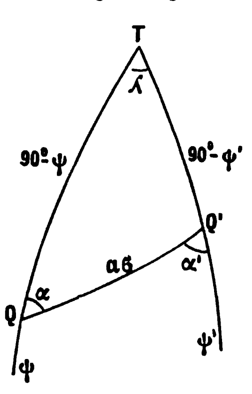


Fig. 2. Kugel.



In Fig. 2. ist ein entsprechendes sphärisches Dreieck $T\,Q\,Q'$ gezeichnet, dessen Bogen $Q\,Q'$ dieselben Azimute α und α' hat wie die geodätische Linie $P\,P'$. Der Bogen $Q\,Q'$ ist mit $a\,\sigma$ bezeichnet, indem der Kugelhalbmesser $= a$ (Äquatorhalbmesser des Ellipsoids) und der Centriwinkel $= \sigma$ angenommen ist. Der Längenunterschied zwischen Q und Q' ist $= \lambda$, verschieden von l. Auch die sphärischen Breiten ψ und ψ' sind andere als die ellipsoidischen, es sind die zu φ und φ' gehörigen reduzierten Breiten, d. h. nach (13) § 103. S. 521 bestehen die Beziehungen:

$$\tang\psi = \tang\varphi\sqrt{1-e^2} \quad , \quad \tang\psi' = \tang\varphi'\sqrt{1-e^2} \tag{2}$$

Die Richtigkeit all dieser Beziehungen ist durch die sphärische Gleichung (1) bewiesen, und wir wissen nun, dass einem geodätischen Polardreieck $N\,P\,P'$ auf dem Ellipsoid immer ein sphärisches Dreieck $T\,Q\,Q'$ entspricht, mit gleichen Azimuten α, α' und mit reduzierten Breiten ψ, ψ', welche zu φ, φ' gehören. Dagegen sind die übrigen Stücke, die Entfernung beider Punkte und deren Längenunterschied, in beiden Dreiecken verschieden.

Es kommt nun darauf an, eine Beziehung herzustellen zwischen s und σ und eine Beziehung zwischen l und λ, denn da zwischen allen übrigen Stücken von Fig. 1. und Fig. 2. vermöge der Gleichungen (1) und (2) bereits Beziehungen bestehen, werden wir dann in allen Teilen von dem sphäroidischen Dreieck auf das sphärische Dreieck übergehen können und umgekehrt.

Wir haben nach (1), (2) S. 392 und (1), (2), S. 347 folgende Differential-Gleichungen, mit den Bezeichnungen unserer vorstehenden Fig. 1. und 2. (geographische Länge auf dem Ellipsoid $= l$, auf der Kugel $= \lambda$):

Ellipsoid	Kugel	
$ds \cos\alpha = M\,d\varphi$	$a\,d\sigma \cos\alpha = a\,d\psi$	(3)
$ds \sin\alpha = N\cos\varphi\,dl$	$a\,d\sigma \sin\alpha = a\cos\psi\,d\lambda$	(4)

Hieraus durch Division:

$$\frac{ds}{a\,ds} = \frac{M\,d\varphi}{a\,d\psi} \qquad \frac{dl}{d\lambda} = \frac{M}{N}\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}\frac{d\varphi}{d\psi}$$

Hiebei ist nach (11) und (14) § 103. S. 521:

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = V\sqrt{1-e^2} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{d\psi} = V^2\sqrt{1-e^2} \tag{5}$$

Nach § 32. S. 196–197 ist $\frac{M}{a} = \frac{1-e^2}{W^3} = \frac{1}{V^3\sqrt{1-e^2}}$ und $\frac{M}{N} = \frac{1}{V^2}$ womit die beiden Gleichungen (5) folgende einfache Gestalt annehmen:

$$ds = a\,d\sigma\frac{1}{V} \tag{6}$$

$$dl = d\lambda\frac{1}{V} \tag{7}$$

Die hier zweimal auftretende Grösse V ist die stets von uns benützte Funktion der Breite, welche entweder in φ oder in ψ ausgedrückt nach (15) § 103. S. 521 ist:

$$V = \sqrt{1+e'^2\cos^2\varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{V} = \sqrt{1-e^2\cos^2\psi} \tag{8}$$

Die geometrische Bedeutung von V haben wir schon in (25) § 32. S. 197 angegeben, es ist nämlich V^2 das Verhältnis der beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser N und M.

§ 105. Integration der Differential-Gleichungen des Polar-Dreiecks.

Wir haben vom vorigen § 104. (6) und (8) (s. oben) die Differential-Gleichung:

$$ds = a\,d\sigma\sqrt{1-e^2\cos^2\psi'} \tag{1}$$

Diese Gleichung bezieht sich auf die untenstehenden Fig. 1. und Fig. 2., indem ds das Differential der geodätischen Linie s in Fig. 1. und $a\,d\sigma$ das Differential des sphärischen Bogens σ (auf den Halbmesser a bezogen) von Fig. 2. ist; auch ψ' ist sphärische Breite eines Punktes auf dem Bogen σ.

Um die Gleichung (1) nach σ integrieren zu können, muss man ψ' in σ ausdrücken, wozu die Formeln der sphärischen Trigonometrie dienen, welche wir schon früher in (20)—(22) § 60. S. 343 angegeben haben, nämlich mit Übertragung auf unsere neue Fig. 2.:

Fig. 1. Ellipsoid.

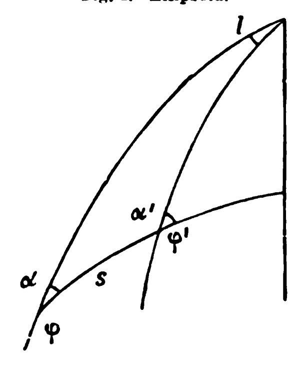
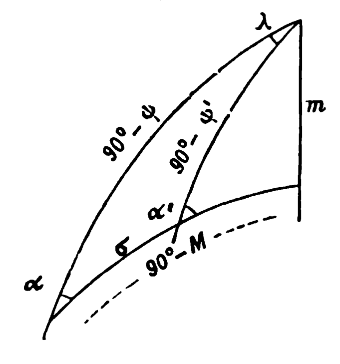


Fig. 2. Kugel.



$$\sin m = \cos \psi \sin \alpha \quad , \quad \tan g\, M = \frac{\sin \psi}{\cos \psi \cos \alpha} \tag{2}$$

$$\cos m = \frac{\sin \psi}{\sin M} = \frac{\cos \psi \cos \alpha}{\cos M} \tag{3}$$

$$\sin \psi' = \cos m \sin (M + \sigma) \tag{4}$$

Nun setzen wir zur Schreib-Abkürzung im Folgenden:

$$M + \sigma = x \quad , \quad \text{wobei } M \text{ konstant, also } d\sigma = dx \tag{5}$$

also:

$$\sin^2 \psi' = \cos^2 m \sin^2 x \quad \text{und} \quad \cos^2 \psi' = 1 - \cos^2 m \sin^2 x \tag{6}$$

Dieses in (1) gesetzt giebt:

$$ds = a \sqrt{1 - e^2 + e^2 \cos^2 m \sin^2 x}\, d\sigma$$

$$\frac{e^2}{1 - e^2} = e'^2 \quad , \quad \text{also } ds = a\sqrt{1 - e^2}\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 m \sin^2 x}\, d\sigma \tag{7}$$

$$a\sqrt{1 - e^2} = b \quad , \quad e' \cos m = k \quad , \quad ds = b \sqrt{1 + k^2 \sin^2 x}\, dx \tag{8}$$

Nun wird nach den gewöhnlichen Reihen S. 169 und S. 176 entwickelt:

$$\sqrt{1 + k^2 \sin^2 x} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 x - \frac{1}{8} k^4 \sin^4 x$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \quad , \quad \sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \tag{9}$$

Dieses zusammen giebt:

$$\sqrt{1 + k^2 \sin^2 x} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4\right) + \left(- \frac{1}{4} k^2 + \frac{1}{16} k^4\right) \cos 2x - \frac{k^4}{64} \cos 4x \tag{10}$$

Zur Integration hat man:

$$\int \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 2x \quad , \quad \int \cos 4x = \sin 4x$$

$$\int_M^{M+\sigma} \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} \Big(\sin (2M + 2\sigma) - \sin 2M\Big) = \sin \sigma \cos (2M + \sigma) \tag{11}$$

$$\int_M^{M+\sigma} \cos 4x\, dx = \frac{1}{4} \Big(\sin (4M + 4\sigma) - \sin 4M\Big) = \frac{1}{2} \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) \tag{12}$$

Damit kann man die Integrale von (9), d. h. auch die Integration von (8) zusammensetzen, wodurch man einen Ausdruck von dieser Form erhält:

$$s = A b \sigma - B b \sin \sigma \cos (2M + \sigma) - C b \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) \tag{13}$$

Dabei haben die Coëfficienten A, B und C folgende Bedeutungen:

$$A = \left(1 + \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4\right) \quad , \quad B = \left(\frac{1}{4} k^2 - \frac{1}{16} k^4\right) \quad , \quad C = \left(\frac{1}{128} k^4\right) \tag{14}$$

Die Umkehrung von (13) giebt:

$$\sigma = \alpha \frac{s}{b} + \beta \sin \sigma \cos (2M + \sigma) + \gamma \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) \tag{15}$$

wobei die neu eingeführten Coëfficienten sind (mit Zusetzung der nötigen ϱ):

$$\alpha = \frac{1}{A} \varrho \quad , \quad \beta = \frac{B}{A} \varrho \quad , \quad \gamma = \frac{C}{A} \varrho \tag{16}$$

In gleicher Weise behandeln wir auch die Differential-Gleichung für den Längenunterschied, nämlich nach (7) und (8) § 104. S. 525:

$$dl = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}\, d\lambda \tag{17}$$

Hier wird nach (11) S. 169 entwickelt:

$$\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} = 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 \psi - \frac{e^4}{8} \cos^4 \psi - \frac{e^6}{16} \cos^6 \psi \tag{18}$$

Hiebei bestehen sphärische Gleichungen, nach (1) § 61. S. 347:

$$d\lambda \cos \psi = d\sigma \sin \alpha$$

dann nach den zu Fig. 2. gehörigen Gleichungen (2):

$$\sin \alpha = \frac{\sin m}{\cos \psi} \quad , \quad \text{also } d\lambda = \frac{\sin m}{\cos^2 \psi} d\sigma \tag{19}$$

Damit kann man (17) in eine Integration nach σ umformen, nämlich mit Rücksicht auf (18):

$$l = \lambda - e^2 \sin m \int \left(\frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} \cos^2 \psi + \frac{e^4}{16} \cos^4 \psi + \ldots \right) d\sigma \tag{20}$$

Nun hat man wieder nach (6):

$$\cos^2 \psi = 1 - \cos^2 m \sin^2 x$$
$$\cos^4 \psi = 1 - 2 \cos^2 m \sin^2 x + \cos^4 m \sin^4 x$$

Ausserdem hat man $\sin^2 x$ und $\sin^4 x$ ausgedrückt in $\cos 2x$ und $\cos 4x$ durch (9), und all dieses zusammen bringt die zu integrierende Funktion (20) auf eine Reihe, welche nach $\cos 2x$, $\cos 4x$ u. s. w. fortschreitet, d. h. (20) wird:

$$l = \lambda - e^2 \sin m \int (A' + B' \cos 2x + C' \cos 4x + \ldots) dx \tag{21}$$

Dabei haben die Coëfficienten folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{aligned} A' &= \frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{16} - \frac{e^2}{16} \cos^2 m - \frac{e^4}{16} \cos^2 m + \frac{3}{128} e^4 \cos^4 m \\ B' &= \frac{e^2}{16} \cos^2 m + \frac{e^4}{16} \cos^2 m - \frac{e^4}{32} \cos^4 m \\ C' &= \frac{e^4}{128} \cos^4 m \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Denkt man sich diese Coëfficienten in (21) eingesetzt, integriert, und die Grenzen ebenso wie früher bei (11) und (12) eingeführt, so überblickt man leicht, dass folgendes erhalten wird:

$$l = \lambda - e^2 \sin m \left(A' \sigma + B' \sin \sigma \cos (2M + \sigma) + \frac{C'}{2} \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) + \ldots \right) \tag{23}$$

Hier ist noch bei B' und C' der Faktor ϱ zuzusetzen; indem wir dieses thun, und auch e^2 in die Klammer hineinziehen, bilden wir aus (23) diese letzte Form:

$$l = \lambda - \sin m \left(\alpha' \sigma + \beta' \sin \sigma \cos (2M + \sigma) + \gamma' \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) \right) \tag{24}$$

Dabei ist:

$$\alpha' = A' e^2 \quad , \quad \beta' = B' e^2 \varrho \quad , \quad \gamma' = \frac{C' e^2}{2} \varrho \tag{25}$$

Entwicklung auf höhere Potenzen.

Wir haben in der vorstehenden Entwicklung nur so viele Glieder beibehalten, als man bequem überschauen kann, und so viele, als für gewöhnlich nötig sind.

Zu einem sicheren Urteil über den Einfluss der höheren Glieder muss man die Weiter-Entwicklung der vorstehenden Reihen machen. Wir setzen nur die Schlussergebnisse der Reihen-Entwicklung hier her.

Die Reihe (15) bekommt noch ein Glied, und ist dann:

$$\sigma = \alpha \frac{s}{b} + \beta \sin\sigma \cos(2M+\sigma) + \gamma \sin 2\sigma \cos(4M+2\sigma) + \delta \sin 3\sigma \cos(6M+3\sigma) \quad (26)$$

Folgendes sind die dazu gehörigen Coëfficienten mit $k = e' \cos m$:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{A}\varrho \quad , \quad A = \left(1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64}k^4 + \frac{5}{256}k^6 - \frac{175}{36384}k^8\right) \\
\beta &= \frac{B}{A}\varrho \quad , \quad B = \left(\frac{k^2}{4} - \frac{k^4}{16} + \frac{15}{112}k^6 - \frac{35}{2048}k^8\right) \\
\gamma &= \frac{C}{A}\varrho \quad , \quad C = \left(\frac{k^4}{128} - \frac{3}{512}k^6 + \frac{35}{8192}k^8\right) \\
\delta &= \frac{D}{A}\varrho \quad , \quad D = \left(\frac{k^6}{1536} - \frac{5}{6144}k^8\right) \\
\varepsilon &= \frac{E}{A}\varrho \quad , \quad E = \left(\frac{5}{65536}k^8\right)
\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Auch die Reihe (24) bekommt ein weiteres Glied und wird:

$$l = \lambda - \sin m \left(\alpha' \sigma + \beta' \sin\sigma \cos(2M+\sigma) + \gamma' \sin 2\sigma \cos(4M+2\sigma) + \delta' \sin 3\sigma \cos(6M+3\sigma)\right) \quad (28$$

Folgendes sind die hiezu gehörenden Coëfficienten:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha' &= \frac{e^2}{2}\left(1 + \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \frac{5e^6}{64}\right) - \frac{e^4 \cos^2 m}{16}\left(1 + e^2 + \frac{15}{16}e^4\right) \\
&\qquad + \frac{3}{16}e^6 \cos^4 m \left(1 + \frac{15}{8}e^2\right) - \frac{25}{2048}e^8 \cos^6 m \\
\beta' &= \varrho\left(\frac{e^4}{16}\cos^2 m \left(1 + e^2 + \frac{15}{16}e^4\right) - \frac{e^6}{32}\cos^4 m \left(1 + \frac{15}{8}e^2\right) + \frac{75}{4096}e^8 \cos^6 m\right) \\
\gamma' &= \varrho\left(\frac{e^6}{256}\cos^4 m \left(1 + \frac{15}{8}e^2\right) - \frac{15}{4096}e^8 \cos^6 m\right) \\
\delta' &= \varrho\left(\frac{5}{12288}e^8 \cos^6 m\right)
\end{aligned}\right\} \quad (28a)$$

Wenn man hier alle konstanten Teile mit der Bessel schen Excentricität e ($\log e^2 = 7.824\,4104.287$ nach S. 193) ausrechnet, so bekommt man:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha' &= 0{,}003\,342\,773\,183 - [4.447\,6079] \cos^2 m + [1.84854] \cos^4 m - [9.3843] \cos^6 m \\
\beta' &= [9{,}762\,0330] \cos^2 m - [7.28791] \cos^4 m + [4.87477] \cos^6 m \\
\gamma' &= [6{,}38482] \cos^4 m - [4.17580] \cos^6 m \\
\delta' &= [3.22156] \cos^6 m
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Diese Reihen gehen weit über das gewöhnliche Bedürfnis. Bei geodätischen Linien von mehreren Graden Ausdehnung braucht man von (29) meist nur α' und β' und dabei nur die zwei ersten Glieder von α' und das erste Glied von β'.

Etwas mehr braucht man gewöhnlich bei der Reihe (26) mit den Coëfficienten (27), doch auch meist nur α, β und γ nur etwa bis k^4. Dabei ist etwa 8stellige Logarithmen-Rechnung angenommen. Mit den Coëfficienten (27) und (29) kann man auch die grössten Fälle 10 stellig berechnen.

Anwendung der vorstehenden Entwicklungen.

Durch die Gleichungen (26) und (28) mit den zugehörigen Coëfficienten $\alpha, \beta, \gamma, \alpha' \beta' \gamma'$ u. s. w. sind die gesuchten Beziehungen zwischen Fig. 1. und Fig. 2 hergestellt und man kann damit das Polardreieck auflösen in folgender Weise:

Von einem Punkte des Ellipsoids mit der geographischen Breite φ geht eine geodätische Linie s unter dem Azimut α aus; man soll die Breite φ' des Endpunktes dieser geodätischen Linie bestimmen, sowie das Azimut α' daselbst und den Längenunterschied l beider Punkte.

Aus der gegebenen Breite φ berechnet man die zugehörige reduzierte Breite ψ nach der Gleichung $tang\,\psi = \sqrt{1-e^2}\,tang\,\varphi$ (oder nach einem anderen in § 103. angegebenen Verfahren). Mit diesem ψ und dem Azimut α kann man in dem sphärischen rechtwinkligen Dreieck in Fig. 2. die beiden Hilfsgrössen m und M bestimmen und damit die Gleichung (15) oder (26) nach σ auflösen.

Damit hat man drei Stücke ψ, α, σ, mit welchen das schiefwinklige sphärische Dreieck von Fig. 2. aufgelöst werden kann, so dass die jenseitige sphärische Breite ψ' und der sphärische Längenunterschied λ bekannt werden.

Von der sphärischen (reduzierten) Breite ψ' geht man zurück zu der wirklichen Breite φ' durch die Gleichung $tang\,\varphi' = tang\,\psi'\sqrt{1+e'^2}$ (oder durch ein anderes in § 103. angegebenes Verfahren), und von der sphärischen Länge λ kommt man zu der sphäroidischen Länge l durch die Gleichung (24) oder (28), womit die Lösung der ganzen Aufgabe vollendet ist.

Zu einem Zahlen-Beispiel hiefür wollen wir nach (5) § 73. S. 392 nehmen:

$$\text{Berlin} \quad \varphi = 52^\circ\,30'\,16{,}7000'' \tag{30}$$

$$\text{Berlin-Königsberg} \quad \alpha = 59^\circ\,33'\;0{,}6892'' \qquad log\,s = 5.724\,2591{\cdot}353 \tag{31}$$

Die Berechnung der reduzierten Breite von Berlin haben wir bereits in (26) § 103. S. 523 behandelt und gefunden:

$$\text{Berlin} \quad \psi = 52^\circ\,24'\,43{,}0114'' \tag{32}$$

Nun kommt die Berechnung von m und M nach den Gleichungen (2) und (3):

$$m = 31^\circ\,43'\,31{,}13'' \qquad M = 68^\circ\,41'\,19{,}95'' \tag{33}$$

Weiter brauchen wir die Coëfficienten zur Berechnung von σ, und zwar zuerst $k' = e'\cos m$ nach (8), es ist:

$$log\,e'\cos m = log\,k' = 8.843\,3740$$

und damit nach (14) und (16) hinreichend genau, ohne die Weiter-Entwicklung (27):

$$log\,A = 0.000\,5270{\cdot}0 \qquad log\,B = 7.084\,1599{\cdot}2 \qquad log\,C = 3.266\,286$$
$$log\,\alpha = 5.313\,8981{\cdot}0 \qquad log\,\beta = 2.398\,0580{\cdot}5 \qquad log\,\gamma = 8.580\,184$$

Mit diesen Coëfficienten α, β, γ kann man die Gleichung (15) nach σ auflösen, allerdings nicht geradezu, weil σ selbst rechts vorkommt; allein die Reihe (15) ist sehr rasch konvergierend, so dass es genügt, einen ersten Näherungswert von σ nur aus dem ersten Gliede von (15) zu berechnen, d. h. $\sigma = \frac{\alpha s}{b}$ zu setzen, womit man auch die folgenden Glieder ausrechnen kann; oder kurz, man löst die Gleichung (15) durch Näherung indirekt, stufenweise nach σ auf. Dieses Verfahren gab in unserem Falle:

$$\text{erste Näherung} \quad \alpha\frac{s}{b} = \sigma = 4^\circ\;46'\;17{,}8''$$
$$\text{hiezu} \; \beta\sin\sigma\cos(2M+\sigma) = - \qquad 16{,}4''$$
$$\text{zweite Näherung} \qquad \sigma = 4^\circ\;46'\;\;1{,}4''$$

Damit kann man das zweite und dritte Glied von (15) ausrechnen, und hat dann im ganzen:



$$\alpha \frac{s}{b} = 4^\circ\ 46'\ 17{,}8176''$$
$$\beta \sin\sigma \cos(2M + \sigma) = -\qquad 16{,}4086''$$
$$\gamma \sin 2\sigma \cos(4M + 2\sigma) = +\qquad 0{,}0015''$$

$$\text{endgiltig}\quad \sigma = 4^\circ\ 46'\ 1{,}4105'' \tag{34}$$

Nun stellen wir von (32), (31), (34) zusammen:

$$\psi = 52^\circ\ 24'\ 43{,}0114'' \qquad \alpha = 59^\circ\ 33'\ 0{,}6892'' \qquad \sigma = 4^\circ\ 46'\ 1{,}4105'' \tag{34a}$$

Damit kann man das sphärische Dreieck auflösen, welches ψ', α' und λ liefert; die Rechnung nach den Formeln (14) und (15) § 60. S. 341 (in gleicher Weise wie das Zahlen-Beispiel auf S. 341—342) hat ergeben:

$$\psi' = 54^\circ\ 37'\ 24{,}7566'' \qquad \alpha' = 65^\circ\ 16'\ 9{,}3655'' \tag{35}$$
$$\lambda = 7^\circ\ 6'\ 30{,}1340'' \tag{36}$$

Der so gefundene sphärische Wert ψ' ist die reduzierte Breite von Königsberg, woraus man nach § 103. die wirkliche Breite berechnet, nämlich:

$$\varphi' = 54^\circ\ 42'\ 50{,}6002'' \tag{37}$$

Nun haben wir noch die Aufgabe, den sphärischen Längenunterschied λ von (36) in den sphäroidischen Längenunterschied l zu verwandeln, wozu die Gleichung (28) mit den Coëfficienten (29) dient. Wir berechnen nach (29), jedoch nur mit den Gliedern bis $\cos^4 m$:

$$\log \alpha' = 7.523\,8439 \qquad \log \beta' = 9.62045 \qquad \log \gamma' = 6.098$$

Demnach (24):

$$l = \lambda - 30{,}1479'' + 0{,}0144'' + 0{,}0000\ldots = \lambda - 30{,}1335''$$

also nach (32):

$$l = 7^\circ\ 6'\ 30{,}1340'' - 30{,}1335'' = 7^\circ\ 6'\ 0{,}0005'' \tag{38}$$

Nun haben wir in (37), (35), (38) die ganze Auflösung:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Königsberg} & \varphi' = 54^\circ\ 42'\ 50{,}6002'' \\ \text{Königsberg-Berlin} & \alpha' = 65^\circ\ 16'\ 9{,}3655'' \ ,\quad l = 7^\circ\ 6'\ 0{,}0005'' \end{array}\right\} \tag{39}$$

Mit den erweiterten Formeln (26)—(29) wollen wir auch noch das grosse Normal-Beispiel (2) § 73. S. 391 berechnen, wofür die Hauptzahlen folgende sind:

$$\text{Gegeben}\quad \varphi = 45^\circ\ 0'\ 0'' \qquad \alpha = 29^\circ\ 3'\ 15{,}4598'' \tag{40}$$
$$\log s = 6.120\,6674{\cdot}805 \tag{41}$$

Die Rechnung beginnt mit der reduzierten Breite zu $\varphi = 45^\circ$:

$$\psi = 44^\circ\ 54'\ 14{,}67493'' \tag{42}$$

Das rechtwinklige sphärische Hilfsdreieck giebt:

$$m = 20^\circ\ 7'\ 8{,}712'' \qquad M = 48^\circ\ 44'\ 46{,}551'' \tag{43}$$

Die Coëfficienten zur Berechnung von σ werden nach (27):

$$\log \alpha = 5.313\,7831{\cdot}066 \ ,\quad \log \beta = 2.483\,7124 \ ,\quad \log \gamma = 8.749\,94 \ ,\quad \log \delta = 5.445$$

und damit σ selbst in 4 Gliedern:

$$\sigma = 42\,782{,}021\,652'' - 20{,}794\,012'' - 0{,}017\,667'' + 0{,}000\,012''$$
$$\sigma = 11^\circ\ 52'\ 41{,}20998'' \tag{44}$$

Mit ψ, α und σ von (42), (40) und (44) wird das sphärische Dreieck aufgelöst; dasselbe giebt:

$$\psi' = 54^\circ\ 54'\ 35{,}3145'' \qquad \alpha' = 36^\circ\ 45'\ 7{,}4006'' \tag{45}$$
$$\lambda = 10^\circ\ 0'\ 49{,}11952'' \tag{46}$$

Die reduzierte Breite ψ' wird in die Breite φ' verwandelt, nach § 103, nämlich:

$$\varphi' = 54^\circ\ 59'\ 59{,}9999'' \quad (\text{soll } 55^\circ\ 0'\ 0'') \tag{47}$$

Das Azimut α' nach (45) ist bereits auch sphäroidisches Azimut; wir haben also, um die Auflösung zu vollenden, nur noch λ von (46) in l zu verwandeln, wozu die Gleichung (28) mit den Coëfficienten (29) dient.

Die Coëfficienten-Berechnung nach (29) giebt:

$$\log \alpha' = 7.523\,7864{\cdot}329 \qquad \log \beta' = 9.706\,0623 \qquad \log \gamma' = 6.27300$$

und damit wird:

$$l = \lambda - 49{,}131\,513'' + 0{,}011\,935'' + 0{,}000\,020 = -\,49{,}119\,558''$$

also nach (46):
$$l = 9^\circ\ 59'\ 59{,}99996'' \quad (\text{soll } = 10^\circ\ 0'\ 0'') \tag{48}$$

In α', φ' und l von (45), (47) und (48) haben wir die vollständige Auflösung der gestellten Aufgabe in hinreichender Übereinstimmung mit den Angaben von (2) § 73. S. 391.

Umkehrung der Aufgabe.

Wenn nicht φ, α und s gegeben sind, sondern φ, φ' und λ, so dass s, α und α' gesucht werden, so kann man das im Vorstehenden behandelte Verfahren auch noch anwenden, aber nur indirekt und umständlich, weil die sphärischen Winkel m und M, oder in erster Näherung wenigstens m, bereits zur Reduktion von l auf λ gebraucht werden.

Indessen haben wir für den Fall, dass φ, φ' und l gegeben, und s, α und α' gesucht sind, die günstigere Auflösung unseres nachfolgenden § 106.

Vergleichung unserer Formeln mit der Bessel schen Methode.

Der Grundgedanke der Auflösung eines sphäroidischen Polar-Dreiecks durch ein sphärisches Hilfs-Dreieck mit reduzierten Breiten ist von Bessel behandelt in einer Abhandlung: „Über die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodätischen Vermessungen, Astr. Nachr Nr. 86, 4. Band 1826", S. 241—254, nebst „Tafeln zur Berechnung der geodätischen Vermessungen".

Diese Bessel sche Theorie mit den Hilfstafeln bildet auch einen Teil des Werkes: „Das Messen auf der sphäroidischen Oberfläche u. s. w. von J. J. Baeyer, Berlin 1862".

Um die Bessel sche Methode nebst ihren Hilfstafeln mit den Formeln unseres vorstehenden § 105. zu vergleichen, bemerken wir zuerst, dass unsere Coëfficienten α, β, γ nach (27) dieselben sind, wie die Bessel schen Coëfficienten α, β, γ, deren Logarithmen in der ersten Bessel schen Hilfstafel enthalten sind; allerdings ist die Form der Berechnung in beiden Fällen verschieden.

Die Coëfficienten α', β', γ' des zweiten Teils der Bessel schen Hilfstafel sind mit unseren Coëfficienten α', β', γ' von (29) nicht unmittelbar identisch, aber sie sind denselben proportional. Es kommt bei Bessel ein konstanter Faktor in Rechnung, den wir hier F nennen wollen:

$$F = \frac{e^2}{\sqrt{1-0{,}75\,e^2}} \qquad (\log F = 7.825\,1369{\cdot}0) \tag{49}$$

Indem wir für den nächsten Zweck der Vergleichung die Bessel schen Coëfficienten mit α'', β'', γ'' bezeichnen, und mit α', β', γ' die Coëfficienten unserer Entwicklung nach (29) S. 528, haben wir:

$$F\alpha'' = \alpha' \quad , \quad F\beta'' = \beta' \quad , \quad F\gamma'' = \gamma' \tag{50}$$

Als Argument für die erste Bessel sche Tafel, $\log \alpha$, $\log \beta$, $\log \gamma$ dient der Logarithmus des Modulus $k = e' \cos m$, welcher nach (8) und (27) auch Argument unserer α, β, γ ist, also erstes Argument $= \log e' \cos m$. Dagegen für den zweiten Teil der Bessel schen Tafel dient als Argument eine Grösse $\log k'$, wobei k' diese Bedeutung hat:

$$k' = \frac{e\sqrt{0{,}75}}{\sqrt{1-0{,}75e^2}} \cos m \qquad \left(\log \frac{e\sqrt{0{,}75}}{\sqrt{1-0{,}75e^2}} = 8.850\,8255{\cdot}6\right) \tag{51}$$

Mit diesen Beziehungen kann man unsere Coëfficienten α, β, γ, α', β', γ' statt sie nach (27) und (29) zu berechnen, auch aus der Bessel schen Hilfstafel entnehmen, indem man mit dem Argument $\log e' \cos m$ in den ersten Teil und mit dem Argument $\log k'$ nach (51) in den zweiten Teil von Bessels Tafel eingeht, worauf zu den gefundenen $\log \alpha'$ und $\log \beta'$ noch der konstante $\log F$ nach (49) zu addieren ist, um unsere α', β' zu erhalten.



§ 106. Neue Auflösung des geodätischen Polar-Dreiecks.*)

(Bezeichnungen nach Fig. 1. und Fig. 2. § 104. S. 524.)

Wir nehmen die zwei Differential-Grundformeln nach (6), (7) § 104. S. 525 nochmals vor: nämlich:

$$d\sigma = \frac{V}{a} d s \tag{1}$$

$$d\lambda = V d l \tag{2}$$

wobei, wie gewöhnlich, V diese Bedeutung hat:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \qquad (e'^2 \cos^2 \varphi = \eta^2) \tag{3}$$

Wenn die beiden Gleichungen (1) und (2) integriert sind, so sind alle Beziehungen zwischen einem geodätischen Polar-Dreieck und einem sphärischen Polar-Hilfsdreieck (Fig. 1. und Fig. 2. S. 524) bekannt, und man kann die Aufgabe auflösen, wie wir in § 104. S. 524 auseinandergesetzt haben.

Wir wollen nun die Integration der Grundgleichungen (1) und (2) durch Entwicklung nach dem Maclaurin schen Satze bewirken, d. h. zunächst bis zur dritten Potenz, durch Entwicklung der Reihen:

$$\sigma = \left.\frac{d\sigma}{ds}\right] s + \left.\frac{d^2\sigma}{ds^2}\right] \frac{s^2}{2} + \left.\frac{d^3\sigma}{ds^3}\right] \frac{s^3}{6} \tag{4}$$

$$\lambda = \left.\frac{d\lambda}{dl}\right] l + \left.\frac{d^2\lambda}{dl^2}\right] \frac{l^2}{2} + \left.\frac{d^3\lambda}{dl^3}\right] \frac{l^3}{6} \tag{5}$$

Wir gehen zuerst näher auf (4) ein, und weil a konstant, nämlich nach (9) § 31. S. 189 $a = c\sqrt{1-e^2}$ ist, haben wir aus (1):

$$\sqrt{1-e^2}\,\sigma = \frac{1}{c}\left\{ V s + \left.\frac{dV}{ds}\right] \frac{s^2}{2} + \left.\frac{d^2 V}{ds^2}\right] \frac{s^3}{6} \right\} \tag{6}$$

Die hier nötigen Ableitungen machen wir in gleicher Form und Behandlung wie früher in § 74. die Ableitungen für φ, l und α. Auch citieren wir von dort (5), (6), (7), § 74. S. 393 mit $tang\,\varphi = t$:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{V^3}{c} \cos\alpha \quad , \quad \frac{dl}{ds} = \frac{V}{c} \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} \quad , \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{V}{c} \sin\alpha\, t \tag{7}$$

(13), (14), S. 393: $$\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{\eta^2}{V} t \quad , \quad \frac{dV}{ds} = -\eta^2 \frac{V^2}{c} \cos\alpha\, t \tag{8}$$

Weiter wird abgeleitet:

$$\frac{d^2 V}{ds^2} = -\eta^2 \frac{V^3}{c^2} \left\{ \cos^2\alpha\,(1 - t^2 + \eta^2 - 3\,\eta^2 t^2) - \sin^2\alpha\, t^2 \right\} \tag{9}$$

Nun kann man bereits die Formel (6) zusammensetzen, und man bemerkt, dass dabei s mit V und c immer in derselben Kombination vorkommen, wie auch bei den früheren Reihen (vgl. (22) § 74. S. 394), wir setzen deshalb für analytisches Mass (ohne ϱ):

$$\frac{V}{c} s = S \tag{10}$$

und damit geben (6), (8) und (9):

$$\sigma\sqrt{1-e^2} = S - \frac{S^2}{2} \cos\alpha\, \eta^2 t - \frac{S^3}{6} \eta^2 \left(\cos^2\alpha\,(1 - t^2 + \eta^2 - 3\,\eta^2 t^2) - \sin^2\alpha\, t^2 \right) \tag{11}$$

---

*) Erstmals veröffentlicht in der „Zeitschr. f. Verm.", 1883, S. 65—82.

In gleicher Weise haben wir auch die Längen-Formel zu bilden, nämlich zunächst (2) und (5):

$$\lambda = V l + \frac{d\,V}{d\,l}\Big]\frac{l^2}{2} + \frac{d^2\,V}{d\,l^2}\Big]\frac{l^3}{6} \tag{12}$$

Die hiezu nötigen Ableitungen sind:

$$\frac{d\,V}{d\,l} = \frac{d\,V}{d\,\varphi}\frac{d\,\varphi}{d\,l} \quad , \quad \frac{d\,\varphi}{d\,l} = V^2 \operatorname{cotg}\alpha \cos\varphi \quad , \quad \frac{d\,\alpha}{d\,l} = \sin\varphi$$

$$\frac{d\,V}{d\,l} = -\,\eta^2\,V \operatorname{cotg}\alpha \sin\varphi \quad \text{oder} \quad = -\,\eta^2\,V\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}\cos\alpha\, t \tag{13}$$

$$\frac{d^2 V}{d\,l^2} = -\,\eta^2\,V\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\alpha}\Big\{\cos^2\alpha\,(1 - 3\,t^2 + \eta^2 - 3\,\eta^2\,t^2) - \sin^2\alpha\,t^2\Big\} \tag{14}$$

Damit kann man (12) zusammensetzen:

$$\lambda = V\Big\{l - \frac{l^2}{2}\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}\eta^2\cos\alpha\,t - \frac{l^3}{6}\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\alpha}\eta^2\,(\cos^2\alpha\,(1-3\,t^2+\eta^2-3\,\eta^2\,t^2)-\sin^2\alpha\,t^2)\Big\} \tag{15}$$

Fig. 1.

Die Formeln (11) und (15) geben σ und λ als Funktion der Ausgangsbreite φ und des Ausgangsazimutes α der geodätischen Linie; wir wollen nun aber das Prinzip des mittleren Argumentes anwenden, welches bereits in § 77. sehr nützliche Dienste geleistet hat.

Wir nehmen zu diesem Zwecke die Bezeichnungen von nebenstehender Fig. 1. an, d. h. wir nehmen drei Punkte in gleichen Breiten-Abständen:

$$\varphi_2 - \varphi = \varphi - \varphi_1 \quad , \quad \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi \tag{16}$$

Von der Mittelbreite φ geht eine geodätische Linie s_2 unter dem Azimut α_0 aus, und eine zweite geodätische Linie s_1 unter dem Azimut $\alpha_0 \pm 180°$. Den geodätischen Linien s_2 und s_1, deren Summe $s_2 + s_1 = s$ sei, entsprechen zwei Grössen S_2 und S_1 nach (10), mit der Summe $S_2 + S_1 = S$. Damit giebt die doppelte Anwendung der Formel (11):

$$\sigma\sqrt{1-e^2} = S - \frac{S_2^2 - S_1^2}{2}\cos\alpha_0\,\eta^2\,t - \frac{S_2^3 + S_1^3}{6}\eta^2\,(\cos^2\alpha_0\,(1-t^2+\eta^2-3\,\eta^2\,t^2) - \sin\alpha_0\,t^2)$$

Hier ist von (4) § 77. S. 403 zu benützen:

$$S_2 - S_1 = \frac{S^2}{4}t\left(\frac{\sin^2\alpha_0}{\cos\alpha_0} + 3\,\eta^2\cos\alpha_0\right)$$

Wenn man dieses in das Vorstehende einsetzt, so darf man auch überall α statt α_0 schreiben, und damit bekommt man:

$$\sigma\sqrt{1-e^2} = S - \frac{S^3}{24}\eta^2\Big\{\sin^2\alpha\,2\,t^2 + \cos^2\alpha\,(1 - t^2 + \eta^2 + 6\,\eta^2\,t^2)\Big\} \tag{17}$$

Nun wenden wir auch die Gleichung (15) in zweifacher Weise auf Fig. 1. an und erhalten mit $l_2 + l_1 = l$, $\lambda_2 + \lambda_1 = \lambda$:

$$\lambda = V\Big\{l - \frac{l_2^2 - l_1^2}{2}\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha_0}\eta^2\cos\alpha_0\,t$$

$$- \frac{l_2^3 + l_1^3}{6}\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\alpha_0}\eta^2\,(\cos^2\alpha_0\,(1 - 3\,t^2 + \eta^2 - 3\,\eta^2\,t^2) - \sin^2\alpha\,t^2)\Big\}$$

Hiezu hat man von (17) § 77. S. 404:

$$(l_2 - l_1) \cos\varphi = \frac{S^2}{4} \frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha} t + \frac{S^2}{4} \sin\alpha \cos\alpha\, t\, (2 + 3\,\eta^2)$$

Hier kann man setzen $S \sin\alpha = l \cos\varphi$, also:

$$(l_2 \quad l_1) = \frac{l^2}{4} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cos\varphi\, t + \frac{l^2}{4} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cos\varphi\, t\, (2 + 3\,\eta^2)$$

Dieses setzt man in die vorhergehende Formel für λ, wobei auch wieder α_0 und α vertauscht werden können; dadurch erhält man:

$$\lambda = V \left\{ l - \frac{l^3}{24} \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\alpha}\, \eta^2 \left(\sin^2\alpha^2\, t^2 + \cos^2\alpha\, (1 + 3\, t^2 + \eta_2 + 6\, \eta^2\, t^2) \right) \right\} \tag{18}$$

Die Gleichungen (17) und (18) enthalten bereits die Lösung unserer Aufgabe, wenn man S, α und l wenigstens näherungsweise als gegeben voraussetzt; indessen ist es bequemer, alles auf den Breiten-Unterschied b und den Längen-Unterschied l zu reduzieren. Hiezu hat man für die Korrektionsglieder:

$$S \sin\alpha = l \cos\varphi \quad , \quad S \cos\alpha = l \cos\varphi \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{V^2}$$

Dieses in (17) und (18) eingesetzt giebt:

$$\sigma = \frac{S}{\sqrt{1 - e^2}} \left\{ 1 - \frac{\eta^2}{24} \left(\frac{b^2}{V^4} (1 - t^2 + \eta^2 + 6\, \eta^2\, t^2) + 2\, l^2 \sin^2\varphi \right) \right\} \tag{19}$$

$$\lambda = V l \left\{ 1 - \frac{\eta^2}{24} \left(\frac{b^2}{V^4} (1 + 3\, t^2 + \eta^2 + 6\, \eta^2\, t^2) + 2\, l^2 \sin^2\varphi \right) \right\} \tag{20}$$

Wir wollen die Coëfficienten herausheben und folgende Gebrauchsformeln bilden (mit Berücksichtigung der nötigen ϱ):

$$\sigma = U s \left\{ 1 + (\sigma_1)\, b^2 + (\sigma_2)\, l^2 \sin^2\varphi \right\} \tag{21}$$

$$\lambda = V l \left\{ 1 + (\lambda_1)\, b^2 + (\lambda_2)\, l^2 \sin^2\varphi \right\} \tag{22}$$

Man kann diese Formeln auch in logarithmischer Form anwenden, z. B. wenn $\log\sigma$ gegeben und $\log s$ zu bestimmen ist, hat man durch Umkehrung von (21) in logarithmischer Form:

$$\log s = (\log\sigma - \log U) - \mu\, (\sigma_1)\, b^2 - \mu\, (\sigma_2)\, l^2 \sin^2\varphi \tag{23}$$

Dabei ist V die bisher immer mit V bezeichnete Funktion:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2\varphi} \tag{24}$$

und

$$U = \frac{V}{c\sqrt{1 - e^2}}\, \varrho \quad \text{oder} \quad = \frac{V}{a}\, \varrho$$

$$\log U = \log V + 8.509\,7816{\cdot}695 \tag{25}$$

Den Wert $\log V$ bzw. $\log V^2$ kann man aus der Hilfstafel S. [2]—[7] unseres Anhangs 10 stellig entnehmen und nach (25) hat man dann auch $\log U$.

Für die Coëfficienten (σ_1), (σ_2), (λ_1), (λ_2) in (21) und (22) ergeben sich durch Vergleichung mit (19) und (20) folgende Bedeutungen:

$$(\sigma_1) = + \frac{\eta^2}{24\, \varrho^2\, V^4} (t^2 - (1 + \eta^2 + 6\, \eta^2\, t^2)) \quad , \quad (\sigma_2) = - \frac{\eta^2}{12\, \varrho^2} \tag{26}$$

$$(\lambda_1) = - \frac{\eta^2}{24\, \varrho^2\, V^4} (3\, t^2 + 1 + \eta^2 + 6\, \eta^2\, t^2) \quad , \quad (\lambda_2) = - \frac{\eta^2}{12\, \varrho^2} \tag{27}$$

Dabei sind die konstanten Coëfficienten-Logarithmen:

$$\log \frac{1}{24\, \varrho^2} = 7.990\,9385 - 20 \quad , \quad \log \frac{1}{12\, \varrho^2} = 8.291\,9685 - 20$$

Weiter-Entwicklung bis zur fünften Ordnung.

Man kann mit den bisher entwickelten Formeln bereits geodätische Linien von mehreren Grad Ausdehnung berechnen, wie aus der Vergleichung der nachfolgenden Zahlen-Beispiele mit den Ergebnissen von § 105. zu ersehen ist.

Das beste Mittel jedoch, zur Gewinnung eines Urteils über das bisher behandelte Verfahren und über die Möglichkeit seiner Erweiterung, hat man in der Weiter-Entwicklung um eine Stufe höher, d. h. bis zur fünften Ordnung.

Wir haben diese Entwicklung durchgeführt, und in der „Zeitschr. f. Verm., 1883", S. 72—76 die Haupt-Zwischenstufen angegeben; da es sich dabei um sehr lange, im Druck kaum wiederzugebende Formelhäufungen handelt, deren mathematischer Grundgedanke schon durch das Vorhergehende völlig klar gemacht ist, geben wir hier nur die End-Ergebnisse.

Die Formeln (21) und (22) werden so erweitert (vgl. (30) und (31)):

$$\sigma = U s \left\{1 + (\sigma_1)\, b^2 + (\sigma_2)\, l^2 \sin^2\varphi + (\sigma_3)\, b^4 + (\sigma_4)\, b^2 l^2 \cos^2\varphi + (\sigma_5)\, l^4 \cos^4\varphi\right\} \quad (28)$$

$$\lambda = V l \left\{1 + (\lambda_1)\, b^2 + (\lambda_2)\, l^2 \sin^2\varphi + (\lambda_3)\, b^4 + (\lambda_4)\, b^2 l^2 \cos^2\varphi + (\lambda_5)\, l^4 \cos^4\varphi\right\} \quad (29)$$

Wenn man die Formeln (28) und (29) umgekehrt anwenden will, d. h. wenn man z. B. s aus σ berechnen will, so braucht man die Glieder $(\sigma_1)^2 b^4$, $(\sigma_1)(\sigma_2)\, b^2 l^2 \sin^2\varphi$ und $(\sigma_2)^2 l^4 \sin^4\varphi$, welche bei der Reihenumkehrung zunächst auftreten, nicht zu berücksichtigen, weil die Coëfficienten (σ_1) und (σ_2) beide den Faktor η^2 haben, und Glieder von der Ordnung (η^4) in den Coëfficienten (σ_3), (σ_4) und (σ_5) überhaupt vernachlässigt sind.

Also auch, wenn man logarithmisch rechnen will, kann man (28) kurz so umkehren:

$$\left.\begin{aligned} \log s = (\log\sigma - \log U) - \mu\,(\sigma_1)\, b^2 - \mu\,(\sigma_2)\, l^2 \sin^2\varphi - \mu\,(\sigma_3)\, b^4 \\ - \mu\,(\sigma_4)\, b^2 l^2 \cos^2\varphi - \mu\,(\sigma_5)\, l^4 \cos^4\varphi \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

In diesen Formeln (28), (29), (30) sind die Coëfficienten (σ_1), (σ_2), (λ_1), (λ_2) dieselben, wie schon bei (26) und (27) angegeben wurde; die übrigen haben, auf η^2 einschliesslich genau, folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_3) &= \frac{\eta^2}{480\,\varrho^4}(1 - t^2) &&= [3.88838]\cos^2\varphi\,(1 - t^2) \\ (\sigma_4) &= \frac{\eta^2}{720\,\varrho^4}(-1 + 2t^2 + 15t^4) &&= [3.712\,229]\cos^2\varphi\,(-1 + 2t^2 + 15t^4) \\ (\sigma_5) &= -\frac{\eta^2}{720\,\varrho^4}(9t^2 - 5t^4) &&= [3.712\,229_n]\cos^2\varphi\,(9t^2 - 5t^4) \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

$$\left.\begin{aligned} (\lambda^3) &= -\frac{\eta^2}{1440\,\varrho^4}(1 + 15t^2) &&= [3.411\,256_n]\cos^2\varphi\,(1 + 15t^2) \\ (\lambda_4) &= \frac{\eta^2}{720\,\varrho^4}(-1 - 10t^2 + 15t^4) &&= [3.712\,286]\cos^2\varphi\,(-1 - 10t^2 + 15t^4) \\ (\lambda_4) &= \frac{\eta^2}{240\,\varrho^4}(-3t^2 + t^4) &&= [4.189\,407]\cos\varphi\,(-3t^2 + t^4) \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Die eingeklammerten Zahlen sind hier Logarithmen, und angehängtes n bedeutet, dass die zugehörige Zahl negativ ist. Wie immer bedeutet $\eta^2 = e'^2 \cos^2\varphi$ und $t = \tang\varphi$.

Eine Coëfficienten-Tabelle haben wir hiernach berechnet und auf S. [62]—[63] des Anhangs mitgeteilt. Zu Weiterem können auch die Tabellen [47] und [48] des Anhangs benützt werden.

In den vorstehenden Formeln kommen verschiedene Konstanten vor, welche wir zum Gebrauch hier zusammenstellen:

$$\left.\begin{array}{ll} \log(1:\ 12\,\rho^2) = 8.291\,9684{\cdot}9 - 20 & \log(e'^2:\ 12\,\rho^2) = 6.119\,2832{\cdot}7 - 20 \\ \log(1:\ 24\,\rho^2) = 7.990\,9384{\cdot}9 - 20 & \log(e'^2:\ 24\,\rho^2) = 5.818\,2572{\cdot}8 - 20 \\ \log(1:\ 240\,\rho^4) = 6.362\,0882 \quad - 30 & \log(e'^2:\ 240\,\rho^4) = 4.189\,4070 \quad - 30 \\ \log(1:\ 480\,\rho^4) = 6.061\,0582 \quad - 30 & \log(e'^2:\ 480\,\rho^4) = 3.888\,3770 \quad - 30 \\ \log(1:\ 720\,\rho^4) = 5.884\,9670 \quad - 30 & \log(e'^2:\ 720\,\rho^4) = 3.712\,2858 \quad - 30 \\ \log(1:1440\,\rho^4) = 5.583\,9370 \quad - 30 & \log(e'^2:1440\,\rho^4) = 3.411\,2558 \quad - 30 \end{array}\right\} \quad (33)$$

Um eine Übersicht zu gewinnen, wie viel die Glieder fünfter Ordnung in unseren Breiten etwa ausmachen, haben wir die folgenden zwei Übersichts-Tabellen berechnet, für den Gesamtbetrag der 3 Endglieder in (28) und (29).

I. Glieder fünfter Ordnung in der Formel (28) für σ, mit $\varphi = 50°$.

$b =$	$l + 2°$	$l = 4°$	$l = 6°$	$l = 8°$	$l = 10°$
2°	+ 0,00000″	+ 0,00000″	+ 0,00001″	+ 0,00001″	+ 0,00001″
4°	+ 0,00000	+ 0,00002	+ 0,00005	+ 0,00010	+ 0,00016
6°	+ 0,00001	+ 0,00006	+ 0,00014	+ 0,00030	+ 0,00048
8°	+ 0,00001	+ 0,00012	+ 0,00031	+ 0,00061	+ 0,00103
10°	+ 0,00002	+ 0,00018	+ 0,00056	+ 0,00111	+ 0,00186

(34)

II. Glieder fünfter Ordnung in der Formel (29) für λ, mit $\varphi = 50°$.

$b =$	$l = 2°$	$l = 4°$	$l = 6°$	$l = 8°$	$l = 10°$
2°	— 0,00000″	— 0,00000″	— 0,00001″	— 0,00003″	— 0,00012″
4°	— 0,00001	— 0,00001	— 0,00001	— 0,00001	— 0,00004
6°	— 0,00004	— 0,00006	— 0,00006	— 0,00005	— 0,00005
8°	— 0,00011	— 0,00020	— 0,00025	— 0,00026	— 0,00022
10°	— 0,00028	— 0,00053	— 0,00070	— 0,00079	— 0,00078

(35)

Als erste Anwendung der entwickelten Formeln wollen wir unser fünftes Normal-Beispiel (5) § 74. S. 392 nehmen in dieser Weise:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Gegeben} & \text{Berlin} & \varphi_1 = 52°\ 30'\ 16{,}7'' \\ & \text{Königsberg} & \varphi_2 = 54°\ 42'\ 50{,}6'' \end{array}\quad l = 7°\ 6'\ 0''\right\} \quad (36)$$

Es soll die geodätische Linie s zwischen beiden Punkten, und beide Azimute α_1 und α_2 berechnet werden.

Man bildet zuerst das Mittel der gegebenen Breiten:

$$\varphi = 53°\ 36'\ 33{,}65'' \quad (37)$$

Damit geht man in die Hilfstafeln Seite [5] und Seite [62]—[63] des Anhangs ein, und entnimmt die Coëfficienten:

$$\log V = 0.000\,5129.683 \quad (38)$$

$\log(\lambda_1)$	$\log(\lambda_2)$	$\log(\lambda_3)$	$\log(\lambda_4)$	$\log(\lambda_5)$
6.17908_n	5.66582_n	4.414_n	4.756	4.065

Damit rechnet man nach der Formel (29), mit $l = 7° \; 6' \; 0'' = 25560$; das Hauptglied wird 25590,208 116″, dann die 5 Korrektionsglieder:

$$-0{,}024\,452'' \quad , \quad -0{,}050\,187'' \quad , \quad -0{,}000\,003'' \quad , \quad +0{,}000\,021'' \quad , \quad -0{,}000\,016'',$$

$$\lambda = 25590{,}208\,116'' - 0{,}074\,637'' = 25590{,}133\,479''$$

$$\lambda = 7° \; 6' \; 30{,}133\,479'' \tag{39}$$

Wir haben hier mit 6 Dezimalen der Sekunden gerechnet, um zu sehen, wie weit sich überhaupt die drei letzten Glieder bemerklich machen; da dieselben nur 0,0002″ ausmachen, könnte man dieselben ganz weglassen.

Nun nehmen wir die reduzierten Breiten zu (36) nebst λ von (39) zusammen:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Berlin} & \psi_1 = 52° \; 24' \; 43{,}01137'' & \\ \text{Königsberg} & \psi_2 = 54° \; 37' \; 24{,}75639'' & \end{array} \lambda = 7° \; 6' \; 30{,}13348''\right\} \tag{40}$$

Das dadurch bestimmte sphärische Dreieck haben wir nach den Gauss schen Formeln (4), (5) § 60. S. 339 aufgelöst, wodurch gefunden wurde:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_1 = 59° \; 33' \; 0{,}6889'' & \alpha_2 = 65° \; 16' \; 9{,}3650'' \\ & \sigma = 4° \; 46' \; 1{,}41023'' = 17161{,}41023'' \end{array}\right\} \tag{41}$$

Um σ auf s zu reduzieren, braucht man wieder Coëfficienten, zuerst *log U* nach der Formel (25) mit Benützung des schon bei (38) berechneten *log V*:

$$log\, U = 8.510\,2946{\cdot}378.$$

Aus der Hilfstafel Seite [62]—[63] entnimmt man mit dem Argument $\varphi = 53° \; 36' \; 33{,}65''$ von (37), die 5 Coëfficienten-Logarithmen für s:

$log\,(\sigma_1)$	$log\,(\sigma_2)$	$log\,(\sigma_3)$	$log\,(\sigma_4)$	$log\,(\sigma_5)$
5.27256	5.66582_n	3.360_n	4.987	5.839_n

Damit rechnen wir nach der Formel (30), und haben zunächst das Hauptglied 5.724 2583·351 und die 5 logarithmischen Korrektionsglieder:

$$-0{\cdot}5146 \qquad +8{\cdot}5179 \qquad +0{\cdot}0000 \qquad -0{\cdot}0061 \qquad +0{\cdot}0002$$

Dieses giebt im ganzen:

$$log\, s = 5{\cdot}724\,2583{\cdot}351 + 7{\cdot}997 = 5{\cdot}724\,2591{\cdot}348 \qquad s = 529\,979{,}578^m \tag{42}$$

Die Länge s und die beiden Azimute von (41) stellen die Lösung vor, welche mit den entsprechenden Werten (31) und (39) des vorigen § 105. S. 529—531 hinreichend stimmen.

Nach diesem wollen wir noch unser grosses Normal-Beispiel (2) § 73. S. 391 behandeln:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Gegeben} & \varphi_1 = 45° \; 0' \; 0'' & \\ & \varphi_2 = 55° \; 0' \; 0'' & l = 10° \; 0' \; 0'' \\ \text{Mittel} & \varphi \;= 50° \; 0' \; 0'' & \end{array}\right\} \tag{43}$$

Damit geht man in die Hilfstafeln Seite [5] und Seite [62]—[63] ein, und entnimmt die Coëfficienten:

$$log\, V = 0.000\,6020{\cdot}131 \qquad log\, U = 8.510\,3836{\cdot}826 \tag{44}$$

(45)

$log\,(\sigma_1)$	$log\,(\sigma_2)$	$log\,(\sigma_3)$	$log\,(\sigma_4)$	$log\,(\sigma_5)$
5.02731	5.73542_n	3.128_n	4.835	3.759_n

(46)

$log\,(\lambda_1)$	$log\,(\lambda_2)$	$log\,(\lambda_3)$	$log\,(\lambda_4)$	$log\,(\lambda_5)$
$6.155\,215_n$	5.73542_n	4.376_n	4.506	4.156_n

Die Reduktion für λ nach der Formel (29) giebt das Hauptglied 36049,93731″ und die 5 Korrektionsglieder:

$$-0{,}667\,923'' \quad , \quad -0{,}149\,088'' \quad , \quad -0{,}001\,438'' \quad , \quad +0{,}000\,802'' \quad , \quad -0{,}000{,}148''$$

Im ganzen: $\lambda = 36049{,}93731'' - 0{,}817\,795'' = 36049{,}11952''$ (47)

Die beiden reduzierten Breiten sind:

$$\psi_1 = 44^\circ\ 54'\ 14{,}67493'' \qquad \psi_2 = 54^\circ\ 54'\ 35{,}31462'' \tag{48}$$

Diese ψ_1 und ψ_2 nebst λ von (47) bestimmen ein sphärisches Dreieck, dessen Auflösung giebt:

$$\alpha_1 = 29^\circ\ 3'\ 15{,}45983'' \qquad \alpha_2 = 36^\circ\ 45'\ 7{,}40055'' \tag{49}$$

$$\sigma_1 = 11^\circ\ 52'\ 41{,}20996'' = 42761{,}20996''$$

Zur Reduktion von σ auf s hat man die Formel (30) mit den Coëfficienten (45); das Hauptglied wird 6.120 6663·024 und die 5 Korrektionsglieder:

$$-5{\cdot}994\ ,\ +17{\cdot}961\ ,\ +0{\cdot}010\ ,\ -0{\cdot}206\ ,\ 0{\cdot}007$$

Im ganzen:

$$\log s = 6.120\,6663{\cdot}024 + 11{\cdot}778 = 6.120\,6674{\cdot}802 \qquad s = 1\,320\,284{,}365^{m} \tag{50}$$

Die Werte (49) und (50) stellen die Lösung der Aufgabe vor, welche mit (40), (41), (45) des vorigen § 105. S. 530 verglichen, genügend stimmen.

In der „Zeitschr. f. Verm. 1888" S. 81—82 haben wir eine Coëfficienten-Tabelle für die Formeln (28) und (29) gegeben, welche nicht dieselbe ist wie die neu berechnete Tabelle Seite [62]—[63] unseres Anhangs. Nur die Coëfficienten (σ_1), (σ_2), (λ_1), (λ_2) sind mit den früheren [1], [3], (1), (3) identisch, abgesehen von einer kleinen Differenz in den letzten Stellen von $\log(\sigma_1)$ und $\log(\lambda_1)$ daher rührend, dass früher $\frac{1}{V^4} = 1 - 2\,\eta^2$ gesetzt war, was Vernachlässigung von η^4 enthält, welche in den neuen Coëfficienten (σ_1), (σ_2), (λ_1), (λ_2) nicht mehr vorkommt. Ausserdem besteht der Unterschied, dass Funktionen $\sin^2\varphi$, $\cos^2\varphi$, $\cos^4\varphi$, welche früher in die Coëfficienten gezogen waren, nun in der Formel bleiben, damit die Coëfficienten-Tafel kleinere Differenzen bekommt. Nur der in η^2 enthaltene Faktor $\cos^2\varphi$ ist in die Coëfficienten gezogen, weil der Modul $\eta^2 = e'^2\cos^2\varphi$ sich analytisch gut findet, und auch formell den Faktoren t^2 gegenüber in den Coëfficienten zum Gleichgewicht beiträgt.

Als ein weiteres Beispiel für die Anwendung des im vorstehenden § 106. behandelten Verfahren können wir die Mecklenburgische Diagonale citieren, welche schon unter unseren Normalbeispielen in § 73. S. 392 angegeben, in „Zeitschr. f. Verm. 1896" S. 240—248 berechnet wurde.

Kapitel X.

Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke.

Vorbemerkung. Dieses Kapitel enthält im Wesentlichen den Inhalt der Abhandlung: „Disquisitiones generales circa superficies curvas, auctore Carolo Friderico Gauss, Göttingae 1828 (societati regiae oblatae d. 8. Octob. 1827) und in „Carl Friedrich Gauss Werken", IV. Band, Göttingen 1873, S. 217—258. In deutscher Übersetzung herausgegeben: „Allgemeine Flächentheorie u. s. w. von A. Wangerin, Leipzig, Engelmann 1889."

Wir haben versucht, die analytischen Entwicklungen des ersten Teiles dieser klassischen Abhandlung durch unsere geometrischen Betrachtungen von § 107. und 108. zu ersetzen.

§. 107. Geodätischer Excess.

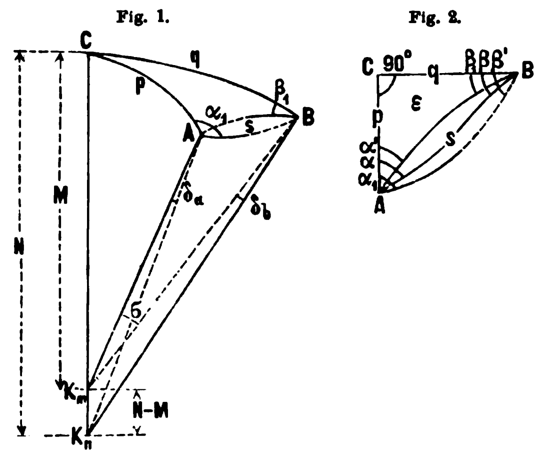
Dem sphärischen Excess, den wir in § 40. kennen gelernt haben, mit der Formel (2a) S. 231

$$\varepsilon = \frac{E}{r^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{F}{r^2}\,\varrho \text{ in Sekunden} \tag{1}$$

entspricht ein ganz analoger Satz auf irgend einer krummen Fläche, deren Haupt-Krümmungs-Halbmesser in einem Punkte M und N und deren mittlerer Krümmungs-Halbmesser $r = \sqrt{M N}$ ist, wobei ein unendlich kleines Dreieck vorausgesetzt ist, das, durch geodätische Linien begrenzt, die kleine Fläche F hat.

Hiezu betrachten wir in den nachstehenden Fig. 1. und Fig. 2. ein kleines rechtwinkliges geodätisches Dreieck, dessen Katheten $C A = p$ und $C B = q$ in den Richtungen der beiden Haupt-Krümmungen liegen, auf einer krummen Fläche, welche nach $C A$ den Krümmungs-Halbmesser M und nach $C B$ den Krümmungs-Halbmesser N hat.

Wir nehmen dabei die Bezeichnungen wie gewöhnlich für das Umdrehungs-Ellipsoid, und denken unter p und M die Beziehung zum Meridian, unter q und N die Beziehung rechtwinklig zum Meridian (indessen kann man die nächsten Betrachtungen auch allgemeiner führen).



Unter K_m und K_n verstehen wir die beiden Krümmungs-Mittelpunkte, so dass für einen kleinen Bogen $A C = p$ die beiden Normalen $C K^m$ und $A K_m = M$ und entsprechend $C K_n = B K_n = N$ angenommen werden kann; damit ist auch die kleine Entfernung $K_n K_m = N - M$ bestimmt.

Wir haben hiernach wieder den Fall des früheren § 71. S. 382 und S. 384, und wir wollen von den dort auf S. 386 gefundenen Formeln einen Gebrauch machen, um den geodätischen Excess des geodätischen Dreiecks Fig. 2 mit den Katheten p und q und der Hypotenuse s zu bestimmen.

Figur 2. giebt uns drei Dreiecke, nämlich zwei sphärische und ein geodätisches.

I. Sphärisches Dreieck mit dem Halbmesser M:

$$90° + \alpha_1 + \beta'' - 180° = \varepsilon_m$$

$$\alpha_1 + \beta'' + 90° = \varepsilon_m = \frac{p\,q}{2\,M^2} \tag{2}$$

II. Sphärisches Dreieck mit dem Halbmesser N:

$$90° + \alpha' + \beta_1 - 180° = \varepsilon_n$$

$$\alpha' + \beta_1 - 90° = \varepsilon_n = \frac{p\,q}{2\,N^2} \tag{3}$$

III. Geodätisches Dreieck mit der geodätischen Linie s:

$$90° + \alpha + \beta - 180° = \varepsilon$$

$$\alpha + \beta - 90° = \varepsilon \tag{4}$$

Zwischen den Winkeln dieser drei Dreiecke bestehen nach (16) S. 386 folgende Beziehungen:

$$\alpha - \alpha' = \frac{2}{3}\,\eta^2\,\varepsilon \qquad \beta - \beta_1 = \frac{1}{3}\,\eta^2\,\varepsilon \tag{5}$$

$$\alpha_1 - \alpha = \frac{1}{3}\,\eta^2\,\varepsilon \qquad \beta'' - \beta = \frac{2}{3}\,\eta^2\,\varepsilon \tag{6}$$

Dabei kann ε entweder $= \varepsilon_m$ oder $= \varepsilon_n$ nach (2) oder (3) genommen werden, denn wegen des Faktors $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ kommt es hier auf solche Unterscheidung nicht an.

Durch Vergleichung von (2), (3), (4) mit Rücksicht auf (5) und (6) findet man:

$$\varepsilon = \varepsilon_m - \eta^2 \varepsilon = \varepsilon_m (1 - \eta^2) = \frac{p\,q}{2\,M^2}(1 - \eta^2) \tag{7}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_n + \eta^2 \varepsilon = \varepsilon_n (1 + \eta^2) = \frac{p\,q}{2\,N^2}(1 + \eta^2) \tag{8}$$

Wenn man beachtet, dass $1 + \eta^2 = V^2 = N : M$ (nämlich wie immer nach unseren Grundformeln § 32. S. 197) und wenn man auch genähert $1 - \eta^2 = \frac{1}{1 + \eta^2}$ setzt, so geben die beiden Formeln (7) und (8) übereinstimmend:

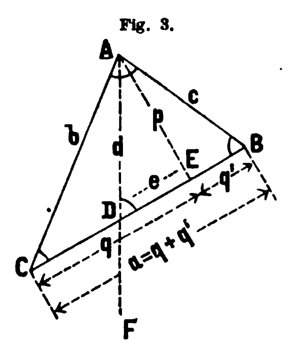
$$\varepsilon = \frac{p\,q}{2\,M\,N} \quad \text{oder} \quad = \frac{p\,q}{2\,r^2} \tag{9}$$

Wir haben also zu Fig. 2. den Satz gefunden, dass ein kleines geodätisches, rechtwinkliges Dreieck $A\,B\,C$ mit den Katheten p und q in den Haupt-Krümmungsrichtungen (so dass also p und q jedenfalls kleine geodätische Linien sind) und mit einer schiefen geodätischen Linie $A\,B = s$ einen geodätischen Excess ε giebt, der ganz wie der Exzess eines sphärischen Dreiecks berechnet wird, wenn man als Halbmesser den mittleren Krümmungs-Halbmesser $r = \sqrt{M\,N}$ an der betreffenden Stelle der krummen Fläche annimmt.

Übergang zum allgemeinen Dreieck.

Nachdem für das betrachtete rechtwinklige geodätische Dreieck dieselbe Formel gefunden ist, wie früher für das rechtwinklige sphärische Dreieck, ist auch der Übergang zu einem allgemeinen Dreieck ebenso zu machen, wie für das sphärische Dreieck Fig. 4. S. 248, und wir können daher den geodätischen Excess bis zur Ordnung $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich nun auch für ein solches geodätisches Dreieck, das sich aus zwei rechtwinkligen Dreiecken von der Form Fig. 2. S. 539 zusammensetzen lässt, als bewiesen annehmen.

Das ist aber noch nicht der ganz allgemeine Fall, denn jenes rechtwinklige Dreieck Fig. 2. hat die Besonderheit, dass seine Katheten p und q in den Richtungen der beiden Haupt-Krümmungen der Fläche liegen; und wir können daher nach dem bisherigen Beweisgang den Satz nur für solche geodätische Dreiecke als bewiesen annehmen, welche eine Seite in einer Haupt-Krümmungsrichtung liegen haben.



Indessen lässt sich der Übergang von einem solchen Dreieck zu einem beliebig gestalteten und auch gegen die Haupt-Krümmungsrichtungen beliebig liegenden Dreieck vollends leicht bewerkstelligen, indem nach Fig. 3. das allgemeine Dreieck $A\,B\,C$ in zwei Dreiecke $A\,C\,D$ und $A\,B\,D$ zerlegt wird, welche die Seite $A\,D$ in einer Haupt-Krümmungsrichtung gemeinschaftlich haben.

Wenn ε_1 und ε_2 die Excesse dieser beiden Dreiecke $A\,C\,D$ und $A\,B\,D$ sind, so hat man nach Fig. 3.:

$$\varepsilon_1 = \frac{(q - e)\,p}{2\,r^2} \qquad \varepsilon_2 = \frac{(q' + e)\,p}{2\,r^2}$$

also: $$s_1 + s_2 = \frac{(q+q')p}{2r^2} = \frac{a\,p}{2r^2} = s$$

allgemein: $$s = \frac{F}{r^2} \qquad (10)$$

Es gilt also für kleine geodätische Dreiecke dieselbe Excessberechnung in erster Näherung, wie für ein sphärisches Dreieck nach Gleichung (1), wenn man nur den mittleren Krümmungs-Halbmesser $r = \sqrt{MN}$ anwendet, wobei übrigens auch noch angenommen ist, dass die beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser M und N unter sich nahe gleich sind, so dass $\frac{N}{M} = 1 + \eta^2$ und $\frac{M}{N} = 1 - \eta^2$ gesetzt werden kann, d. h. dass η^4 gegen η^2 vernachlässigt werden kann.

Durch solche einfache Betrachtungen, welche zu den Formeln (7)—(10) geführt haben, kann man nicht bloss, wie hier geschehen, die Formel für den Excess herleiten, sondern man kann auch noch nachweisen, dass innerhalb $\frac{1}{r^2}$ die sphärischen Formeln von § 44, nämlich (8)—(10) S. 246 und 247 und auch der Legendrische Satz von § 41. innerhalb $\frac{1}{r^2}$ also ausschliesslich $\frac{1}{r^4}$ auch für ein geodätisches Dreieck mit kleinen geodätischen Linien auf irgend welcher krummen Fläche ebenso gilt, wie die Excessformel. Wir haben das in der früheren 3ten Auflage dieses III. Bandes, 1890, § 98. gezeigt und durchgeführt, was aber nun, weil kein dringendes Bedürfnis dafür vorhanden ist, übergangen werden soll.

Kongruente Linien-Abbildung und geodätischer Excess.

Im Anschluss an die Betrachtungen, welche in § 68. zu der geometrischen Definition der geodätischen Linie geführt haben, wollen wir irgend eine Linie auf einer krummen Fläche in einzelnen Elementen nach Streckenmass und Azimutalwinkeln aufgenommen, und entsprechend in einer Ebene aufgetragen denken. Die dadurch entstehende Linie in der Ebene nennen wir „kongruentes Abbild“ der Linie auf der krummen Fläche, und das ganze Verfahren nennen wir „kongruente Linien-Abbildung“.

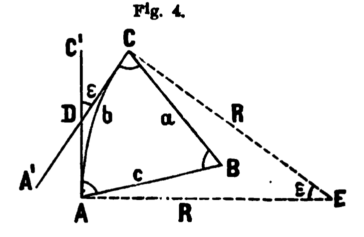
Eine geodätische Linie giebt in solcher kongruenter Abbildung eine Gerade von gleicher Grösse wie die Rektifikation der geodätischen Linie (vgl. § 89. S. 474).

Wenn von einem geschlossenen Linienzuge, auf dem Umdrehungs-Ellipsoid oder auf einer anderen krummen Fläche, in dieser Weise eine kongruente ebene Abbildung gemacht wird, so wird der abgebildete ebene Zug im allgemeinen *nicht schliessen*, und die dabei sich zeigenden Schlussfehler stehen in Beziehung zu der Krümmung der Fläche, auf welcher der geschlossene Linienzug liegt. Nur bei einer abwickelbaren Fläche wird die kongruente ebene Abbildung eines geschlossenen Zuges im allgemeinen wieder geschlossen sein.

Die Schlusswidersprüche werden, wie bei den durch Messungsfehler erzeugten Schlussfehlern der Feldmess-Züge, teils linear, teils als Winkel sich zeigen, und der in der Winkelsumme auftretende Schluss-Widerspruch soll „geodätischer Excess“ heissen.

In Fig. 4. seien AB und BC die kongruenten ebenen Abbildungen zweier Seiten eines geodätischen Dreiecks auf einer krummen Fläche, so dass die zwei Seiten AB, BC und der Winkel bei B kongruent abgebildet sind; will man aber die Abbildung auch für die dritte Seite CA fortsetzen, so bekommt man entweder CA' oder AC', welche beide das Dreieck ABC nicht schliessen, sondern sich in D schneiden und daselbst den geodätischen Excess ε zur Anschauung bringen. Man kann den Excess ε auch durch die Krümmung einer

Fig. 4.



Linie $A\,b\,C$ veranschaulichen, welche bei A und C die Geraden $A\,C'$ und $C\,A'$ berührt, denn die Gesamtkrümmung dieser Kurve $A\,b\,C$ ist eben jener Winkel ε und wenn die Kurve $A\,b\,C$ ein *Kreis*bogen ist, wie in Fig. 4. mit dem Mittelpunkt E, so erscheint der Excess ε auch als Centriwinkel dieses Bogens, und es besteht zwischen der Bogenlänge b, dem Halbmesser R und dem Excess ε die Gleichung $b = R\,\varepsilon$.

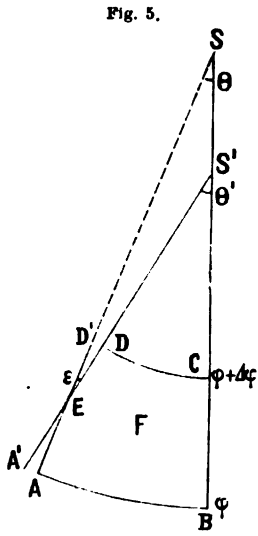
Die in den früheren §§ 80. und 81. betrachteten Kegelprojektionen geben ein gutes Beispiel für unseren Fall:

Ein Parallelkreisbogen des Umdrehungs-Ellipsoids giebt eine kongruente ebene Abbildung, welche sich durch Kegelabwicklung leicht darstellen lässt, wie aus Fig. 1. S. 428 mit den zugehörigen Gleichungen zu ersehen ist. In der Breite φ ist der Kegel-Halbmesser $= N \cot g\, \varphi$, und für den Längenunterschied l ist die Meridian-Konvergenz $= l \sin \varphi$; ein Parallelkreisbogen in der Breite φ mit dem Längenunterschied l giebt daher in kongruenter ebener Abbildung einen Kreisbogen vom Halbmesser $N \cot g\, \varphi$ mit dem Centriwinkel $l \sin \varphi$; die Bogenlänge wird also $= N \cot g\, \varphi\; l \sin \varphi$ $= N l \cos \varphi$, übereinstimmend mit der Länge des Parallelkreisbogens selbst.

Die Kegelabwicklung giebt eine geodätisch kongruente Abbildung des Parallelkreisbogens, nach Krümmung und Entfernung. Gleiches ist bei jeder abwickelbaren Fläche der Fall.

Im Anschluss hieran betrachten wir ein durch zwei Meridiane und zwei Parallelkreise begrenztes Trapez des Umdrehungs-Ellipsoids (oder einer anderen Umdrehungsfläche) und suchen den Excess des Vierecks zu bestimmen.

Fig. 5.



In Fig. 5. sei $A\,B\,C\,D$ die kongruente Linien-Abbildung von drei Seiten eines solchen Trapezes, $A\,B$ entspricht dem Parallelkreisbogen auf der Breite φ mit der Länge l, es ist daher in kongruenter Linien-Abbildung $A\,B$ ein Kreisbogen vom Halbmesser $A\,S = B\,S = N \cot g\, \varphi$ und dem Centriwinkel Θ als Meridian-Konvergenz $= l \sin \varphi$, also:

$$B\,S = N \cot g\, \varphi \qquad\qquad \Theta = l \sin \varphi \tag{11}$$

Eine Nachbarbreite sei $\varphi + d\,\varphi$, wobei $d\,\varphi$ als Differential genommen dasselbe sei, was in Fig. 5 mit $\Delta\,\varphi$ bezeichnet ist; dann giebt der Meridianbogen zwischen den Breiten φ und $\varphi + \Delta\,\varphi$ die kongruente geradlinige Abbildung:

$$B\,C = M\,d\,\varphi \tag{12}$$

Die dritte Seite $C\,D$ ist kongruente Abbildung des Parallelkreisbogens in der Breite $\varphi + d\,\varphi$, mit dem Längenunterschied l, d. h. es ist $C\,D$ ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt S' auf $B\,S$ und dessen Centriwinkel Θ' bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$C\,S' = N' \cot g\,(\varphi + d\,\varphi) \quad , \quad \Theta' = l \sin (\varphi + d\,\varphi) \tag{13}$$

Ebenso wie $B\,C$ auf dem Halbmesser $B\,S$, kann man auch $A\,D'$ auf $A\,S$ kongruent abbilden, oder $D\,A'$ auf dem Halbmesser $S'D$.

Man hat also einen nicht in sich selbst zurückkehrenden Linienzug $D'\,A\,B\,C\,D\,A'$, wobei $D'A$ und DA' als Abbildungen *desselben* Meridianbogens, beide in richtiger Länge, aber in verschiedenen Richtungen dargestellt sind, so dass der kleine Winkel ε, unter dem sie sich schneiden, den Winkelschlussfehler der Abbildung oder den geo-

dätischen Excess des Trapezes auf der krummen Fläche darstellt. Um diesen Winkel ε näher zu bestimmen, haben wir aus Fig. 5.:

$$\varepsilon = \Theta' - \Theta$$

oder wegen (13): $$\varepsilon = l\,(\sin(\varphi + d\,\varphi) - \sin\varphi) = l\cos\varphi\,d\,\varphi \tag{14}$$

Da der Parallelbogen $A\,B = N\,l\cos\varphi$ ist, kann für die Fläche des Trapezes nach (12) angegeben werden:

$$F = B\,C.A\,B \quad \text{also} \quad F = M\,N\,l\cos\varphi\,d\,\varphi \tag{15}$$

Mit Einführung des mittleren Krümmungs-Halbmessers r also mit $r^2 = M\,N$ hat man hieraus, mit (14):

$$l\cos\varphi\,d\,\varphi = \frac{F}{r^2} = \varepsilon \tag{16}$$

Der Längenunterschied l kann hiebei beliebig gross sein; zur weiteren Anwendung wollen wir aber auch l unendlich klein annehmen, und damit den Satz aussprechen, dass der Excess jedes unendlich kleinen Trapezes von der Form Fig. 5. sich nach der Formel (16) aus F und r^2 berechnen lässt. Endlich da jede andere unendlich kleine Fläche als zusammengesetzt aus unendlich kleinen Trapezen betrachtet werden darf, ist es nach dem Ergebnis unserer Betrachtung richtig, den Excess einer irgendwie begrenzten kleinen Fläche F des Umdrehungs-Ellipsoids, oder einer anderen Umdrehungsfläche nach der Formel (16) aus F und r^2 zu berechnen.

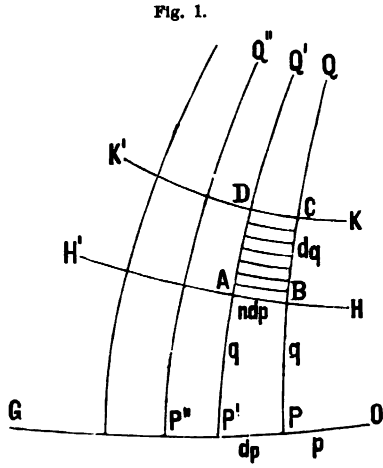
Wir haben also für den Excess eines Trapezes einer Umdrehungsfläche dieselbe Berechnung wie für den Excess eines kleinen geodätischen Dreiecks nach (10) S. 541, und wir können nun den weiteren Schluss bilden, dass für irgend einen durch kleine Dimensionen begrenzten Teil einer krummen Fläche, der geodätische Excess durch die Formel (10) oder (16) angegeben wird.

§ 108. Geodätische rechtwinklige Coordinaten und Polar-Coordinaten.

Ganz analog den Coordinaten-Systemen, welche wir in der Ebene mit geraden Linien und auf der Kugel mit grössten Kreisen benützen, kann man auch auf irgend einer Fläche mit geodätischen Linien Coordinaten-Systeme anordnen.

In Fig. 1. sei $O\,G$ eine geodätische Linie, auf welcher ein Punkt P durch das Mass $O\,P = p$ bestimmt ist, und ebenso auch andere Punkte P', P'' u. s. w. durch ihre auf der geodätischen Linie $O\,G$ gemessenen Abstände.

Fig. 1.





In den Punkten P, P', P'' u. s. w. werden geodätische Linien $P\,Q$, $P'\,Q'$, $P''\,Q''$ u. s. w. rechtwinklig zu $O\,G$ gezogen, und auf den Linien $P\,Q$ werden gleiche Masse q abgetragen, so dass eine geodätische Parallele $H\,H'$ entsteht, und eine zweite Parallele $K\,K'$ im Abstande $q + d\,q$ von der Anfangslinie $O\,G$.

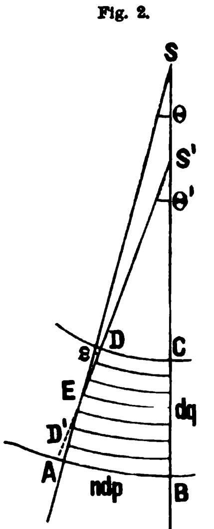
Solcher Linien der zwei Systeme $P\,Q$ und $H\,H'$ können wir ganze Scharen gezogen denken; dieselben schneiden sich gegenseitig rechtwinklig (geodätische Parallele § 70. S. 381) und bilden ein System von Vierecken, deren eines $A\,B\,C\,D$ in Fig. 1. besonders hervorgehoben ist.

Die ganze Anordnung der Linien in Fig. 1. können wir ein rechtwinkliges geo-

dätisches Coordinaten-System nennen, mit dem Nullpunkte O, von welchem die Abscissen p in der Richtung OG, und die Ordinaten q rechtwinklig zu OG gezählt werden. Es hat also der Punkt B die Coordinaten p, q, der Punkt C hat $p, q + dq$, der Punkt A hat $p + dp, q$ u. s. w.

Der Abscissen-Unterschied PP' ist $= dp$ angenommen, und das entsprechende Mass BA haben wir mit $n\,dp$ bezeichnet, wobei n eine von der Krümmung der Fläche abhängige Funktion ist, mit welcher wir uns später besonders zu beschäftigen haben werden (§ 109. S. 546).

Fig. 2.



Nachdem somit alle Verhältnisse des Vierecks klar gemacht sind, betrachten wir in Fig. 2. die kongruente ebene Abbildung des Linienzuges $ABCD$ in dem Sinne von § 107.

Der Linienzug $ABCDA$ wird in der kongruenten Abbildung nicht schliessen, sondern einen Winkelschluss-Fehler $\varepsilon = \Theta' - \Theta$ geben, den wir nun näher zu bestimmen haben.

Der Winkel Θ kann mit den Bezeichnungen von Fig. 2. dargestellt werden (auch bei windschiefem Viereck) in der Form:

$$\Theta = -\frac{d(n\,dp)}{dq} \tag{1}$$

Dabei soll Θ selbst als positiv gelten, und die Ableitung von $n\,dp$ nach q muss negativ gesetzt werden, wenn $n\,dp$ abnimmt bei wachsendem q, wie in Fig. 2. angenommen ist.

Der kleine Winkel $\varepsilon = \Theta' - \Theta$ kann als Differential von Θ aufgefasst werden, d. h.:

$$\varepsilon = d\,\Theta = -\frac{d^2(n\,dp)}{dq^2}\,dq \tag{2}$$

Betrachtet man ferner die Fläche F des Vierecks, d. h. $F = n\,dp\,dq$, so hat man nach dem Schlusssatz von § 107. Seite 543:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2} = \frac{n\,dp\,dq}{r^2} \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt:

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{n}\,\frac{1}{dp}\,\frac{d^2(n\,dp)}{dq^2} \tag{4}$$

Bei dieser Betrachtung gilt aber in der zweiten Ableitung von $n\,dp$ nach q der Faktor dp als konstant (vgl. $PP' = dp$ in Fig. 1.), es wird also:

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{n}\,\frac{d^2 n}{dq^2} \tag{5}$$

Man kann diese wichtige Gleichung (5) bezw. (4) auch dadurch aus Fig. 2 ableiten, dass man eine Kurve AD betrachtet, welche AS und $D'S'$ berührt, also in ihrer Krümmung den Winkel ε giebt. Der Krümmungs-Halbmesser der Kurve AD kann als Reciproke von $\dfrac{d^2(n\,dp)}{dq^2}$ genommen werden, und damit kommt man ebenfalls auf die Formel (2) und dann auf (5).

Die grosse Wichtigkeit, welche die Differential-Formel (5) für die Geodäsie besitzt, beruht darin, dass dadurch eine Beziehung hergestellt wird zwischen geodätisch zugänglichen Massen $n\,dp$, dq u. s. w. einerseits, und dem geodätisch unzugänglichen

Krümmungs-Halbmesser r andererseits. Legt man das Messungs-System Fig. 1. in einer Ebene an, so wird das Viereck $A\,B\,C\,D$ ein Rechteck mit $B\,A = C\,D = P\,P'$; und auf einer krummen Fläche gestatten die geodätisch messbaren Verkürzungen von $B\,A$ und $C\,D$ gegen $P\,P'$, nach dem Gesetz der Formel (5) einen Schluss auf die Krümmung der Fläche.

Polar-Coordinaten.

In ähnlicher Weise, wie ein System rechtwinkliger Coordinaten in Fig. 1. gebildet wurde, kann man auch ein System von Polar-Coordinaten mit geodätischen Linien anordnen.

Man braucht nur anzunehmen, dass in Fig. 1. die geodätischen Linien $P\,Q$, $P'Q'$, $P''Q'$ u. s. w., welche alle von einer Abscissenlinie $O\,P$ ausgehen, statt dessen alle von einem Punkte (in der Verlängerung von Q) ausgehen, oder alle nach einem Punkte zusammenlaufen, und dass dann die Linien $H\,H'$, $K\,K'$, nicht mehr geodätische Parallelen, sondern geodätische Kreise um jenen Punkt seien; dann kann man alles, was sich auf Fig. 1. bezieht, auch auf das beschriebene Polar-System übertragen.

Das Krümmungsmass.

Als „mittleren Krümmungs-Halbmesser" r in einem Punkte einer krummen Fläche haben wir das geometrische Mittel der beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser N und M bezeichnet, also $r = \sqrt{M\,N}$ oder $r^2 = M\,N$ gesetzt.

Der reciproke Wert von r^2 wird nach Gauss das „Krümmungsmass" (mensura curvaturae) genannt, d. h. es ist:

$$\text{Krümmungsmass } k = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{M\,N} \tag{6}$$

und mit dieser neuen Bezeichnung schreiben wir die wichtige Gleichung (5) nochmals, d. h.:

$$k = \frac{1}{r^2} = -\frac{1}{n}\,\frac{d^2 n}{d\,q^2} \tag{7}$$

Gleichzeitig damit ist der Begriff und die Bezeichnung Gesamtkrümmung (curvatura totalis seu integra) eines begrenzten Flächenteils eingeführt worden, nämlich:

$$\text{Gesamtkrümmung} = \int k\,d\,F \tag{8}$$

Das Produkt eines differentialen Flächenteiles $d\,F$ in das für einen einzelnen Punkt von $d\,F$ giltige und im Bereiche von $d\,F$ als konstant zu betrachtende Krümmungsmass k giebt die Gesamtkrümmung des Flächenteils $d\,F$, und das bei (8) angegebene Integral giebt die Gesamtkrümmung des Flächenteils F.

Diese Begriffe und Benennungen hängen damit zusammen, dass die Gesamtkrümmung eines Flächenteils F gemessen werden kann durch einen entsprechenden Teil F' einer Kugel vom Halbmesser $= 1$, indem alle Flächen-Normalen der Begrenzungs-Linie von F mit sich selbst parallel in den Kugelmittelpunkt verlegt werden, und so den Teil F' der Kugel begrenzen, welcher gewissermassen ein Abbild des Flächenteils F wird.

Sobald man sich überzeugt hat, dass für einen unendlich kleinen krummen Flächenteil $d\,F$ der durch kongruente Umfangs-Abbildung (§ 107.) darzustellende geodätische Excess $d\,\varepsilon = k\,d\,F$ ist (wo $k = 1 : r^2$), so kann man auch nach geometrischer Anschauung so weiterschliessen:



Die Fläche F wird in eine grosse Zahl kleiner Teilflächen dF zerlegt, welche alle ihrem Umfang nach in einer Ebene geschlossen, folglich nicht kongruent, abgebildet werden. Bei einem ersten Teil dF_1 wird in der Abbildung der Schluss erzwungen durch eine lineare relative Krümmung $d\varepsilon_1$, welche irgendwo an dem Umfang von dF_1 angebracht werden muss. Ein an dieser Stelle ansetzender zweiter Flächenteil dF_2 muss dann, wenn er in der Ebene geschlossen dargestellt werden soll, nicht bloss seinen eigenen Excess $d\varepsilon_2$, sondern auch den von dF_1 ihm zugeschobenen Betrag $d\varepsilon_1$, durch eine der konformen Abbildung widersprechende lineare Krümmung $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2$ zum Ausdruck bringen. So wird das ebene Kartenbild $\int dF'$, wenn es die einzelnen Teile dF' sämtlich geschlossen darstellt, an seinem Umfange allmählich alle Beträge $d\varepsilon$ in Gestalt von linearen Krümmungen, die der kongruenten Abbildung des Umfangs widerstreiten, zum Ausdruck bringen, und der Polygon-Schlussfehler ε des kongruent abgebildet gedachten Umfangs wird daher der Summe aller Einzel-Excesse der Flächenteile gleich sein, d. h.:

$$\varepsilon = \int k\, dF \tag{9}$$

Dieses ist mit (8) übereinstimmend.

Bei einer abwickelbaren Fläche ist in jedem Punkte der eine Haupt-Krümmungs-Halbmesser unendlich, der andere endlich, setzen wir also $N = \infty$, $M = M$, so wird auch $r^2 = \infty$ und $k = 0$, folglich auch die Gesamtkrümmung nach (8) und der Excess ε nach (9), beide = Null.

§ 109. Verbindung eines rechtwinkligen Systems und eines Polar-Systems.

In Fig. 1. S. 547 ist O der Ausgangspunkt zweier geodätischer Coordinaten-Systeme, eines rechtwinkligen Systems und eines Polar-Systems, so dass z. B. der Punkt A die rechtwinkligen Coordinaten p, q und die Polar-Coordinaten s, α hat. Entsprechend hat der Punkt B die rechtwinkligen Coordinaten $p + dp$, $q + dq$ und die Polar-Coordinaten $s + ds$, $\alpha + d\alpha$.

Ausser dem Richtungswinkel α des Polar-Systems ist der Winkel β eingeführt, welchen der Strahl s und die Ordinate q bei A miteinander bilden.

Zwischen beiden Ordinaten q und $q + dq$ bei A sei der Querabstand $AD = n\,dp$ und entsprechend $AC = m\,d\alpha$ der Querabstand bei A zwischen den beiden Strahlen OA und OB.

Dabei sind n und m Funktionen von ähnlicher Bedeutung wie n im vorigen § 108. bei (1)—(5) S. 544. Zur Verdeutlichung dieser Funktionen n und m mag man sich etwa den Fall denken, dass das ganze System auf einer Kugel vom Halbmesser r läge, dann wäre sehr einfach:

$$\left.\begin{array}{ll} n = \cos\dfrac{q}{r} & m = \sin\dfrac{s}{r} \\ \text{oder entwickelt: } n = 1 - \dfrac{q^2}{2r^2} + \ldots & m = \dfrac{s}{r} - \dfrac{s}{6r^3} + \ldots \end{array}\right\} \text{(Kugel)} \tag{1}$$

Zur Untersuchung des allgemeinen Falles irgend einer krummen Fläche, auf welcher das System Fig. 1. S. 547 liege, betrachten wir zuerst das kleine Viereck $ACBD$, welches bei C und D rechtwinklig ist. Indem wir in differentialem Sinne



dieses Viereck als eben behandeln, entnehmen wir aus demselben durch Coordinaten-Umformung die Gleichungen:

$$d\,s = n\,d\,p\,sin\,\beta + d\,q\,cos\,\beta \qquad (2)$$

$$m\,d\,\alpha = d\,q\,sin\,\beta - n\,d\,p\,cos\,\beta \qquad (3)$$

oder in Gestalt von Differential-Gleichungen:

$$\frac{\partial s}{\partial p} = n\,sin\,\beta \qquad \frac{\partial s}{\partial q} = cos\,\beta \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial p} = -\frac{n}{m}\,cos\,\beta \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial q} = \frac{1}{m}\,sin\,\beta \qquad (5)$$

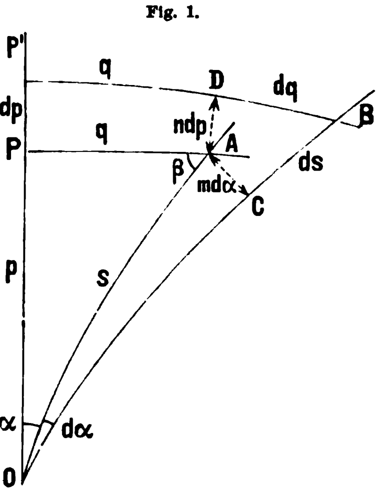
Aus den beiden Gleichungen (4) folgt durch Quadrieren:

$$n^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)^2 + n^2\left(\frac{\partial s}{\partial q}\right)^2 \qquad (6)$$

ferner aus (4) und (5) durch Multiplizieren:

$$\frac{\partial s}{\partial p}\,\frac{\partial \alpha}{\partial p} = -n^2\,\frac{\partial s}{\partial q}\,\frac{\partial \alpha}{\partial q} \qquad (7)$$

Nun muss die Funktion n entsprechend der Flächen-Krümmung eingeführt werden.



Um die Beziehung von n zu der Flächen-Krümmung zunächst unbestimmt zu halten, wird n als algebraische Funktion mit unbestimmten Coëfficienten $f, g, h \ldots$ eingeführt:

$$n = 1 + f\,q^2 + g\,q^3 + h\,q^4 + \ldots \qquad (8)$$

Dabei ist kein Glied mit der ersten Potenz q angenommen, weil nach (1) die Bedeutung von n so ist, dass auf einer Kugel kein Glied mit q vorkommt, und weil dasselbe auch bei dem Ellipsoid und allen Flächen von stetiger konvex-konvexer Krümmung der Fall ist, oder allgemeiner, weil dem rechtwinkligen Abgehen der Ordinaten q von der Abscissenaxe $O\,P$ in Fig. 1., die erste Ableitung $\frac{d\,n}{d\,q}$ für $q = 0$, selbst $= 0$ entsprechen muss.

Durch die Gleichung (8) ist n nur als Funktion von q dargestellt; um n auch als Funktion von p zu erhalten, muss man die Coëfficienten f, g, h u. s. w. von (8) selbst wieder als Funktionen von p darstellen, dieses geschehe durch die Annahmen:

$$\left.\begin{aligned} f &= f_0 + f_1\,p + f_2\,p^2 + \ldots \\ g &= g_0 + g_1\,p + g_2\,p^2 + \ldots \\ h &= h_0 + h_1\,p + h_2\,p^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Wenn man diese Ausdrücke (9) in (8) einsetzt, und dabei nur die Glieder bis zur vierten Potenz einschliesslich beibehält, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} n = 1 + f_0\,q^2 + f_1\,p\,q^2 &+ f_2\,p^2\,q^2 + \ldots \\ + g_0\,q^3 &+ g_1\,p\,q^3 + \ldots \\ &+ h_0\,q^4 + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Wenn man dieses zweimal partiell nach q ableitet, und dann wieder die Bedeutung der Coëfficienten (9) berücksichtigt, oder wenn man unmittelbar (8) nach q zweimal ableitet, so bekommt man:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial\,q^2} = 2\,f + 6\,g\,q + 12\,h\,q^2 \qquad (11)$$

Durch diese Annahmen für die Funktion n ist die krumme Fläche, auf welcher das Coordinaten-System Fig. 1. liegt, soweit charakterisiert, als für die nachfolgenden geodätischen Aufgaben nötig ist; für die analoge Funktion m dürfen nicht etwa ebenfalls unabhängige Annahmen gemacht werden, weil m bereits mit n durch die erste Gleichung (5) verbunden ist.

Nun kann man den Ausdruck für das Krümmungsmass nach (5) und (7) § 108. S. 545 anwenden, und wenn man (8) und (11) hier einsetzt, so bekommt man:

$$-k = \frac{1}{n}\frac{d^2 n}{d\,q^2} = \frac{2\,f + 6\,g\,q + 12\,h\,q^2}{1 + f\,q^2 + g\,q^3 + h\,q^4}$$

oder bis zur zweiten Potenz einschliesslich genau:

$$-k = 2\,(f + 3\,g\,q + 6\,h\,q^2)\,(1 - f\,q^2) = 2\,(f + 3\,g\,q + (6\,h - f^2)\,q^2) \tag{12}$$

Wenn man hier wieder die Coëfficienten (9) einsetzt, so bekommt man bis zur zweiten Ordnung einschliesslich:

$$\left.\begin{aligned} k = &-2\,f_0 - 2\,f_1\,p - 6\,g_0\,q \\ &-2\,f_2\,p^2 - 6\,g_1\,p\,q - (12\,h_0 - 2\,f_0^2)\,q^2 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Wir werden nun aber k auf eine lineare Funktion beschränken, d. h. wir werden setzen:

$$k = -2\,f_0 - 2\,f_1\,p - 6\,g_0\,q \tag{14}$$

Diese Annahme (14) schliesst in sich, dass in (13) ist:

$$f_2 = 0 \quad , \quad g_1 = 0 \quad , \quad 12\,h_0 = 2\,f_0^2 \text{ oder } h_0 = \frac{1}{6}\,f_0^2 \tag{15}$$

Damit reduziert sich auch das frühere n von (10) auf:

$$n = 1 + f_0\,q^2 + f_1\,p\,q^2 + g_0\,q^3 + \frac{1}{6}\,f_0^2\,q^4 \tag{16}$$

Im Folgenden braucht man mehrfach auch $\frac{1}{n}$, weshalb man nach S. 169 die Reciproke entwickelt:

$$\frac{1}{n} = 1 - f_0\,q^2 - f_1\,p\,q^2 - g_0\,q^3 + \frac{5}{6}\,f_0^2\,q^4 \tag{17}$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir zur Theorie des geodätischen Dreiecks übergehen.

§ 110. Reihen-Entwicklung für das rechtwinklige geodätische Dreieck.

Wir haben von (6) § 109. S. 547:

$$n^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)^2 + n^2\left(\frac{\partial s}{\partial q}\right)^2 \tag{1}$$

Um hier statt der Ableitungen von s nach p und nach q die entsprechenden Ableitungen von s^2 einzuführen, hat man:

$$\frac{\partial\,(s^2)}{\partial\,p} = \frac{\partial\,(s^2)}{\partial\,s}\,\frac{\partial\,s}{\partial\,p} = 2\,s\,\frac{\partial\,s}{\partial\,p} \text{ und } \frac{\partial\,(s^2)}{\partial\,q} = 2\,s\,\frac{\partial\,s}{\partial\,q} \tag{1a}$$

also:

$$n^2 = \left(\frac{1}{2\,s}\,\frac{\partial\,(s^2)}{\partial\,p}\right)^2 + n^2\left(\frac{1}{2\,s}\,\frac{\partial\,(s^2)}{\partial\,q}\right)^2$$

oder:

$$4\,s^2 = \left(\frac{1}{n}\,\frac{\partial\,(s^2)}{\partial\,p}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,(s^2)}{\partial\,q}\right)^2 \tag{2}$$

Denkt man sich s^2 in eine Reihe nach Potenzen von p und q entwickelt, so wird diese Reihe mit den Gliedern $p^2 + q^2$ beginnen, weil für unendlich kleine Werte p und q die Fig. 1. S. 550 auf ein ebenes rechtwinkliges Dreieck zusammenschrumpft. Wir wollen daher die Reihe für s^2 zunächst in folgender Form annehmen:

$$s^2 = p^2 + q^2 + A\,p^2 q + B\,p\,q^2 \tag{3}$$

wobei A und B vorläufig unbestimmt angenommene Coëfficienten sind, welche durch Vergleichung mit (2) bestimmt werden müssen. Man hat zunächst aus (3):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial (s^2)}{\partial p} &= 2\,p + 2\,A\,p\,q + B\,q^2 + \ldots \\ \text{hiezu von (17) § 109. S. 548:}\quad \frac{1}{n} &= 1 - f_0\,q^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ferner aus (3):

$$\frac{\partial (s^2)}{\partial q} = 2\,q + A\,p^2 + 2\,B\,p\,q + \ldots \tag{5}$$

Aus (4) und (5) kann man den Ausdruck (2) zusammensetzen; man erhält bis zur dritten Potenz:

aus (2): $\quad 4\,s^2 = 4\,p^2 + 4\,q^2 + 12\,A\,p^2 q + 12\,B\,p\,q^2$

andererseits aus (3): $\quad 4\,s^2 = 4\,p^2 + 4\,q^2 + 4\,A\,p^2 q + 4\,B\,p\,q^2$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt als Coëfficienten-Vergleichung $12\,A = 4\,A$ und $12\,B = 4\,B$, d. h. $A = 0$ und $B = 0$.

Man findet also, dass in der Reihe (3) nur die zwei ersten Glieder bestehen, und dass die Glieder mit dritten Potenzen $p^2 q$ und $p\,q^2$ verschwinden. Wir machen deshalb nun eine Annahme mit Gliedern vierter Ordnung, d. h. statt (3) sei nun:

$$s^2 = p^2 + q^2 + A\,p^3 q + B\,p^2 q^2 + A'\,p\,q^3 \tag{6}$$

Dieses giebt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial (s^2)}{\partial p} &= 2\,p + 3\,A\,p^2 q + 2\,B\,p\,q^2 + A'\,q^3 \\ \text{hiezu von (17) § 109. S. 548:}\quad \frac{1}{n} &= 1 - f_0\,q^2 - \ldots \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Ferner aus (6):

$$\frac{\partial (s^2)}{\partial q} = 2\,q + A\,p^3 + 2\,B\,p^2 q + 3\,A'\,p\,q^2 \tag{8}$$

Wenn man aus (7) und (8) die Formel (2) zusammensetzt, so findet man:

aus (2): $\quad 4\,s^2 = 4\,p^2 + 4\,q^2 + 16\,A\,p^3 q + 8\,(2\,B - f_0)\,p^2 q^2 + 16\,A'\,p\,q^3$

andererseits aus (6): $\quad 4\,s^2 = 4\,p^2 + 4\,q^2 + 4\,A\,p^3 q + 4\,B\,p^2 q^2 + 4\,A'\,p\,q^3$

Die Coëfficienten-Vergleichung in diesen beiden Gleichungen giebt:

$$16\,A = 4\,A \qquad 16\,B - 8\,f_0 = 4\,B \qquad 16\,A' = 4\,A'$$

d. h.: $\quad A = 0 \qquad B = \dfrac{2}{3} f_0 \qquad A' = 0$

Folglich nun nach (6):

$$s^2 = p^2 + q^2 + \frac{2}{3} f_0\,p^2 q^2 \tag{9}$$

Auf diesem Wege eine Stufe weiter gehend, erhält man bis zur fünften Ordnung:

$$s^2 = p^2 + q^2 + \frac{2}{3} f_0\,p^2 q^2 + \frac{1}{2} f_1\,p^3 q^2 + \frac{1}{2} g_0\,p^2 q^3 \tag{10}$$

Um zur sechsten Ordnung zu gelangen, fügen wir zu (10) noch folgende unbestimmte Glieder hinzu (wobei A, B, C wieder *neue* Bedeutungen haben):

$$+ A p^6 + B p^5 q + C p^4 q^2 + D p^3 q^3 + C' p^2 q^4 + B' p q^5 + A' q^6 \qquad (10\,a)$$

Wenn man damit den Ausdruck (2) bildet, so erhält man:

$$\begin{aligned} 4 s^2 = 4 p^2 + 4 q^2 &+ \frac{8}{3} f_0 p^2 q^2 + 2 f_1 p^3 q^2 + 2 g_0 p^2 q^3 \\ &+ 24 A p^6 + 24 B p^5 q + \left(24 C + \frac{16}{9} f_0^2\right) p^4 q^2 + 24 D p^3 q^3 \\ &+ 24 A' q^6 + 24 B' p q^5 + \left(24 C' + \frac{16}{9} f_0^2\right) p^2 q^4 \end{aligned}$$

Wenn man dieses, in Hinsicht auf die Coëfficienten, mit (10) und (10 a) vergleicht, so sieht man, dass A, B, D, B' A' sämtlich $= 0$ werden, und es wird:

$$C = C' = -\frac{4}{45} f_0^2$$

Damit giebt die bis zur sechsten Ordnung vervollständigte Reihe (10) und (10 a):

$$s^2 = p^2 + q^2 + \frac{1}{6}(4 f_0 p^2 q^2 + 3 f_1 p^3 q^2 + 3 g_0 p^2 q^3) - \frac{4}{45} f_0^2 (p^4 q^2 + p^2 q^4) \quad (11)$$

Dabei ist für lineare Funktion k, nach (15) § 110. S. 548, $f_2 = 0$, $g_1 = 0$ und $h_0 = \frac{1}{6} f_0^2$ gesetzt. (Wenn man diese beschränkenden Annahmen für f_2, g_1 und h_0 nicht macht, bekommt man statt der vorstehenden (11) die allgemeinere Formel [1] von Art. 24. der „Disquisitiones generales etc.).

Einführung des Krümmungsmasses.

Der allgemeine lineare Ausdruck für das Krümmungsmass ist nach (14) § 109. S. 548:

$$k = -2 f_0 - 2 f_1 p - 6 g_0 q \qquad (12)$$

Wenden wir diese Funktion auf unseren Fall nach Andeutung von Fig. 1. an, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} k_\alpha &= -2 f_0 \\ k_{90} &= -2 f_0 - 2 f_1 p \\ k_\beta &= -2 f_0 - 2 f_1 p - 6 g_0 q \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

$$k_\alpha + 2 k_{90} + 2 k_\beta = -(8 f_0 + 6 f_1 p + 6 f_0 q)$$

Fig. 1.

Dieses ist gerade der Ausdruck, welcher in der grossen Klammer von (11) vorkommt, und wenn wir zugleich in der letzten Klammer von (11) statt $4 f_0^2$ den Wert k_α^2 aus (13) setzen, oder weil es in dem letzten Gliede einer konvergierenden Reihe ist, kurzweg k statt k_α, so geht (11) über in:

$$s^2 = p^2 + q^2 - \frac{k_\alpha + 2 k_{90} + k_\beta}{12} p^2 q^2 - \frac{k^2}{45} p^2 q^2 (p^2 + q^2) \qquad (14)$$

Reihen-Entwicklungen für $s \sin \alpha$ und $s \cos \alpha$.

Von den allgemeinen Differential-Formeln des § 109. haben wir (4) S. 547:

$$n \sin \beta = \frac{\partial s}{\partial p} \quad \text{und} \quad \cos \beta = \frac{\partial s}{\partial q}$$



oder mit Einführung der Veränderlichen s^2, wie oben bei (1 a):

$$n \sin\beta = \frac{1}{2s}\frac{\partial(s^2)}{\partial p} \qquad \cos\beta = \frac{1}{2s}\frac{\partial(s^2)}{\partial q}$$

$$2s\sin\beta = \frac{1}{n}\frac{\partial(s^2)}{\partial p} \qquad 2s\cos\beta = \frac{\partial(s^2)}{\partial q} \tag{15}$$

Nun ist s^2 nach (11) bestimmt worden, woraus man durch Differentiieren findet:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial(s^2)}{\partial p} = 2p + \frac{4}{3}f_0 p q^2 + \frac{3}{2}f_1 p^2 q^2 + g_0 p q^3 - \frac{16}{45}f_0^2 p^3 q^2 - \frac{8}{45}f_0^2 p q^4\\ &\text{hiezu (17) S. 548:}\quad \frac{1}{n} = 1 - f_0 q^2 - f_1 p q^2 - g_0 q^3 + \frac{5}{6}f_0^2 q^4\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Ferner die Ableitung nach q von (11):

$$\frac{\partial(s^2)}{\partial p} = 2q + \frac{4}{3}f_0 p^2 q + f_1 p^3 q + \frac{3}{2}g_0 p^2 q^2 - \frac{8}{45}f_0^2 p^4 q - \frac{16}{45}f_0^2 p^2 q^3 \tag{17}$$

Die beiden Gleichungen (15) lassen sich nach (16) und (17) ausführen, und geben:

$$s\sin\beta = p - \frac{1}{3}f_0 p q^2 - \frac{1}{4}f_1 p^2 q^2 - \frac{1}{2}g_0 p q^3 - \frac{8}{45}f_0^2 p^3 q^2 + \frac{7}{90}f_0^2 p q^4 \tag{18}$$

$$s\cos\beta = q + \frac{2}{3}f_0 p^2 q + \frac{1}{2}f_1 p^3 q + \frac{3}{4}g_0 p^2 q^2 - \frac{4}{45}f_0^2 p^4 q - \frac{8}{45}f_0^2 p^2 q^3 \tag{19}$$

Wenn man wieder die Krümmungsmasse nach (13) einführt, so bringt man (18) und (19) auf diese Formen:

$$s\sin\beta = p + \frac{k_\alpha + k_{90} + 2k_\beta}{4}\,\frac{p q^2}{6} - \frac{k^2}{360}p q^2(16p^2 - 7q^2) \tag{20}$$

$$s\cos\beta = q - \frac{2k_\alpha + 3k_{90} + 3k_\beta}{8}\,\frac{p^2 q}{3} - \frac{k^2}{45}p^2 q(p^2 + 2q^2) \tag{21}$$

Diese Gleichungen gelten natürlich auch für den anderen Winkel α, und geben mit entsprechender Vertauschung der p, q und der k:

$$s\sin\alpha = q + \frac{k_\beta + k_{90} + 2k_\alpha}{4}\,\frac{p^2 q}{6} - \frac{k^2}{360}p^2 q(16q^2 - 7p^2) \tag{22}$$

$$s\cos\alpha = p - \frac{2k_\beta + 3k_{90} + 3k_\alpha}{8}\,\frac{p q^2}{3} - \frac{k^2}{45}p q^2(q^2 + 2p^2) \tag{23}$$

Zur Probe kann man auch rechnen:

$$(s\sin\beta)^2 + (s\cos\beta)^2 = s^2 \quad \text{oder} \quad (s\sin\alpha)^2 + (s\cos\alpha)^2 = s^2$$

Man wird dadurch denselben Ausdruck für s^2 finden, wie schon bei (14).

Man kann die Reihen (20)—(23) auch umkehren (ähnlich wie in § 44. S. 246 bis 247 die Reihen für $s\sin\alpha$ und $s\cos\alpha$ umgekehrt wurden). Man findet:

$$p = s\cos\alpha + \frac{s^3}{3}\sin^2\alpha\cos\alpha\,\frac{3k_\alpha + 3k_{90} + 2k_\beta}{8} + \frac{k^2}{15}p q^2(-p^2 + 2q^2) \tag{24}$$

$$q = s\sin\alpha - \frac{s^3}{6}\sin\alpha\cos^2\alpha\,\frac{2k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{4} + \frac{k^2}{120}p^2 q(p^2 - 8q^2) \tag{25}$$

Dabei ist im letzten Glied $p = s\cos\alpha$ und $q = s\sin\alpha$ genommen.

Ausserdem kann man durch Zeichenvertauschung auch folgende Formeln bilden:

$$p = s\sin\beta - \frac{s^3}{6}\sin\beta\cos^2\beta\,\frac{k_\alpha + k_{90} + 2k_\beta}{4} + \frac{k^2}{120}p q^2(q^2 - 8p^2) \tag{26}$$

$$q = s\cos\beta + \frac{s^3}{3}\sin^2\beta\cos\beta\,\frac{2k_\alpha + 3k_{90} + 3k_\beta}{8} + \frac{k^2}{15}p^2 q(2p^2 - q^2) \tag{27}$$

Geodätischer Excess des rechtwinkligen Dreiecks.

Nach Fig. 1. S. 550 ist:

$$\varepsilon = (\alpha + \beta + 90°) - 180° = \alpha + \beta - 90° \tag{28}$$

$$\sin \varepsilon = -\cos(\alpha + \beta) = \sin\alpha \sin\beta - \cos\alpha\cos\beta \tag{29}$$

Da wir die Reihen für $s \sin\alpha$, $s \sin\beta$, sowie $s\cos\alpha$, $s\cos\beta$ in (20)—(23) haben, können wir die zwei zu (29) erforderlichen Produkte bilden, nämlich:

$$\begin{aligned} s^2 \sin\alpha \sin\beta = p\,q &+ \frac{p^3 q}{6}\,\frac{2\,k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{4} + \frac{k^2}{360} p^3 q\,(7\,p^2 - 16\,q^2) \\ &+ \frac{p q^3}{6}\,\frac{k_\alpha + k_{90} + 2\,k_\beta}{4} + \frac{k^2}{36} p^3 q^3 \\ &+ \frac{k^2}{360} p\,q^3\,(-16\,p^2 + 7\,q^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^2 \cos\alpha\cos\beta = p\,q &- \frac{p q^3}{3}\,\frac{3k_\alpha + 3k_{90} + 2k_\beta}{8} - \frac{k^2}{360} p\,q^3 (16\,p^2 + 8\,q^2) \\ &- \frac{p^3 q}{3}\,\frac{2k_\alpha + 3k_{90} + 3\,k_\beta}{8} + \frac{k^2}{9} p^3 q^3 \\ &- \frac{k^2}{360} p^3 q\,(8\,p^2 + 16\,q^2) \end{aligned}$$

Wenn man diese beiden Ausdrücke von einander abzieht, und wenn man dabei die gleichartigen Glieder zusammen ordnet, so erhält man:

$$s^2 \sin\varepsilon = \frac{p\,q}{2}\,\frac{k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{3}(p^2 + q^2) + \frac{15}{360} k^2 p\,q\,(p^2 - q^2)^2 \tag{30}$$

Hiezu hat man von (14):

$$\frac{p^2 + q^2}{s^2} = 1 + \frac{k_\alpha + 2\,k_{90} + k_\beta}{12\,s^2} p^2 q^2 + k^2 \ldots$$

Wenn man dieses in (30) einsetzt und in den Gliedern mit k^2 die einzelnen k_α, k_β, k_{90} nicht mehr unterscheidet (wie auch bei früheren Formeln in gleichem Falle nicht unterschieden wurde) und wenn man die Glieder von der Ordnung k^3 (ebenfalls wie bisher) ganz vernachlässigt, so erhält man aus (30):

$$\varepsilon = \frac{p\,q}{2}\,\frac{k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{3} + \frac{p\,q}{24} k^2 (p^2 + q^2) \tag{31}$$

Diese Formel, welche mit $\frac{k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{3} = \frac{1}{r^2}$ in die frühere sphärische Formel (3) S. 246 übergeht, sagt in Worten, dass man den geodätischen Excess eines rechtwinkligen geodätischen Dreiecks erhält, wenn man das Dreieck wie ein sphärisches Dreieck berechnet, dessen Kugelhalbmesser r dem arithmetischen Mittel der Krümmungsmasse k_α, k_{90}, k_β in den drei Ecken des Dreiecks entspricht.

Dieser Satz lässt sich auch leicht auf ein beliebiges schiefwinkliges Dreieck ausdehnen, wie wir alsbald im nächsten § 111. sehen werden.

§ 111. Berechnung des allgemeinen (schiefwinkligen) geodätischen Dreiecks.

Mit den Reihen-Entwicklungen für das rechtwinklige geodätische Dreieck, welche wir in dem vorstehenden § 110. kennen gelernt haben, kann man durch Zusammensetzung zweier rechtwinkliger Dreiecke zu einem allgemeinen (schiefwinkligen) Dreieck auch die trigonometrische Berechnung solcher allgemeiner geodätischer Dreiecke zu stande bringen.



Wir werden dabei in gleicher Weise vorgehen, wie früher in § 44., wo wir mit Fig. 4. S. 248 aus den Formeln für zwei rechtwinklige sphärische Dreiecke den erweiterten Legendreschen Satz hergeleitet haben. Ebenso werden wir nun die Formeln behandeln, durch welche Gauss im Jahre 1827 in Art. 25. der „Disquisitiones generales circa superficies curvas" den bedeutenden Schritt von Legendres Kugel-Satze zur Trigonometrie auf irgend einer krummen Fläche gemacht hat.

Indem wir im wesentlichen die früheren Bezeichnungen beibehalten, bilden wir in Fig. 1. ein geodätisches Dreieck mit den Seiten b, c und $a = q + q'$, indem eine Senkrechte p das Dreieck b, c, a in zwei rechtwinklige Dreiecke p, q, sowie p, q' zerlegt.

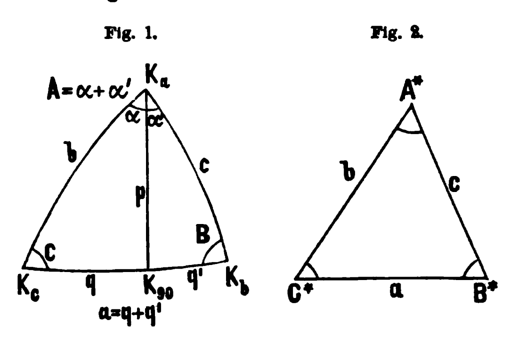


Fig. 1. Fig. 2.

Sind s_1 und s_2 die geodätischen Excesse der beiden rechtwinkligen Teildreiecke, so ist nach (31) des vorigen § 110. S. 352:

$$s_1 = \frac{p\,q}{2}\,\frac{k_a + k_{90} + k_c}{3} + k^2 \ldots \tag{1}$$

$$s_2 = \frac{p\,q'}{2}\,\frac{k_a + k_{90} + k_b}{3} + k^2 \ldots \tag{2}$$

Indem wir zunächst die Glieder von der Ordnung k^2 bei Seite lassen, können wir uns leicht überzeugen, dass der Excess $s_1 + s_2 = s$ des ganzen Dreiecks in erster Näherung (d. h. vorbehältlich der Glieder mit k^2) so berechnet wird:

$$s_1 + s_2 = s = \frac{p\,(q + q')}{2}\,\frac{k_a + k_b + k_c}{3} \tag{3}$$

Um die Übereinstimmung dieser Formel (3) mit der Summe von (1) und (2) nachzuweisen, braucht man nur die der ganzen Theorie zu Grunde liegende Annahme einzuführen, dass das Krümmungsmass k eine lineare Funktion der Coordinaten auf der Fläche sein, also auf der Linie $a = q + q'$ sich proportional den Strecken q und q' ändern soll, d. h. es muss sein:

$$k_{90} = k_c + \frac{q}{q + q'}\,(k_b - k_c) \quad \text{oder} \quad k_{90}\,(q - q') = k_c\,q' + k_b\,q \tag{4}$$

und damit geht die Summe von (1) und (2) in (3) über. Man kann also nun die Gleichung (3) so schreiben:

$$s = \frac{a\,p}{2}\,\frac{k_a + k_b + k_c}{3} + k^2 \ldots \quad \text{oder} \quad s = \triangle\,\frac{k_a + k_b + k_c}{3} + k^2 \ldots \tag{5}$$

Dabei soll $\triangle$ ein Näherungswert für die Fläche des Dreiecks sein, z. B. kann $\triangle$ statt $= \frac{a\,p}{2}$ auch die Fläche eines ebenen Dreiecks sein, das man aus den drei Seitenlängen a, b, c konstruiert. Wenn übrigens die in (5) vernachlässigten Glieder von der Ordnung k^2 berücksichtigt werden sollen, dann muss auch die Bedeutung von $\triangle$, z. B. ob es $= \frac{a\,p}{2}$ oder gleich der Fläche des ebenen Dreiecks a, b, c sein soll, unterschieden werden, weil je nach dieser Unterscheidung auch die höheren Glieder von der Ordnung k^2 verschieden ausfallen.

In Fig. 2. haben wir ein ebenes Dreieck gezeichnet, welches dieselben Seiten a, b, c wie das geodätische Dreieck Fig. 1. hat, aber deswegen andere Winkel A^*, B^*, C^* haben muss, deren Summe $= 180°$ ist, und deren Differenzen gegen die geodätischen Winkel A, B, C nun untersucht werden sollen.

Von (20)—(23) § 110. S. 551 haben wir folgende 4 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} b\cos\alpha &= p - \frac{p\,q^2}{3}\,\frac{3\,k_a + 3\,k_{90} + 2\,k_c}{8} \\ c\cos\alpha' &= p - \frac{p\,q'^2}{3}\,\frac{3\,k_a + 3\,k_{90} + 2\,k_b}{8} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} b\sin\alpha &= q + \frac{p^2\,q}{6}\,\frac{2\,k_a + k_{90} + k_c}{4} \\ c\sin\alpha' &= q' + \frac{p^2 q'}{6}\,\frac{2\,k_a + k_{90} + k_b}{4} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Hieraus bildet man:

$$b\,c\cos\alpha\cos\alpha' = p^2 - \frac{p^2\,q^2}{3}\,\frac{3\,k_a + 3\,k_{90} + 2\,k_c}{8} - \frac{p^2 q'^2}{3}\,\frac{3\,k_a + 3\,k_{90} + 2\,k_b}{8}$$

$$b\,c\sin\alpha\sin\alpha' = q\,q' + \frac{p^2\,q\,q'}{6}\,\frac{2\,k_a + k_{90} + k_c}{4} + \frac{p^2\,q\,q'}{6}\,\frac{2\,k_a + k_{90} = k_b}{4}$$

Da $\alpha + \alpha' = A$, also $\cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha' = \cos A$ ist, erhält man hieraus:

$$\left.\begin{aligned} b\,c\cos A = p^2 - q\,q' - \frac{p^2\,k_a}{24}(3\,q^2 + 3\,q'^2 + 4\,q\,q') - \frac{p^2\,k_c}{24}(2\,q^2 + q\,q') \\ - \frac{p^2\,k_{90}}{24}(3\,q^2 + 3\,q'^2 + 2\,q\,q') - \frac{p^2\,k_b}{24}(2\,q'^2 + q\,q') \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Zwischen den verschiedenen Dreiecksseiten bestehen Beziehungen, nämlich nach (14) § 110. S. 550:

$$b^2 = p^2 + q^2 - \frac{p^2\,q^2}{3}\,\frac{k_a + 2\,k_{90} + k_c}{4} \quad (9)$$

$$c^2 = p^2 + q'^2 - \frac{p^2\,q'^2}{3}\,\frac{k_a + 2\,k_{90} + k_b}{4} \quad (10)$$

Nun wird nach Fig. 2. das ebene Dreieck betrachtet, welches dieselben Seitenlängen b, c und $a = q + q'$ hat wie das geodätische Dreieck Fig. 1., während die Winkel andere werden, nämlich A^*, B^*, C^*.

Dieses Dreieck Fig. 2. giebt die Gleichung:

$$a^2 = (q + q')^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A^* \quad (11)$$

Man hat also aus (11), (10) und (9):

$$2\,b\,c\cos A^* = b^2 + c^2 - (q^2 + q'^2 + 2\,q\,q')$$
$$= 2\,p^2 - 2\,q\,q' - \frac{k_a\,p^2}{12}(q^2 + q'^2) - \frac{k_{90}\,p^2}{6}(q^2 + q'^2) - \frac{k_c\,p^2}{12}\,q^2 - \frac{k_b\,p^2}{12}\,q'^2$$

Vergleicht man dieses mit (8), so erhält man:

$$b\,c(\cos A^* - \cos A) = \frac{p^2\,k_a}{24}(2\,q^2 + 2\,q'^2 + 4\,q\,q') + \frac{p^2\,k_{90}}{24}(q^2 + q'^2 + 2\,q\,q')$$
$$+ \frac{p^2 k_c}{24}(q^2 + q\,q') + \frac{p^2\,k_b}{24}(q'^2 + q\,q')$$

$$b\,c(\cos A^* - \cos A) = \frac{p^2\,(q + q')}{24}\Big(2\,k_a(q + q') + k_{90}(q + q') + k_c\,q + k_b\,q'\Big) \quad (12)$$

Hier ist wieder das Krümmungsmass k_{90} mit Hilfe der Gleichung (4) zu eliminieren; dadurch bekommt man aus (12):

$$b\,c\,(\cos A^* - \cos A) = \frac{p^2\,(q+q')^2}{24}\,(2\,k_a + k_b + k_c) \tag{13}$$

Hier ist:

$$\cos A^* - \cos A = (A - A^*)\,\sin A^*$$

und

$$b\,c\,\sin A^* = p\,(q+q') = 2\,\triangle$$

wobei $\triangle$ ein Näherungswert für die Dreiecksfläche sein soll. Damit giebt (13):

$$A - A^* = \frac{\triangle}{12}\,(2\,k_a + k_b + k_c)$$

Indem wir den schon bei (5) gemachten Vorbehalt bezüglich der Bedeutung von $\triangle$ als erster Näherung für die ebene oder krumme Dreiecksfläche auch hier machen müssen, schreiben wir die sämtlichen drei Gleichungen von der Art der soeben gefundenen zusammen:

$$\left.\begin{aligned} A - A^* &= \frac{\triangle}{12}\,(2\,k_a + k_b + k_c) \\ B - B^* &= \frac{\triangle}{12}\,(k_a + 2\,k_b + k_c) \\ C - C^* &= \frac{\triangle}{12}\,(k_a + k_b + 2\,k_c) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\text{Summe:}\quad \varepsilon = \triangle\,\frac{k_a + k_b + k_c}{3} \tag{15}$$

Dieses ist wieder dieselbe Gleichung, wie die schon bei (5) gefundene, und wenn wir die Glieder von der Ordnung k^2 vernachlässigen wollen, so ist die sphäroidische Dreiecks-Berechnung durch die Formeln (14) und (15) erledigt, ebenso wie die sphärische Dreiecks-Berechnung durch den einfachen Legendre schen Satz (11)—(12) § 42. S. 236 bis zur Ordnung $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich, aber $\frac{1}{r^4}$ ausschliesslich, bestimmt war.

Um nun in unserem Falle auch noch die Glieder von der Ordnung k^2 $\left(\text{entsprechend } \frac{1}{r^4}\right)$ zu finden, können wir die ganze vorstehende Entwicklung (6)—(15) mit Zusetzung aller Glieder von der Ordnung k^2 wiederholen, und es ist dabei nur etwa das eine besonders zu bemerken, dass dann die Dreiecksfläche $\triangle$ nicht mehr nach Belieben $= \frac{a\,p}{2}$ oder $= \frac{b\,c}{2}\sin A^*$ gesetzt werden darf.

Indem wir für Entwicklung mit Gliedern k^2 nun festsetzen, dass $\triangle$ die Fläche des ebenen aus den drei Seitenlängen a, b, c zu konstruierenden Hilfsdreiecks Fig. 2. sein soll, erhalten wir eine Beziehung zwischen $p\,(q+q')$ und $\triangle$, zunächst durch weitere Benützung der Gleichungen (6) und (7), nämlich:

$$\sin A = \sin(\alpha + \alpha') = \sin\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\sin\alpha'$$

$$b\,c\,\sin A = p\,(q+q')\left(1 + \frac{k}{6}\,(p^2 - 2\,q\,q')\right)$$

$$b\,c\,\sin A = b\,c\left(\sin A^* + \frac{\triangle}{3}\,k\cos A^*\right)\ \text{u. s. w.}$$

Da hiemit der Weg zur Entwicklung von $A - A^*$ bis auf Glieder k^2 einschliesslich verzeichnet ist, beschränken wir uns im weiteren, das Schluss-Ergebnis der Entwicklung hier mitzuteilen, umsomehr als die Glieder mit k^2, wenn man innerhalb derselben keine Unterscheidung zwischen k_a, k_b, k_c mehr macht, lediglich sphärische Form annehmen, und nichts anderes sind, als die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$ in den Formeln (31a), 32a), (33a) § 44, S. 251, welche wir den Formeln (14) schlechthin zuzusetzen berechtigt sind.

Entweder durch solche Zusetzung, oder durch unmittelbare Weiter-Entwicklung für das geodätische Dreieck bis k^2 findet man:

$$\left.\begin{aligned} A - A^* &= \frac{\triangle}{3}\,\frac{2\,k_a + k_b + k_c}{4} + \frac{\triangle}{24}\,k^2\,\frac{a^2 + 7\,b^2 + 7\,c^2}{15} \\ B - B^* &= \frac{\triangle}{3}\,\frac{k_a + 2\,k_b + k_c}{4} + \frac{\triangle}{24}\,k^2\,\frac{7\,a^2 + b^2 + 7\,c^2}{15} \\ C - C^* &= \frac{\triangle}{3}\,\frac{k_a + k_b + 2\,k_c}{4} + \frac{\triangle}{24}\,k^2\,\frac{7\,a^2 + 7\,b^2 + c^2}{15} \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

$$\text{Summe } \varepsilon = \triangle\,\frac{k_a + k_b + k_c}{3} + \frac{\triangle}{8}\,k^2\,\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \qquad (17)$$

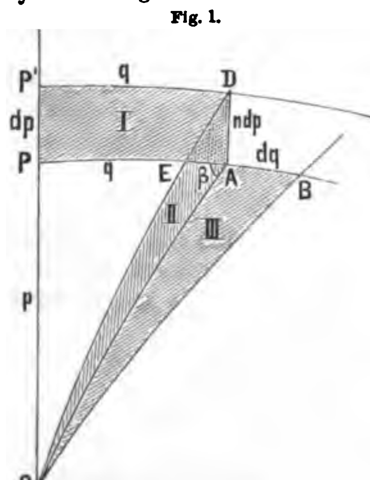
Durch diese Formeln (16) und (17) ist die Auflösung eines geodätischen Dreiecks auf die Auflösung eines ebenen Dreiecks zurückgeführt, also vollkommen erledigt, und weitere Formeln sind nicht nötig.

Wenn wir jedoch die sphärischen Vorbilder unserer Formeln in § 44. S. 251—252 betrachten, so finden wir, dass uns das Analogon zu (35), (38) und (39), S. 251—252 fehlt, das zum praktischen Rechnen zwar nicht erforderlich, aber doch so interessant ist, dass wir im nächsten § 112. uns damit beschäftigen werden.

§ 112. Krumme Oberfläche des geodätischen Dreiecks.

Wir nehmen in Fig. 1. die Vereinigung eines rechtwinkligen und eines Polar-Systems von geodätischen Coordinaten auf der krummen Fläche wieder vor.

Fig. 1.



Der Punkt A hat in dem rechtwinkligen geodätischen Coordinaten - System mit dem Ursprung O die Abscisse $OP = p$ und die Ordinate $PA = q$, und das dadurch bestimmte rechtwinklige Dreieck OPA habe die krumme Fläche $= E$.

Um das Differential dF zu bestimmen, untersuchen wir, um was sich die Fläche F ändert, wenn p und q bzw. sich um dp und dq ändern.

Wenn P allein sich ändert, so rückt der Punkt A in der geodätischen Parallele von A nach D, und die Flächen-Änderung ist $= I—II$, wobei mit I der Streifen $PP'DA$ und mit II das schmale Dreieck ODA bezeichnet, und das kleine Dreieckchen mit den Katheten AD und DE vernachlässigt wird. Man kann also schreiben:

$$\frac{\partial F}{\partial p}\,dp = I - II \qquad (1)$$

In gleicher Weise hat man auch:

$$\frac{\partial F}{\partial q} d q = III \tag{2}$$

wenn mit III das schmale Dreieck $O A B$ bezeichnet wird.

Um die drei Flächenteile I, II, III näher zu untersuchen, beginnen wir mit I, welches ist:

$$I = \int n \, d p \, d q = d p \int n \, d q \tag{3}$$

Dabei ist $d p$ als Basis $P P'$ des Streifens I konstant.

Das Dreieck II lässt sich zu III in Beziehung setzen durch das Verhältnis $E A : A B$, nämlich:

$$II : III = F A : A B$$

Dabei ist $A B = d q$ und $E A = n \, d p \, cotg \, \beta$; daraus folgt mit Rücksicht auf (2):

$$II = \frac{\partial F}{\partial q} n \, d p \, cotg \, \beta \tag{4}$$

Man hat also nun aus (1), (3) und (4):

$$\frac{\partial F}{d p} d p = d p \int n \, d q - n \, d p \, cotg \, \beta \frac{\partial F}{d q}$$

Der Faktor $d p$ fällt fort, und dann hat man:

$$sin \, \beta \frac{\partial F}{\partial p} + cos \, \beta \, n \frac{\partial F}{\partial q} = sin \, \beta \int n \, d q$$

oder, weil $sin \, \beta$ und $cos \, \beta$ von den früheren Entwicklungen nur in den Produkten $s \, sin \, \beta$ und $s \, cos \, \beta$ vorhanden sind, schreiben wir:

$$s \, sin \, \beta \frac{\partial F}{\partial p} + n \, s \, cos \, \beta \frac{\partial F}{\partial q} = s \, sin \, \beta \int n \, d q \tag{5}$$

Diese zur Bestimmung von F dienende Gleichung soll in Übereinstimmung gebracht werden mit der folgenden Gleichung, deren Coëfficienten A, B, C, D zunächst unbestimmt eingeführt werden:

$$F = \frac{1}{2} p q + A p^2 + B q^2 + C p^2 q + D p q^2 \tag{6}$$

Nach Anleitung von (5) wird hieraus gebildet:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{1}{2} q + 2 A p + 2 C p q + D q^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{1}{2} p + 2 B q + C p^2 + 2 D p q$$

Hiezu nehmen wir in erster Näherung von (18) und (19) S. 551 und (16) S. 548:

$$s \, sin \, \beta = p \qquad s \, cos \, \beta = q \qquad n = 1 + f_0 q^2$$

Wenn man hiemit die Gleichung (5) bildet, und mit (6) vergleicht, so findet man $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, d. h. die Reihe für F hat keine Glieder von der Form p^2, q^2, $p^2 q$, $p q^2$.

Nachdem dieses erkannt ist, wird als neue Form angenommen:

$$F = \frac{1}{2} p q + A p^3 q + B p^2 q^2 + C p q^3 \tag{7}$$

Hieraus wird $\frac{\partial F}{\partial p}$ und $\frac{\partial F}{\partial q}$ gebildet, hiezu in zweiter Näherung von (18), (19) § 110. S. 551 nebst (16) § 109. S. 548:

$$s \sin \beta = p - \frac{1}{3} f_0 \, p \, q^2 \qquad s \cos \beta = q + \frac{2}{3} f_0 \, p^2 q$$
$$n = 1 + f_0 \, q^2$$

Dieses wird in (5) eingesetzt, der entstehende Ausdruck mit (7) verglichen, wodurch sich ergeben wird:

$$4 A = -\frac{1}{3} f_0 \qquad 4 B = 0 \qquad 4 C = -\frac{1}{3} f_0$$

Und setzt man auch noch nach (13) § 110. S. 550, $2 f_0 = -k$, so giebt (7):

$$F = \frac{1}{2} p \, q + \frac{p \, q}{24} k \, (p^2 + q^2) \tag{8}$$

In der nächsten Stufe haben wir 4 weitere unbestimmte Glieder zugesetzt von der Form $A \, p^4 q + B \, p^3 q^2 + B' \, p^2 q^3 + A' \, p \, q^4$, wozu auch $s \sin \beta$, $s \cos \beta$ und n entsprechend höher zu nehmen waren. Die Ausführung und Coëfficienten-Vergleichung nach dem bisherigen Verfahren gab:

$$F = \frac{1}{2} p \, q + \frac{p \, q}{120} \left(-10 f_0 \, p^2 - 10 f_0 \, q^2 - 6 f_1 \, p^3 - 9 \, g_0 \, p^2 q - 7 f_1 \, p \, q^2 - 12 \, g_0 \, q^3 \right)$$

Wenn man hier wieder die Krümmungsmasse nach (13) § 110. S. 550 einführt, so kann man den vorstehenden Ausdruck für F auf folgende Form bringen:

$$F = \frac{p \, b}{2} + \frac{p \, q}{240} \left\{ k_\alpha \, (4 \, p^2 + 3 \, q^2) + k_{90} \, (3 \, p^2 + 3 \, q^2) + k_\beta \, (3 \, p^2 + 4 \, q^2) \right\} \tag{9}$$

Setzt man die verschiedenen k_α, k_β, k_γ hier einander gleich, schlechthin $= k$, so erhält man wieder die Gleichung (8).

Nun kommt es darauf an, von der Fläche F eines rechtwinkligen geodätischen Dreiecks überzugehen auf die Fläche eines allgemeinen Dreiecks mit beliebigen Winkeln. Der Weg hiezu ist bereits durch die Entwicklung von § 110. mit Fig. 1. S. 553 vorgezeichnet; wir werden wieder das allgemeine Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen, und haben dann, die Flächen der beiden rechtwinkligen Dreiecke nach dem bisherigen mit F_1 und F_2 bezeichnend, und für die Gesamtfläche das Zeichen F annehmend:

$$F = F_1 + F_2 \tag{10}$$

Wenn wir die Formel (9) für die Fläche F eines rechtwinkligen Dreiecks, auf die beiden Teile von Fig. 1. anwenden, so haben wir:

$$F_1 = \frac{p \, q}{2} + \frac{p \, q}{240} \left(k_a \, (4 \, p^2 + 3 \, q^2) + k_{90} \, (3 \, p^2 + 3 \, q^2) + k_c \, (3 \, p^2 + 4 \, q^2) \right)$$

$$F_2 = \frac{p \, q'}{2} + \frac{p \, q'}{240} \left(k_a \, (4 \, p^2 + 3 \, q'^2) + k_{90} \, (3 \, p^2 + 3 \, q'^2) + k_b \, (3 \, p^2 + 4 \, q'^2) \right)$$

Hiezu hat man nach (24)—(27) §. 110. S. 551:

$$p = b \cos \alpha \left(1 + \frac{q^2}{3} \frac{3 \, k_a + 3 \, k_{90} + 2 \, k_c}{8} \right), \quad p = c \cos \alpha' \left(1 + \frac{q'^2}{3} \frac{3 \, k_a + 3 \, k_{90} + 2 \, k_b}{8} \right)$$

$$q = b \sin \alpha \left(1 + \frac{p^2}{6} \frac{2 \, k_a + k_{90} + k_c}{4} \right), \quad q' = c \sin \alpha' \left(1 - \frac{p^2}{6} \frac{2 \, k_a + k_{90} + k_b}{4} \right)$$

$$p = c \cos \alpha' \left(1 + \frac{q'^2}{3} \frac{3 \, k_a + 3 \, k_{90} + 2 \, k_b}{8} \right), \quad p = b \cos \alpha \left(1 + \frac{q^2}{3} \frac{3 \, k_a + 3 \, k_{90} + 3 \, k_b}{8} \right)$$

Dadurch ist der Weg gezeigt, auf welchem man die krumme Dreiecksfläche F zunächst in p, q' q' nebst den verschiedenen k ausdrücken kann. Dann hat man verschiedene geometrische Beziehungen in dem Dreieck selbst, z. B. $p^2 + q^2 = b^2$, $p^2 + q'^2 = c^2$ als erste Näherungen u. s. w. Wenn man nach diesen Andeutungen die Rechnung durchführt, so wird man erhalten:

$$F = \frac{b\,c \sin A}{2}\left\{1 + \frac{1}{120}k_a(3\,b^2 + 3\,c^2 - 12\,b\,c\cos A) + \frac{1}{120}k_b(3\,b^2 + 4\,c^2 - 9\,b\,c\cos A) + \frac{1}{120}k_c(4\,b^2 + 3\,c^2 - 9\,b\,c\cos A)\right\} \quad (11)$$

Diese Gleichung (11), welche man auch noch in zwei anderen Formen mit $a\,c\sin B$ und mit $a\,b\sin C$, anschreiben kann, ist nicht symmetrisch, weil eines der drei Elemente A, B, C bzw. a, b, c bevorzugt ist. Wir wollen deshalb $b\,c\sin A$ durch $\triangle$ ersetzen, und haben hiezu von (14) § 111. S. 553:

$$A = A^* + \frac{\triangle}{3}\,\frac{2\,k_a + k_b + k_c}{4}$$

und im ebenen Dreieck: $\quad 2\,b\,c\cos A^* = b^2 + c^2 - a^2$

Da man in den Gliedern zweiter Ordnung von (11) stets A mit A^* vertauschen darf, kann man mittelst der soeben geschriebenen zwei Gleichungen die (11) auf folgende Form bringen:

$$F = \triangle\left\{1 + \frac{1}{120}k_a(a^2 + 2\,b^2 + 2\,c^2) + \frac{1}{120}k_b(2\,a^2 + b^2 + 2\,c^2) + \frac{1}{120}k_c(2\,a^2 + 2\,b^2 + c^2)\right\} \quad (12)$$

Setzt man hier $k_a = k_b = k_c = k$, so erhält man:

$$F = \triangle\left(1 + \frac{1}{24}k\,(a^2 + b^2 + c^2)\right) \quad (13)$$

Dieses entspricht dem früheren (36) S. 251, und damit kann man auch (31)—(42) von S. 251—252 leicht auf unseren Fall übertragen, was in der Formel-Zusammenstellung des 113. geschehen soll.

In der vorigen 3. Auflage dieses Bandes, 1890, S. 480—488, hatten wir hier eine zweite Begründung der Grundformeln geodätischer Dreiecke eingeschaltet (auch in teilweise anderer Form früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1889“, S. 295—304 gegeben), welche auf das Prinzip der reduzierten Breite (Kap. IX) gegründet, ein sphärisches Hilfsdreieck benützt. Dieses mag diesesmal übergangen werden.

§ 113. Praktische Anwendung der allgemeinen Theorie der geodätischen Dreiecke.

(Bezeichnungen nach Fig. 1. und 2. S. 553.)

Wir wollen zuerst die verschiedenen von § 111. und § 112. zur praktischen Anwendung geeigneten Formeln zusammenstellen, und dazu auch noch einige zusammenfassende Bezeichnungen einführen. Wenn die Krümmungsmasse in den drei Ecken eines Dreiecks mit k_a, k_b, k_c bezeichnet sind, so nehmen wir hiezu einen Mittelwert:

$$\frac{k_a + k_b + k_c}{3} = k_0 \quad (1)$$

Dieser Wert k_0 entspricht dem Schwerpunkt des Dreiecks und dem arithmetischen Mittel der geographischen Breiten der drei Endpunkte des Dreiecks.

Wenn die drei Seiten eines geodätischen Dreiecks die Längen a, b, c haben, so berechnen wir das mittlere Seitenquadrat:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = m^2 \tag{2}$$

Die Winkel des geodätischen Dreiecks sind A, B, C, und die Winkel eines ebenen Dreiecks, welches mit dem geodätischen Dreieck gleiche Seitenlängen a, b, c hat, sind A^*, B^*, C^*. Die Winkelsumme des ebenen Dreiecks, d. h. $A^* + B^* + C^*$ ist $= 180°$, und die Summe der Winkel des geodätischen Dreiecks, d. h. $A + B + C$ ist $= 180° + \varepsilon$, wo ε der geodätische Excess des Dreiecks heisst.

Die Fläche des geodätischen Dreiecks, auf der krummen Oberfläche gemessen, sei F, und die Fläche des ebenen Dreiecks mit den Seiten a, b, c sei $= \triangle$.

Mit diesen Bezeichnungen haben wir von (16) und (17) § 112. S. 556 mit Zusetzung der nötigen ϱ:

$$A - A^* = \frac{\triangle}{3} \varrho \frac{2k_a + k_b + k_c}{4} + \frac{\triangle}{24} \varrho k^2 \frac{a^2 + 7b^2 + 7c^2}{15} \tag{3}$$

oder mit Einführung von k_0 und von m^2 in dreifacher Form:

$$\left.\begin{aligned} A - A^* &= \frac{\triangle}{3} \varrho k_0 + \frac{\triangle}{12} \varrho (k_a - k_0) + \frac{\triangle}{120} \varrho k^2 (7m^2 - 2a^2) \\ B - B^* &= \frac{\triangle}{3} \varrho k_0 + \frac{\triangle}{12} \varrho (k_b - k_0) + \frac{\triangle}{120} \varrho k^2 (7m^2 - 2b^2) \\ C - C^* &= \frac{\triangle}{3} \varrho k_0 + \frac{\triangle}{12} \varrho (k_c - k_0) + \frac{\triangle}{120} \varrho k^2 (7m^2 - 2c^2) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\text{Summe } \varepsilon = \triangle \varrho k_0 + 0 \qquad + \frac{\triangle}{8} \varrho k^2 m^2 \tag{5}$$

Der theoretischen Vollständigkeit wegen fügen wir auch die Formel für die krumme Oberfläche F hier bei, nach (13) § 112. S. 559:

$$F = \triangle + \frac{\triangle}{8} k m^2 \tag{6}$$

und als Folge von (5) und (6):

$$\varepsilon = F \varrho k_0 + k^3 \ldots \tag{7}$$

Endlich bildet man aus (4) und (5) durch Elimination von $\triangle$ die Differenz:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} \frac{2k_a + k_b + k_c}{4k_0} + \varepsilon \frac{k}{180} (-2a^2 + b^2 + c^2) \tag{8}$$

oder mit Einführung der Mittelwerte k_0 und m^2 nach (1) und (2) in dreifacher Form:

$$\left.\begin{aligned} A - A^* &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{12}\left(\frac{k_a - k_0}{k_0}\right) + \frac{\varepsilon k}{60} (m^2 - a^2) \\ B - B^* &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{12}\left(\frac{k_b - k_0}{k_0}\right) + \frac{\varepsilon k}{60} (m^2 - b^2) \\ C - C^* &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{12}\left(\frac{k_c - k_0}{k_0}\right) + \frac{\varepsilon k}{60} (m^2 - c^2) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Summe $\varepsilon = \varepsilon$.

Wo in den höheren Gliedern dieser Formeln k schlechthin steht, sind die einzelnen k_a, k_b, k_c nicht mehr unterschieden, und man kann dann nach Belieben etwa $k = k_0$ nehmen.

Die Zahlenwerte von k kann man aus der Hilfstafel S. [8]—[29] unseres Anhangs entnehmen, denn es ist:

$$k = \frac{1}{r^2} \quad , \quad log\, k = log \frac{1}{r^2}$$

Auch darf man sich wohl erlauben, wenn es sich um den Mittelwert k_0 nach (1) handelt, statt des Mittels aus den k selbst, das Mittel aus den verschiedenen $log\, k$ als $log\, k_0$ gelten zu lassen, oder man kann auch $log\, k_0$ zu dem arithmetischen Mittel der Breiten φ der drei Ecken des Dreiecks nehmen, insofern auf nicht zu weite Erstreckung die Differenzen zwischen den Breiten φ, zwischen den Werten k und den Werten $log\, k$ alle nahezu einander proportional angenommen werden dürfen.

Wenn die Proportionalität zwischen $\Delta\varphi$ und Δk nicht mehr stattfindet, so ist auch die der ganzen Theorie zu Grunde liegende Annahme, dass k eine lineare Funktion der Flächen-Coordinaten sei, nicht mehr erfüllt (vgl. (13) und (14) § 109. S. 548 und (13) § 110. S. 550).

Zu einem Zahlen-Beispiele nehmen wir zuerst wieder das klassische Dreieck Inselsberg-Hohehagen-Brocken, welches uns schon mehrfach, auf S. 232 und S. 253 als Rechen-Beispiel gedient hat.

Wir nehmen nach S. 232 zuerst wieder die genäherten geographischen Breiten der drei Eckpunkte des Dreiecks, und entnehmen darnach von S. [20] des Anhangs die Krümmungsmasse:

Punkt	Breite	$log\, k = log \frac{1}{r^2}$
Inselsberg	50° 51′ 9″	$log\, k_a = 6.390\,1277{\cdot}8$
Hohehagen	51° 28′ 31″	$log\, k_b = 6.390\,0659{\cdot}4$
Brocken	51° 48′ 2″	$log\, k_c = 6.390\,0337{\cdot}4$
Mittel	51° 22′ 34″	$log\, k_0 = 6.390\,0758{\cdot}2$

(10)

Wir haben dabei ausnahmsweise scharf gerechnet, d. h. von Seite [20] zuerst $log\, r$ interpoliert, und daraus $log\, r^2$ und $log\, k$ gebildet. Wir wollen damit die Winkel auf 0,000 001″ genau berechnen, was nur formellen Sinn für ein Vergleichs-Beispiel hat.

Indem wir die früheren Zahlenwerte von S. 237 und S. 253 wieder benützen, haben wir:

$$a = 69{,}194^{km} \qquad b = 105{,}973^{km} \qquad c = 84{,}941^{km}$$

$$a^2 = 4787{,}8^{qkm} \qquad b^2 = 11230{,}2^{qkm} \qquad c^2 = 7215{,}0^{qkm} \qquad m^2 = 7744{,}3^{qkm}$$

$$log \triangle = 9.467\,2167{\cdot}6 \qquad \triangle = 2\,932\,356\,450^{qm}$$

hiemit nach (5): $\varepsilon = 14{,}849\,701'' + 0{,}000\,353'' = 14{,}850\,054$ (11)

dann nach (6): $F = 2\,932\,356\,450^{qm} + 69\,693^{qm} = 2\,932\,426\,143^{qm}$

und damit ε nach (7): $\varepsilon = 14{,}850\,054''$ (stimmt mit (11))

Die Gruppe (4) und (5) giebt:

$$\left.\begin{array}{rl} A - A^* = & 4{,}949\,900'' - 0{,}000\,148'' + 0{,}000\,136'' = 4{,}949\,888'' \\ B - B^* = & 4{,}949\,900'' + 0{,}000\,028'' + 0{,}000\,096'' = 4{,}950\,024'' \\ C - C^* = & 4{,}949\,900'' + 0{,}000\,120'' + 0{,}000\,121'' = 4{,}950\,141'' \\ \hline \varepsilon = & 14{,}849\,700'' + 0 \qquad + 0{,}000\,353'' = 14{,}850\,053'' \end{array}\right\} \quad (12)$$

Ferner giebt die Gruppe (9):

$$\left.\begin{array}{rl} A - A^* = & 4{,}950\,018'' + 0{,}000\,148'' + 0{,}000\,018'' = 4{,}950\,184'' \\ B - B^* = & 4{,}950\,018'' - 0{,}000\,028'' - 0{,}000\,021'' = 4{,}949\,969'' \\ C - C^* = & 4{,}950\,018'' - 0{,}000\,120'' + 0{,}000\,003'' = 4{,}949\,901'' \\ \hline \varepsilon = & 14{,}850\,054'' + 0 \qquad + \qquad = 14{,}850\,054'' \end{array}\right\} \quad (13)$$

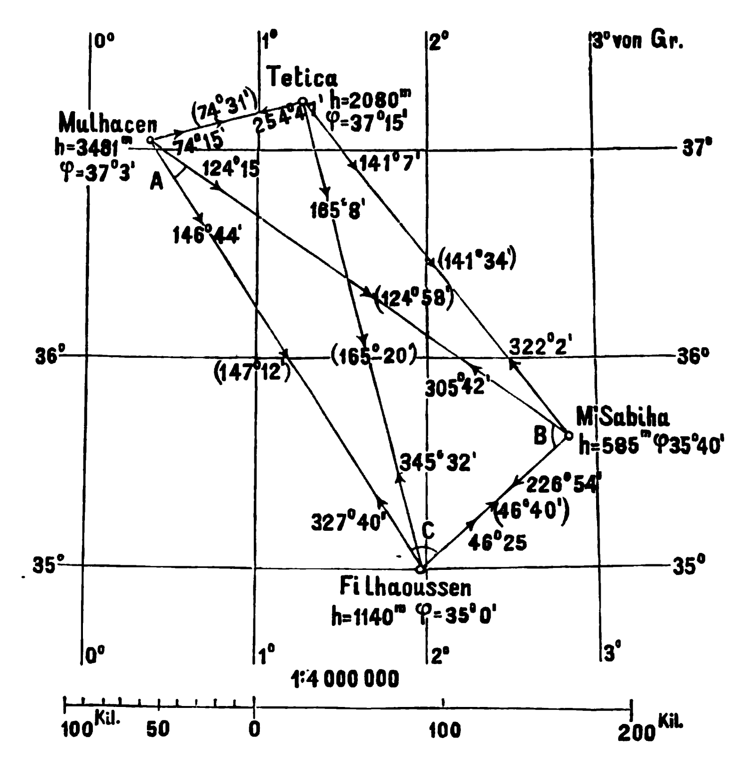
Wenn man diese Winkel (12) und (13) mit den früheren sphärischen Angaben auf S. 253 vergleicht, so findet man nur Differenzen von etwa 0,0001″, woraus zu ersehen ist, dass in diesem Falle eines sehr grossen Dreiecks die Berechnung nach den sphäroidischen Formeln keine merkbare Abweichung von der sphärischen Rechnung bringt.

Die Zahlenwerte, welche wir hier in (12) und (13) berechnet haben, stimmen nicht überein mit den Werten, welche Gauss selbst in Art. 28. der „Disquisitiones generales etc.“ gegeben hat, die Gauss'schen Angaben sind nämlich:

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{Inselsberg} & A - A^* = & 4{,}95181'' \\ \text{Hohehagen} & B - B^* = & 4{,}95113'' \\ \text{Brocken} & C - C^* = & 4{,}95104'' \\ \hline & \varepsilon = & 14{,}85348'' \end{array}\right\} \quad (14)$$

Es rührt das davon her, dass Gauss im Jahre 1827 andere Erddimensionen seiner Rechnung zu Grunde legte, als die erst von 1841 herrührenden Bessel'schen Erddimensionen, welche unseren Berechnungen zu Grunde liegen.

Fig. 1. (vgl. Fig. 4. S. 23).
Trigonometrische Verbindung zwischen Spanien und Algier.



Die im Vorstehenden berechneten Winkel-Reduktionen sind unabhängig von den Reduktionen zwischen den geodätischen Linien und den vertikalen Schnitten, welche durch die früheren Formeln von § 71. bestimmt sind. Jene Reduktionen müssen vorher schon angebracht sein, ehe die geodätische Theorie von § 109.—112. zur Anwendung kommt.

Wir wollen dieses an einem grösseren Beispiele zeigen, welches in Fig. 1. S. 562 dargestellt ist.

Hiezu nehmen wir eines der grossen Dreiecke, welche im Jahre 1879 von Ibanez und Perrier zur trigonometrischen Verbindung zwischen Spanien und Algier angelegt worden sind, wie wir schon früher auf S. 22—23 im allgemeinen berichtet haben.

Diese grossen Dreiecke eignen sich sehr gut als Zahlen-Beispiele zur Anwendung der geodätischen Formeln mit sphäroidischen Gliedern, und in diesem Sinne ist auch schon eine Berechnung nach Helmerts Formeln mitgeteilt worden von Fenner in der „Zeitschr. f. Verm. 1882", S. 303—308. Im übrigen haben wir die Quellenschriften: „Enlace geodésico y astronómica de Europa y Africa, Madrid 1880" und in dem „Generalbericht d. europ. Gradm. für 1880", S. 44—57: „Jonction géodésique et astronomique de l'Algérie avec l'Espagne", und in endgiltiger Berechnung in dem Werke: „Memorias del instituto geográfico y estadístico. Tomo VII. Madrid 1888", S. 97—111.

Nach diesen Schriften und einigen Nebenberechnungen haben wir die zur Berechnung nötigen Hauptwerte der Breiten und der Azimute in Fig. 1. zusammengestellt, welche nun in Verbindung mit Fig. 1. S. 23 alles wesentliche giebt.

Wir wollen hier nur eines der vier Verbindungs-Dreiecke durchrechnen, nämlich das grösste: Mulhacen, M'Sahiba, Filhaoussen.

Die gemessenen Winkel sind folgende (Memorias etc. S. 100):

Mulhacen	$A =$	$22° \; 28' \; 45{,}269''$
M'Sabiha	$B =$	$78° \; 48' \; 45{,}563''$
Filhaoussen	$C =$	$78° \; 43' \; 39{,}198''$
	Summe $=$	$180° \; 0' \; 70{,}030''$

(15)

Wir wollen jedoch für unsere Zwecke diese 3 Winkel lieber in Gestalt von 6 Richtungen darstellen, und zwar so, dass die Richtungen nahezu gleich den Azimuten der betreffenden Seiten werden:

Mulhacen	M'Sabiha	Filhaoussen
$(A\,B) = 124° \, 15' \; 0{,}000''$	$(B\,C) = 226° \, 53' \; 0{,}000''$	$(C\,A) = 327° \, 40' \; 0{,}000''$
$(A\,C) = 146° \, 43' \, 45{,}269''$	$(B\,A) = 305° \, 41' \, 45{,}563''$	$(C\,B) = 46° \, 23' \, 39{,}198''$
$A = 22° \, 28' \, 45{,}269''$	$B = 78° \, 48' \, 45{,}563''$	$C = 78° \, 43' \, 39{,}198''$

(16)

Die Differenzen A, B, C sind wieder dieselben wie bei (15). Dass (AB) und (BA) u. s. w. nicht nahezu um 180° verschieden sind, obgleich die Richtungen selbst auf etwa 1′ genau Azimute sind, rührt von den Meridian-Konvergenzen her; die Mittelwerte zweier solcher Gegenrichtungen sind als Mittel-Azimute genähert in Fig. 1. eingeschrieben, z. B. (147° 12′) als Mittel aus 146° 44′ und 327° 40′ ± 180°.

Nun müssen die gemessenen Richtungen (16) zunächst in zweifacher Weise wegen der Abplattung der Erde reduziert werden.

Erstens erfolgt die Reduktion wegen der Höhe der Zielpunkte über dem Meere; es ist nach der Formel für γ in § 68. S. 372 die Reduktion für einen Zielpunkt der in der Höhe h über dem Meere, im Azimut α angezielt wird, in Sekunden:

$$\gamma = \eta^2 \frac{h}{N} \varrho \sin \alpha \cos \alpha \tag{17}$$

Zweitens ist Reduktion erforderlich von den vertikalen Schnitten, in welchen die Richtungen (16) gemessen sind, auf die geodätischen Linien; hiefür haben wir nach (16) S. 386 nebst Fig. 5. S. 384 die Reduktion in genügender Näherung:

$$\nu = -\frac{1}{3}\eta^2 \varepsilon = -\frac{1}{6}\eta^2 \frac{s^2}{N^2}\varrho \sin\alpha \cos\alpha \tag{18}$$

Der in (17) und (18) vorkommende Faktor η^2 hat wie gewöhnlich die Bedeutung $\eta^2 = e'^2 \cos^2\varphi$. Da die Breiten φ der drei Eckpunkte in Fig. 1. angegeben sind, hat man damit auch die Mittelbreiten für die drei Seiten, und hiezu lassen sich die drei Werte $\log \eta^2$ berechnen, sowie die nötigen $\log N$ aus der Tafel Seite [16] entnehmen:

M'Sabiha	35° 40′	Mulhacen	37° 3′	Mulhacen	37° 3′
Filhaoussen	35° 0′	Filhaoussen	35° 0′	M'Sabiha	35° 40′
Mittelbreite φ =	35° 20′		36° 2′		36° 22′
$\log \eta^2$	7.65049		7.64286		7.63917
$\log N$	6.80513		6.80514		6.80515

(19)

Da im übrigen zu der Rechnung nach den Formeln (17) und (18) nichts weiter zu bemerken ist, indem die nötigen Elemente teils in (19) gegeben, teils in Fig. 1 eingeschrieben sind, so teilen wir sofort die Ergebnisse dieser Rechnungen mit:

	Mulhacen		M'Sabiha		Filhaoussen	
Richtung	(AB)	(AC)	(BC)	(BA)	(CA)	(CB)
γ	− 0,039″	− 0,074″	+ 0,082″	− 0,230″	− 0,225″	+ 0,042″
ν	+ 0,126″	+ 0,123″	− 0,021″	+ 0,126″	+ 0,123″	− 0,021″
$\gamma + \nu$	+ 0,087″	+ 0,049″	+ 0,061″	− 0,104″	− 0,102″	+ 0,021″
	− 0,038″		− 0,165″		+ 0,123″	

(20)

Indem wir diese Reduktionen (20) den gemessenen Richtungen (16) hinzufügen, erhalten wir folgende neue Tabelle der Richtungen, die wir zur Unterscheidung von (AB) u. s. w. nun mit $[AB]$ u. s. w. bezeichnen wollen:

Mulhacen	M'Sabiha	Filhaoussen
$[AB]$ = 124° 15′ 0,087″	$[BC]$ = 226° 53′ 0,061″	$[CA]$ = 327° 39′ 59,898″
$[AC]$ = 146° 43′ 45,318″	$[BA]$ = 305° 41′ 45,459″	$[CB]$ = 46° 23′ 39,219″
A' = 22° 28′ 45,231″	B' = 78° 48′ 45,398″	C' = 78° 43′ 39,321″ (21)

Um nun das Dreieck, welchem diese Winkel angehören, auf ein ebenes Dreieck mit gleich langen Seiten zu reduzieren, oder um die früher mit A^*, B^*, C^* bezeichneten Winkel zu finden, hat man wieder die hiefür giltigen Formeln anzuwenden, welche wir am Anfang dieses § 113. unter (1)—(9) S. 559—560 zusammengestellt haben.

Die hiezu nötigen Krümmungsmasse k, bzw. die entsprechenden $\log k\varrho$ sind:

A, Mulhacen	φ = 37° 3′	$\log k\varrho = \log \frac{\varrho}{r^2}$ = 1.705 9395
B, M'Sabiha	. . 35° 40′	. . . . 1.706 0732
C, Filhaoussen	. . 35° 1′	. . . . 1.706 1356

Was die Rechnung im übrigen betrifft, so haben wir die Seite $AC = b = 269\,926_{\text{m}}$ zu Grunde gelegt, die Winkel A, B, C zunächst vorläufig auf 180° ausgeglichen und damit erste Näherungen von A^*, B^*, C^* erhalten, woraus weiter folgte: $BC = a$

$= 105\,173{,}9^m$ und $A\,B = c = 269\,845{,}7^m$. Damit konnte weiter gerechnet werden $\log \triangle = 10.143\,6726$ und $\varepsilon = 70{,}7607''$ und endlich:

$$A' - A^* = 23{,}5866'' \qquad B' - B^* = 23{,}5866'' \qquad C - C^* = 23{,}5875'' \tag{22}$$

Zieht man diese (22) von den A', B', C' in (21) ab, so erhält man:

$$\begin{aligned} A^* &= 22^\circ\ 28'\ 21{,}644'' \\ B^* &= 78^\circ\ 48'\ 21{,}811'' \\ C^* &= 78^\circ\ 43'\ 15{,}733'' \\ \hline \text{Summe} &= 179^\circ\ 59'\ 59{,}188'' \\ w &= \ -0{,}812'' \end{aligned} \tag{23}$$

Dieser nun noch bleibende Widerspruch $w = -0{,}812''$ rührt von den Beobachtungs-Fehlern her. Die geodätische Winkel-Reduktion an sich ist damit vollendet.

Wenn man die praktische Frage aufwirft, ob die kleinen Reduktionen, mit denen wir uns hier beschäftigt haben, bei Triangulierungen in Rechnung zu bringen sind, so wird man beim heutigen Stande der Beobachtungskunst diese Frage für die gewöhnlichen kleinen Dreiecke und geringen Höhen vereinen; dagegen bei solch grossen Verhältnissen, wie diejenigen der Triangulierung zwischen Spanien und Algier, sind kleine Grössen wie die unter (20) erhaltenen neben einem nur etwa 8 mal grösseren Messungs-Fehler w nach gewöhnlicher Anschauung nicht zu vernachlässigen.

Dieses betrifft diejenigen Reduktionen, deren Theorie in den früheren §§ 66., 67. und 71. behandelt worden ist. Die kleinen Grössen, welche durch die Theorie dieses Kapitels X. § 110.—§ 112 gewonnen wurden, sind noch erheblich kleiner, und der praktische Gewinn unseres ganzen Kapitels X. beschränkt sich also sogar bei der grossen spanisch-algierischen Triangulierung auf Glieder von 0,001″ Betrag.

Wenn hiernach die Theorie der Gauss schen „Disquisitiones generales circa superficies curvas" sich hier nur als schöne Theorie zeigt, welche man in der Praxis kaum unmittelbar braucht, so ist die Theorie damit doch auch praktisch nicht überflüssig, denn ohne diese Theorie wüsste man eben nicht, dass die zweifellos vorhandenen Einflüsse der Abplattung der Erde in diesem Falle so wenig ausmachen, und die höheren sphärischen Glieder mit $\frac{1}{r^4}$ in § 44. würden ohne die Kenntnis der sphäroidischen Glieder wertlos sein.

Kapitel XI.

Bestimmung der Dimensionen des Erd-Ellipsoids.

§ 114. Bestimmung der Meridian-Ellipse durch zwei Breiten-Gradmessungen.

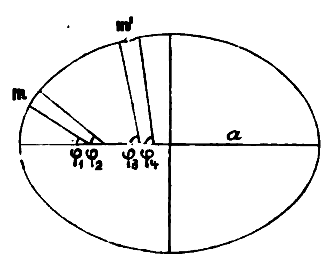
Das älteste Mittel zur Bestimmung der Erddimensionen sind die sogenannten Breiten-Gradmessungen, deren Geschichte wir in der Einleitung S. 1—9 mitgeteilt haben.

Unter einer Breiten-Gradmessung versteht man die Messung eines Meridianbogens der Erde und der Polhöhen oder geographischen Breiten seiner Endpunkte.

Wenn man die Messungs-Ergebnisse zweier solcher Gradmessungen unter verschiedenen Breiten kennt, so kann man die Dimensionen der dadurch bestimmten Meridian-Ellipse berechnen.

Ehe wir uns damit beschäftigen, ist eine Bemerkung über die Messung der Meridianbögen zu machen. Geradezu auf einem Meridian der Erde eine Linie unmittelbar zu messen, das war das Bestreben der ersten Gradmesser (vgl. z. B. S. 3, arabische Gradmessung und S. 7, amerikanische Gradmessung), und wenn der gemessene Bogen einen kleinen Winkel α mit der Meridianrichtung bildete, so konnte man leicht eine Reduktion auf den Meridian ausführen, welche im wesentlichen in der Multiplikation des gemessenen Bogens mit $\cos\alpha$ besteht. Auch Triangulierungsketten, welche nach ihrer Haupterstreckung nahe der Meridianrichtung liegen, lassen sich auf den Meridian reduzieren, wie wir ausführlicher im nächsten § 115. zeigen werden.

Fig. 1.
Zwei Breiten-Gradmessungen.



Nach Andeutung von Fig. 1. nehmen wir nun an, man habe zwei Gradmessungen in demselben Meridian, oder, was hier dasselbe ist, zwei Gradmessungen, deren Elemente in einer Meridian-Ellipse dargestellt sind. Die erste Gradmessung habe den Meridianbogen m mit den Breiten φ_1 und φ_2 seiner Endpunkte, und die zweite Gradmessung entsprechend den Meridianbogen m' mit den Breiten φ_3 und φ_4. Zur Abkürzung wollen wir hiezu schreiben:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi \qquad \varphi_4 - \varphi_3 = \Delta\varphi' \tag{1}$$

$$\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi \qquad \frac{\varphi_4 + \varphi_3}{2} = \varphi' \tag{2}$$

Nun wissen wir von § 35. S. 210 und S. 219, dass man die Länge m eines mässig grossen Meridianbogens als Kreisbogen berechnen kann, dessen Halbmesser der Meridian-Krümmungs-Halbmesser M für die Mittelbreite φ, und dessen Centriwinkel die Breiten-Differenz $\Delta\varphi$ ist; d. h. man hat für die beiden Gradmessungen:

$$m = \frac{\Delta\varphi}{\varrho} M \qquad m' = \frac{\Delta\varphi'}{\varrho} M' \tag{3}$$

Dabei ist nach (21) und (19) S. 196—197:

$$M = \frac{c}{V^3} \qquad M' = \frac{c}{V'^3} \tag{4}$$

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2\varphi \qquad V'^2 = 1 + e'^2 \cos^2\varphi' \tag{5}$$

Wenn man diese (5) und (4) in (3) einsetzt, und dann die beiden Gleichungen (3) dividiert, so erhält man:

$$\left(\frac{m}{m'}\frac{\Delta\varphi'}{\Delta\varphi}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1 + e'^2 \cos^2\varphi'}{1 + e'^2 \cos^2\varphi} \tag{6}$$

Zur Abkürzung schreiben wir:

$$\left(\frac{m}{m'}\frac{\Delta\varphi'}{\Delta\varphi}\right)^{\frac{2}{3}} = q^2 \tag{6a}$$

Die Gleichung (6) ist in Bezug auf e'^2 linear, und kann daher geradezu nach e'^2 aufgelöst werden. Wenn man dabei die Abkürzung (6a) benützt, so erhält man

$$e'^2 = \frac{1 - q^2}{q^2 \cos^2\varphi - \cos^2\varphi'} \tag{7}$$

Hat man hieraus e'^2 berechnet, so erhält man mit Probe aus (3), (4) und (5):

$$c = \frac{m}{\Delta\varphi}\varrho\, V^3 \quad \text{oder} \quad c = \frac{m'}{\Delta\varphi'}\varrho\, V'^3 \tag{8}$$

Die beiden Ellipsen-Halbaxen a und b erhält man aus c und e'^2 nach (18) S. 196:

$$a = \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2}} \qquad b = \frac{c}{1 + e'^2} \tag{9}$$

wobei man nochmals zur Probe bilden kann:

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2} = e'^2$$

Damit hat man auch e^2 und die Abplattung α nach (5) und (7) S. 189:

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'2} \quad , \quad \alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2} \quad \text{oder} \quad \alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}} \tag{10}$$

Auch die Länge des Meridian-Quadranten Q kann nach (246) S. 215 berechnet werden:

$$Q = a \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right) \tag{11}$$

Zur Anwendung der entwickelten Formeln wollen wir die bekannten klassischen Gradmessungen von Peru und Lappland benützen.

Nach Bessels Angabe im 14. Band, 1837, der „Astr. Nachr." S. 334 und S. 337 sind die Ergebnisse der Gradmessungen in Peru und Lappland (Schweden) die folgenden:

Gradmessung in Peru:

$$\left.\begin{aligned} m &= 176\,875{,}5 \text{ Toisen} = 344\,736{,}772 \text{ Meter} \\ \varphi_1 &= -3^\circ\, 4'\, 32{,}068'' \qquad \varphi_2 = +\, 0^\circ\, 2'\, 31{,}387'' \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Gradmessung in Lappland:

$$\left.\begin{aligned} m' &= 92\,777{,}981 \text{ Toisen} = 180\,827{,}654 \text{ Meter} \\ \varphi_3 &= 65^\circ\, 31'\, 30{,}265 \qquad \varphi_4 = 67^\circ\, 8'\, 49{,}830'' \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Man bildet hieraus die Differenzen und die Mittel:

$$\Delta\varphi = 3^\circ\, 7'\, 3{,}455'' \qquad \Delta\varphi' = 1^\circ\, 37'\, 19{,}565''$$
$$= 11\,223{,}455'' \qquad = 5839{,}565''$$
$$\varphi = -\,1^\circ\, 31'\, 30{,}3405'' \qquad \varphi' = 66^\circ\, 20'\, 10{,}0475''$$

Nun rechnet man nach den angegebenen Formeln:

$$log \frac{m}{\Delta\varphi} = 1.487\,3610{\cdot}4 \qquad log \frac{m'}{\Delta\varphi'} = 1.490\,8843.5 \qquad log\, q^2 = 9.997\,6511{\cdot}3$$

$$e'^2 = \frac{1 - 0{,}994\,606{\cdot}119}{0{,}993\,901\,593 - 0{,}161\,096\,660} = 0{,}006\,476\,764$$

$$log\, V^2 = 0.002\,8017{\cdot}7 \qquad log\, V'^2 = 0.000\,4529{\cdot}0$$

$$log\, c = 6.805\,9888{\cdot}4 \qquad log\, a = 6.804\,5869{\cdot}6 \qquad log\, b = 6.803\,1850{\cdot}8$$

$$\alpha = 1 : 310{,}29534 \qquad Q = 10\,000\,157 \text{ Meter} \tag{14}$$

Wenn man statt e'^2 zuerst e^2 haben will, so kann man dieses aus (7) ableiten, denn es ist nach (5) § 31. S. 189, mit Anwendung auf (7):

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} = \frac{1 - q^2}{sin^2\varphi' - q^2 \, sin^2 \varphi} \tag{15}$$

Auf dieselbe Formel wird man auch unmittelbar dadurch geführt, dass man von vornherein statt c und e'^2 und V^2 mit den Konstanten a, e^2 und W^2 rechnet:

$$W^2 = 1 - e^2 \, sin^2 \varphi \qquad W'^2 = 1 - e^2 \, sin^2 \varphi' \tag{16}$$

Wenn man dieses ebenso behandelt, wie früher (3) — (6), so wird man auf (16) geführt, worauf aus (17) auch a mit Probe folgt.

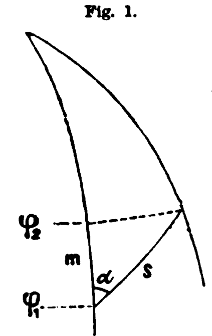
Berechnungen von solcher Art spielten eine wichtige Rolle in der Zeit der Gradmessungen des vorigen Jahrhunderts (vgl. Einleitung S. 7); heute ist dieses nicht mehr der Fall, indem die Frage nach den Erddimensionen jetzt in anderer Form auftritt.

§ 115. Reduktion eines Gradmessungs-Bogens auf den Meridian.

Wir haben die am Eingange des vorigen § 114. berührte Aufgabe nun nachzuholen, nämlich Berechnung des Meridianbogens m, welcher einem schief gegen den Meridian gelegten Gradmessungs-Bogen s zwischen den Breiten der Endpunkte entspricht. Oder im Anschluss an die nachfolgende Fig. 1. haben wir die Aufgabe, den Meridianbogen m zu berechnen, welcher zwischen denselben Breiten φ_1 und φ_2 liegt, wie ein schief gelegter Bogen $AB = s$, dessen Richtung wenigstens durch *ein* Azimut α bestimmt ist.

Der Bogen s kann unmittelbar gemessen sein, im allgemeinen ist aber anzunehmen, dass dieser Bogen s als lange Diagonale einer Triangulierungskette nach Art von AB in Fig. 2. S. 388 oder Fig. 3. S. 389 berechnet sei, wobei die Haupterstreckung AB nach dem Meridian gerichtet ist. Dabei ist angenommen, dass auch das Azimut α, dessen astronomische Messung nicht geradezu auf die Sicht der Linie s gemacht werden konnte, durch Rechnung auf s bezogen wurde.

Fig. 1.



Hiernach kann man das Ergebnis s mit einem Azimut α (oder mit zwei Azimuten α_1, α_2, nach Fig. 3. S. 571) als geodätische Linie mit geodätischen Azimuten betrachten, und als solche weiter behandeln.

Wir betrachten nun zuerst nach Fig. 1. den einfachen Fall, dass nur *ein* Azimut α gemessen sei; wir wollen dann aber als Erleichterung andererseits annehmen, dass dieses α ziemlich *klein* sei, d. h. dass der Gradmessungs-Bogen s nahezu die Meridianrichtung habe, was ja bei reinen Breitengrad-Messungen von vornherein angestrebt wird.

Zwischen $\varphi_2 - \varphi_1$, s und α besteht eine Beziehung, welche in erster Näherung durch die zwei ersten Glieder von (25) S. 395 ausgedrückt wird, nämlich:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = V^2 \left(u - \frac{v^2}{2} t\right) \tag{1}$$

Dabei ist nach (22) und (23) S. 394:

$$V^2 = \frac{N}{M} \quad , \quad u = \frac{s}{N} \cos \alpha \quad , \quad v = \frac{s}{N} \sin \alpha \quad , \quad t = \operatorname{tang} \varphi_1$$

also:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{s}{M} \cos \alpha - \frac{s^2}{2\,M\,N} \sin^2 \alpha \operatorname{tang} \varphi_1$$

Dieselbe Gleichung auf den Meridianbogen m angewendet, giebt mit $\alpha = 0$:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{m}{M}$$



Dieses mit der vorhergehenden Gleichung verbunden giebt:

$$m = s \cos \alpha - \frac{s^2}{2N} \sin^2 \alpha \tang \varphi_1 + \ldots \tag{2}$$

Für den Quer-Krümmungs-Halbmesser N, der hier als Nenner nur im zweiten Gliede vorkommt, kann man einen abgerundeten Näherungswert nehmen. Wenn das Azimut α ziemlich klein ist, so wird das zweite Glied mit $\sin^2 \alpha$ sehr klein, und es ist dann ziemlich gleichgiltig, wie der hiebei nötige Näherungswert N angenommen wird.

Man könnte die Formel (2) leicht auch noch auf höhere Glieder entwickeln, indem man bei (1) weitere Glieder von (25) S. 395 berücksichtigte; wir wollen das aber hier nicht ausführen, sondern ein einfaches Zahlen-Beispiel vornehmen, bei welchem die Reduktionsformel (2) völlig ausreicht.

Als solches Beispiel soll die durch Einfachheit sich auszeichnende pennsylvanische Gradmessung dienen, welche im vorigen Jahrhundert, 1764—1768, von Mason und Dixon nicht durch Triangulierung, sondern durch unmittelbare Lattenmessung ausgeführt wurde, wie wir schon in der Einleitung S. 6. angegeben haben.

Die Haupt-Zahlenangaben über diese merkwürdige Messung wurden von Prof. J. Howard Gore in Washington in der „Zeitschr. f. Verm. 1888", S. 33—39 mitgeteilt, woraus wir folgendes entnehmen:

Fig. 2.
Pennsylvanische Gradmessung (1764—1768).

$\varphi_2 = 39° \; 56' \; 19''$

$m' = 32010{,}24^m$

(39° 39′)

$s = 132327{,}16^m$ $\qquad m = 132042{,}98^m$

$\alpha = 3° \; 43' \; 30''$

$\varphi_1 = 38° \; 27' \; 34''$

$\varphi_2 - \varphi_1 = 1° \; 28' \; 45''$ $\qquad m' + m = 164053{,}22^m$

Die Hauptmessung erfolgte in der Geraden $A B$, welche von dem südlichsten Punkte A mit der astronomisch gemessenen Breite $\varphi_1 = 38° \; 27' \; 34''$ unter dem Azimut $\alpha = 3° \; 43' \; 30''$ sich bis zu einem Punkte B erstreckt, dessen Breite nicht astronomisch gemessen ist ($39° \; 39'$ durch nachträgliche Interpolation). Dann wurde noch ein gebrochener Zug $B\,D\,C\,P\,N$ hinzugemessen bis zu dem nördlichsten Punkte N, dessen astronomisch gemessene Breite $\varphi_2 = 39° \; 56' \; 19''$ ist.

Als gemessene Längen sind angegeben: erstens die schiefe Hauptlänge $s = 434\,011{,}64$ Fuss und die Summe der zwei unmittelbaren Meridianbögen $G\,C + P\,N = 104\,988{,}4$ Fuss. (In Fig. 2. S. 569 soll $B\,G\,R$ den Parallelkreis von B, und $C\,P$ ein kleines Stück des Parallels von C vorstellen.)

Dazu wird angegeben, dass der hier benützte englische Fuss $= \frac{107}{144}$ Pariser Fuss sei, woraus man berechnet 1 Fuss $= 0{,}304\,893\,06$ Meter.

Der heutige englische Fuss ist kleiner, nämlich $= 0{,}304\,797\,27^m$. Die in unserer Einleitung S. 7 angegebene Reduktion $434\,011{,}64$ Fuss $= 132\,286$ Meter beruht auf dem neuen Verhältnis 1 Fuss $= 0{,}304\,797\,27^m$.

Mit dieser Verhältniszahl rechnen wir die beiden mitgeteilten Entfernungen in Meter um, wie auch bei Fig. 2. S. 569 beigeschrieben ist:

$$m' = 104\,988{,}4 \text{ Fuss} = 32\,010{,}24^m \text{ und } s = 434\,011{,}64 \text{ Fuss} = 132\,327{,}16^m \tag{3}$$

Nun kommt die Hauptaufgabe, welche uns hier beschäftigt, nämlich die schiefe Länge s auf die Meridianlänge zu reduzieren, wozu die Formel (2) dient. Dabei ist einzusetzen $s = 132\,327{,}16^m$, $\alpha = 3° \; 43' \; 30''$, $\varphi_1 = 38° \; 27' \; 34''$ und nach Seite [16] des Anhangs genähert $\log N = 6.80521$. Die Ausrechnung giebt:

$$m = 132\,047{,}60^m - 4{,}62^m = 132\,042{,}98^m \tag{4}$$

Die beiden Teile dieser Rechnung sind in Fig. 2. S. 569 geometrisch veranschaulicht, es ist nämlich:

$$A\,t = s \cos \alpha = 132\,047{,}60^m \text{ und } t\,R = 4{,}62^m, \text{ also } m = A\,R = A\,t - t\,R \tag{5}$$

Nun hat man den gesamten Gradmessungs-Meridianbogen zwischen den Parallelen von A und N nach (3) und (4):

$$m' + m = 164\,053{,}22^m \tag{6}$$

Hiezu die beiden astronomisch gemessenen Breiten:

$$\begin{array}{l} \varphi_2 = 39° \; 56' \; 19'' \\ \varphi_1 = 38° \; 27' \; 34'' \end{array} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = 1° \; 28' \; 45'' = 5325'' \tag{7}$$

$$\text{Mittel } \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi = 39° \; 11' \; 56{,}5'' \tag{8}$$

Aus (6) und (8) erhält man den Meridiangrad für die Mittelbreite φ:

$$G = \frac{3600''}{5325''} \, 164\,053{,}22^m = 110\,909{,}22^m \tag{9}$$

(Diese pennsylvanische Gradmessung wurde von Laplace, Airy und Schubert zur Berechnung der Erddimensionen mit benützt, aber nicht von Bessel und Clarke.)

Nachdem wir an diesem geschichtlich-interessanten Beispiel die Reduktion eines Gradmessungs-Bogens mit *einem* Azimut behandelt haben, gehen wir zu dem Falle über, dass *zwei* Azimute gemessen sind, nämlich α_1 und α_2 in Fig. 3. S. 571.

Hiezu haben wir von § 77. (21) S. 405 die Gleichung für Mittelbreite φ:

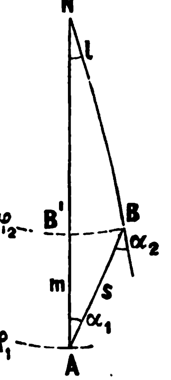
$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = \frac{s}{N} \cos \alpha \left(1 + \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{24} (2 + 3\,t^2 + 2\,\eta^2) + \frac{b^2}{8\,V^4} \eta^2 (t^2 - 1 - \eta^2 - 4\,\eta^2 t^2)\right) \tag{10}$$

Dieselbe Formel gilt auch für den Meridianbogen m, wenn das mittlere Azimut $\alpha = 0$ und auch der Längenunterschied $l = 0$ gesetzt wird, also:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = \frac{m}{N}\left(1 + \quad .. \quad + \frac{b^2}{8\,V^4}\,\eta^2\,(t^2 - 1 - \eta^2 - 4\,\eta^2 t^2)\right) \tag{11}$$

Nun giebt die Division von (10) und (11):

$$m = s\cos\alpha\left(1 + \frac{l^2\cos^2\varphi}{24}\,(2 + 3\,t^2 + 2\,\eta^2)\right) \tag{12}$$



Diese Formel kann man unmittelbar anwenden, wenn man für den geographischen Längenunterschied l einen Näherungswert einsetzt und φ als Mittelbreite annimmt (auch in $\eta^2 = e'^2\cos^2\varphi$).

Man kann jedoch auch in erster Näherung nach (16) § 77. S. 404 setzen:

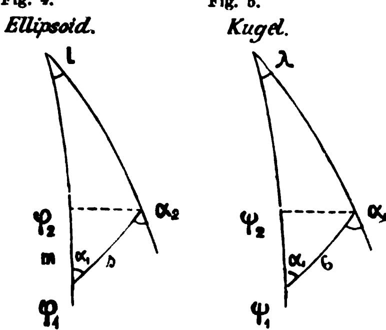
$$l\cos\varphi = \frac{s}{N}\sin\alpha \tag{13}$$

Damit giebt (12):

$$m = s\cos\alpha\left(1 + \frac{s^2\sin^2\alpha}{24\,N^2}\,(2 + 3\,t^2 + 2\,\eta^2)\right) \tag{14}$$

Für N^2 und η^2 genügen hier irgend welche leicht zu beschaffende Näherungswerte.

Die soeben entwickelte Formel (14) wird wohl in den meisten Fällen ausreichen, und man könnte sie auch wohl auf dem betretenen Wege noch weiter treiben; wir wollen aber noch eine andere Form nach Bessel geben, wobei reduzierte Breiten benützt werden.



Wenn wir zu Fig. 4., welche unsere Aufgabe auf dem Ellipsoid veranschaulicht, auch die Übertragung auf die Kugel mit reduzierten Breiten nach § 103. vornehmen, so bekommen wir zu Fig. 4. noch die entsprechende Fig. 5., welche dieselben Azimute wie Fig. 4. und im übrigen sphärische Masse enthält, die wir nach § 106 behandeln können. Wir wollen jedoch die Entwicklung hiezu, welche in unserer 3. Auflage dieses Bandes, 1890 in § 103, S. 503—505 ausführlich gegeben war, hier nicht wiederholen, weil solche Aufgaben in der Neuzeit immer weniger Anwendung finden.

Das Schlussergebnis unserer berichteten Entwicklung ist:

$$m = s\,\frac{\cos\dfrac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}}\left\{\begin{aligned} &1 + \frac{s^2\sin^2\alpha}{12\,a^2}\,(1 + e'^2\cos(\varphi_1 + \varphi_2)) \\ &\qquad - \frac{s^4\sin^2\alpha}{240\,a^4}\left(-2 + 3\cos^2\alpha + 5\cos^2\alpha\tang^2\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Dieses ist im wesentlichen die Formel, welche von Bessel im 14. Bande der „Astr. Nachrichten 1837“, S. 310, in der „Gradmessung in Ostpreussen“ 1838, S. 446 und in General Baeyers „Messen auf der sphäroidischen Oberfläche“ 1862, S. 48 angegeben wurde.

Fig. 6.
Süd-Ende der französisch-spanischen Gradmessung von 1792. Massstab 1 : 10000000).

Matas $\varphi_2 = 41° \; 30' \; 29{,}04''$
$\alpha_2 = 11° \; 26' \; 1{,}71''$

$$\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = 40° \; 5' \; 12{,}575''$$

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = 11° \, 11' \; 52{,}325''$$

$\alpha_1 = 10° \; 57' \; 42{,}94''$
Mola $\varphi_1 = 38° \; 39' \; 56{,}11''$

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = 0° \; 14' \; 9{,}385''$$

Zu einem Zahlen-Beispiel für die Anwendung der Formel (15) nehmen wir entsprechend vorstehender Fig. 6. eine Mitteilung von Bessel „Astr. Nachr., 19. Band, 1841“, S. 112—114, über seine Neuberechnung des südlichen Teiles der alten französisch-spanischen Gradmessung von Dünkirchen bis zu den balearischen Inseln. Der nördliche Punkt Matas liegt an der spanischen Küste bei Barcelona, und der südliche Punkt Mola ist der südlichste Gradmessungspunkt auf der Insel Formentera.

Aus der Triangulierung hat Bessel die geodätische Linie zwischen Matas und Mola, $s = 165\,108{,}586$ Toisen oder $= 321\,802{,}629^m$ berechnet, sowie auch die Azimute α_1 und α_2 reduziert, welche nebst den Breiten φ_1 und φ_2 bei Fig. 6. eingeschrieben sind.

Wenn man damit die Ausrechnung nach der Formel (27) macht, so findet man:

$$m = 315\,678{,}950^m + 2{,}529^m - 0{,}001^m = 315\,681{,}478^m$$

Das letzte Glied der Formel (15) bringt also hier nur 1 Millimeter; dieses Glied wird wohl immer zu vernachlässigen sein.

§ 116. Ausgleichung mehrerer Breiten-Gradmessungen.

Indem wir unserer Einleitung S. 7—10 folgen, kommen wir zu der Bestimmung der Dimensionen des Erd-Ellipsoids aus mehr als zwei Breiten-Gradmessungen, oder zu der Ausgleichung mehrerer Breiten-Gradmessungen nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Man geht dabei von der Anschauung aus, dass die astronomische Messung der Polhöhen φ verhältnismässig viel ungenauer ist, als die geodätische Messung der Meridianbögen m, denn ein Fehler von 1″ an der Polhöhe oder Breite φ erzeugt bereits eine Änderung von etwa 31 Meter an dem Meridianbogen m, während der mittlere Fehler der geodätischen Meridianbogen-Messung ein viel geringerer ist.

Allerdings überzeugte man sich bald, dass auch die Messungsfehler der Polhöhen φ nicht genügten zur Erklärung der Widersprüche in den verschiedenen Gradmessungen; allein man behielt doch die Form der Ausgleichungs-Rechnung, wonach die Quadratsumme aller Polhöhen-Änderungen zu einem Minimum gemacht wurde, noch lange bei,



obgleich man wusste, dass die Polhöhen-Widersprüche zum grossen Teil gar nicht in Messungsfehlern, sondern in Lotabweichungen ihren Grund haben. Die Methode der kleinsten Quadrate hat bei solcher Anwendung nur die Bedeutung einer empirischen Vermittlung widerstrebender Elemente, und die dabei übrig bleibenden Fehler v geben erste Fingerzeige, an welchen Stellen Lotablenkungen zu suchen sind.

Wir wollen nun einen Teil einer solchen Ausgleichung von Breiten-Gradmessungen vornehmen, und dazu die von Bessel 1837—1841 gesammelten und gesichteten Gradmessungs-Ergebnisse benützen, aus welchen Bessel 1841 seine berühmten, heute noch benützten Erddimensionen (vgl. S. 190) abgeleitet hat.

Wir wollen aber nicht die Besselsche Rechnung selbst hier vorführen, sondern wir wollen nur einige Zahlenwerte derselben herausgreifen, um daran den Rechnungsgang zu zeigen.

Von der französischen Gradmessung sollen folgende 5 Stationen benützt werden:

Station	Polhöhe φ	$\Delta\varphi$	Meridianbogen	
1. Formentera	$\varphi_1 = 38° \; 39' \; 56{,}1''$	. .	. .	(1)
2. Barcelona	$\varphi_2 = 41 \; 22 \; 47{,}9$	$2° \; 42' \; 51{,}8''$	301 354^m	
3. Carcassonne	$\varphi_3 = 43 \; 12 \; 54{,}3$	4 32 58,2	505 137	
4. Pantheon	$\varphi_4 = 48 \; 50 \; 49{,}4$	10 10 53,3	1 131 050	
5. Dünkirchen	$\varphi_5 = 51 \; 2 \; 8{,}8$	12 22 12,7	1 374 572	

Um die Fehler-Gleichungen für eine Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen zu erhalten, legen wir die Besselschen Erd-Dimensionen a und e^2 nach § 81. S. 193 zu Grunde, und bestimmen solche Verbesserungen von a und von e^2, welche die Quadratsumme aller an den Polhöhen φ anzubringenden Verbesserungen zu einem Minimum machen.

Dazu müssen wir zuerst Beziehungen zwischen den Polhöhen-Differenzen $\Delta\varphi$ und den zugehörigen Meridianbögen m ermitteln; und um hiebei einfache Rechnung zu haben, verfahren wir nach dem Satze von § 35. S. 210, welcher sagt, dass man einen Meridian-Bogen m als Kreisbogen berechnen darf, mit dem Meridian-Krümmungs-Halbmesser M der Mittelbreite und mit dem Centriwinkel $\Delta\varphi$. Da wir die Breiten φ auf 0,1″, entsprechend 3 Meter, abgerundet haben, so ist die angegebene Näherung zulässig.

Die zwei ersten gemessenen Polhöhen φ_1 und φ_2 sind mit dem dazwischen liegenden Meridianbogen m verbunden durch die Beziehung:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{m}{M}\varrho$$

wobei nach (17) und (15) S. 196 für M die Formel gilt:

$$\frac{1}{M} = \frac{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{a(1 - e^2)} \text{ mit } \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \tag{2}$$

Da die hier vorkommenden Erddimensionen a und e^2 für unsere Ausgleichung die Unbekannten sind, zerlegen wir dieselben in Näherungswerte a_0 und e_0^2 mit zugehörigen Verbesserungen δa und δe^2, d. h. wir setzen:

$$a = a_0 + \delta a \qquad e^2 = e_0^2 + \delta e^2 \tag{3}$$

Wir bezeichnen auch mit M_0 denjenigen Wert von M, welcher durch die Näherungs-Annahmen $a = a_0$ und $e^2 = e_0^2$ entsteht; und demnach entwickeln wir nach dem Taylorschen Satz:

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M_0} + \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{M}\right)\delta a + \frac{\partial}{\partial e^2}\left(\frac{1}{M}\right)\delta e^2 \tag{4}$$

Die beiden hier gebrauchten partiellen Ableitungen der Funktion $\frac{1}{M}$ entwickeln wir nur in erster Näherung, nach (2), mit Vernachlässigung aller Glieder mit e^2:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{M}\right) = -\frac{1}{a^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial e^2}\left(\frac{1}{M}\right) - \frac{1}{a}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varphi\right) \tag{5}$$

Nun kann man zur Bildung der Fehler-Gleichungen schreiten. Die Gleichung (1), welche wegen der Beobachtungsfehler im allgemeinen nicht erfüllt sein wird, wird dadurch zum Stimmen gebracht, dass den beobachteten φ_1 und φ_2 ihre Verbesserungen v_1 und v_2 zugesetzt werden, also:

$$\varphi_2 - \varphi_1 + v_2 - v_1 = m\varrho\left(\frac{1}{M}\right) \tag{6}$$

Wenn man hier (4) und (5) einsetzt, so bekommt man:

$$\varphi_2 - \varphi_1 + v_2 - v_1 = m\varrho\left\{\frac{1}{M_0} - \frac{\delta a}{a^3} + \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varphi\right)\frac{\delta e^2}{a}\right\} \tag{7}$$

Hier darf man in den Gliedern mit δa und mit δe^2 statt der Unbekannten a, deren Näherungswert a_0 setzen; ja wir wollen sogar, da ohnehin schon alle Glieder mit e^2 in den Coëfficienten von δa und δe^2 vernachlässigt sind, hier $a = M$, also nach (1) das Produkt $\frac{m\varrho}{a} = \frac{m\varrho}{M} = \varphi_2 - \varphi_1$ setzen, und damit wird (7):

$$v_2 - v_1 = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{a_0}\delta a + \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varphi\right)(\varphi_2 - \varphi_1)\,\delta e^2 + \frac{m\varrho}{M_0} - (\varphi_2 - \varphi_1) \tag{8}$$

Um bequeme Zahlen zur Rechnung zu bekommen, wollen wir nicht δa und δe^2 selbst bestimmen, sondern von δa das Tausendel und von δe^2 das Tausendfache; d. h. wir wollen zwei neue Unbekannte x und y einführen durch die Gleichungen:

$$x = \frac{\delta a}{1000} \qquad y = 1000\,\delta e^2 \tag{9}$$

Dieses in (8) eingesetzt, wird geben:

$$v_2 - v_1 = a'x + b'y + l' \tag{10}$$

wobei a', b' und l' folgende Bedeutungen haben:

$$a' = -1000\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{a_0} \qquad b' = +\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{1000}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varphi\right) \tag{11}$$

$$l' = \frac{m\varrho}{M_0} - (\varphi_2 - \varphi_1) \tag{12}$$

Als Näherungswerte a_0 und e_0^2 nehmen wir die bekannten Besselschen, vom Jahre 1841 nach § 31. S. 193, nämlich:

$$\left.\begin{array}{ll} a_0 = 6\,377\,397{,}155^{\text{m}} & \log a_0 = 6.804\,6434.6 \\ e_0^2 = 0{,}006\,674\,372 & \log e_0^2 = 7.824\,4104.2 \end{array}\right\} \tag{13}$$

Wir werden dadurch die Annehmlichkeit haben, dass unsere Absolutglieder l' in (12) geradezu gleich den Besselschen endgiltigen $v_2 - v_1$ u. s. w. werden; doch wollen wir hier davon zunächst keinen Gebrauch machen, sondern die Anwendung der Formeln (10), (11), (12) an den zwei ersten Werten der Tabelle (1) von S. 573 zeigen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Formentera } \varphi_1 = 38°\,39'\,56{,}1'' & \\ \text{Barcelona } \varphi_2 = 41°\,22'\,47{,}9'' & m = 301\,354^{\text{m}} \\ \hline \varphi_2 - \varphi_1 = 2°\,42'\,51{,}8'' = 9771{,}8'' & \\ \text{Mittel } \varphi = 40°\;\;1'\,22{,}0'' & \end{array}\right\} \tag{14}$$

Damit man nach den Formeln (11) sofort berechnen:

$$a' = -1{,}532 \qquad b' = +3{,}709 \tag{15}$$

Auch die Berechnung von l nach (12) hat keine Schwierigkeit, indem dabei M_0 derjenige Wert ist, welcher den Werten a_0 und e_0^2 von (13) entspricht, d. h.:

$$M_0 = \frac{a_0\,(1 - e_0^2)}{(1 - e_0^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad \log M_0 = 6.803\,5358 \tag{16}$$

Indessen können wir wohl auch den günstigen Umstand ausnützen, dass die a_0 und e_0^2 von (13) die bekannten Besselschen sind, welche auch unseren Hilfstafeln S. [8]—[29] des Anhangs zu Grunde liegen; und wir können daher, statt nach (16) $\log M_0$ auszurechnen, dasselbe auch von Seite [18] des Anhangs entnehmen, oder lieber noch sofort von Seite [19]:

für $\varphi = 40°\ 1'\ 22''$ $\quad \log[1] = \log \dfrac{\varrho}{M_0}$	8.510 8893	
hiezu von (14) $\log m = \log 301\,354$	5.479 0770	
$\log \dfrac{m\,\varrho}{M_0}$	3.989 9663	$\dfrac{m\,\varrho}{M_0} = 9771{,}6''$

hiezu von (14) $\varphi_2 - \varphi_1 = 9\,771{,}8''$

also $l' = \ -0{,}2''$ (17)

Nimmt man dieses mit (15) zusammen, so hat man die erste Gleichung von der Form (10):

$$v_2 - v_1 = -1{,}53\,x + 3{,}71\,y - 0{,}2'' \tag{18}$$

Nachdem wir so die Aufstellung einer Gleichung mit Ausrechnung der Coëfficienten und des Absolutgliedes in aller Ausführlichkeit gezeigt haben, werden wir das Ergebnis der Berechnung für die 4 übrigen, welche zu den bei (1) angegebenen französischen Gradmessungen gehören, kurz anschreiben.

Fehlerdifferenz-Gleichungen.

Formentera-Barcelona	$v_2 - v_1 = -1{,}53\,x + 3{,}71\,y - 0{,}2''$	(19)
„ -Carcassone	$v_3 - v_1 = -2{,}57\,x + 5{,}83\,y - 1{,}4$	
„ -Pantheon	$v_4 - v_1 = -5{,}75\,x + 10{,}36\,y - 2{,}1$	
„ -Dünkirchen	$v_5 - v_1 = -6{,}98\,x + 11{,}31\,y + 1{,}2$	

Ähnliche Gleichungsgruppen entstehen auch für alle anderen Gradmessungen, Bessels Ausgleichung hat im Ganzen 10 solcher Gleichungsgruppen mit zusammen $38 - 10 = 28$ solcher Gleichungen, wie aus unserer Zusammenstellung von § 1. S. 9 unten zu ersehen ist, wozu wir aber bemerken, dass schon in der Gruppe (1) nur 5 Stationen aufgenommen sind, während nach S. 9 die Zahl der französischen Stationen 7 ist; wir haben deren 2 weggelassen.

Die Gleichungen (19) sind keine Fehler-Gleichungen in dem gewöhnlichen Sinne, weil in jeder Gleichung zwei Verbesserungen v auftreten. Die Trennung der v geschieht dadurch, dass man für jede Gradmessung eine Polhöhen-Verbesserung v selbst als Unbekannte einführt. Der Fall ist ganz entsprechend der Ausgleichung geodätischer Richtungsmessungen, wo man auch für jeden Satz von Messungen eine Nullpunkts-Korrektion als Unbekannte einführen muss.

Auf diese Weise entstehen aus den 4 Gleichungen (19) folgende 5 wirkliche Fehlergleichungen:



$$\left.\begin{array}{lllll} v_1 = v_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_2 = v_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & -1{,}53\,x & +\ 3{,}71\,y & -0{,}2'' \\ v_3 = v_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & -2{,}57\,x & +\ 5{,}83\,y & -1{,}4'' \\ v_4 = v_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & -5{,}75\,x & +10{,}36\,y & -2{,}1'' \\ v_5 = v_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & -6{,}98\,x & +11{,}31\,y & +1{,}2'' \end{array}\right\} \quad (20)$$

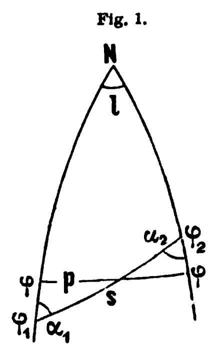
Jede der 10 Gradmessungen giebt eine solche Gruppe von Fehlergleichungen, und da jede Gradmessung eine besondere Unbekannte v hereinbringt, wie z B. v_1 in der Gruppe (20), so überblickt man, dass die Zahl aller Umbekannten $= 10 + 2$ sein muss, nämlich die 10 besonderen v und dann die 2 eigentlichen Unbekannten x und y.

Nun steht nichts im Wege, die zugehörigen 12 Normalgleichumgen zu bilden, aus denen man die 10 Hilfsunbekannten v so rasch als möglich eliminieren wird.

Da der Gang der Ausgleichung hierdurch genügend klar gemacht ist, wollen wir dabei abbrechen. Eine ausführlichere, auf die ganze Ausgleichung mit 6 Gradmessungen in Europa und mit zusammen 20 Stationen sich erstreckende Berechnung war in unserer 3. Auflage dieses Bandes 1890, § 104. S. 507—516, enthalten.

§ 117. Längen-Gradmessung.

Fig. 1.



Wenn man eine Triangulierungskette in der Haupterstreckung von West nach Ost anlegt, und die beiden Endpunkte durch eine astronomische Längen-Bestimmung verbindet, so erhält man eine Längen-Gradmessung.

Während in früherer Zeit, namentlich im vorigen Jahrhundert, wegen der grossen Unsicherheit der astronomischen Längen-Bestimmungen, diese Form der Gradmessung wenig Bedeutung hatte, ist jetzt, seit die elektro-telegraphischen Zeitübertragungen nahezu die Genauigkeit der Breitenmessungen erreicht haben, das Verhältnis ein anderes geworden, und die Längen-Gradmessungen sind jetzt den Breiten-Gradmessungen nahezu gleichberechtigt.

Um die Theorie der Längen-Gradmessung in ihren Grundzügen zu behandeln, brauchen wir nur die Gleichung (16) § 77. S. 404 für Mittelbreite φ vorzuführen:

$$l \cos \varphi = S \sin \alpha \left\{1 + \frac{S^2}{24}\left(\sin^2 \alpha\, t^2 - \cos^2 \alpha\, (1 + \eta^2 - 9\, \eta^2 t^2)\right)\right\} \tag{1}$$

Dabei ist noch (1a) S. 403, da $N = c : V$ die Bedeutung von S diese:

$$S = \frac{s}{c}\, V = \frac{s}{c} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad \text{und} \quad t = \tan \varphi \tag{2}$$

dazu auch
$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \qquad \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \tag{3}$$

Ausser dem astronomischen Längenunterschied l und dem geodätischen Bogen s sind auch noch die Breiten φ_1, φ_2 und die Azimute α_1, α_2 durch Messung zu bestimmen (vgl. Fig. 1.). Wenn die Messung unter niederen Breiten (in der Nähe des Äquators) stattfindet, braucht φ nicht sehr genau zu sein, und wenn der Bogen s wesentlich west-östliche Erstreckung hat (α nahezu $= 90°$), braucht α nicht sehr genau zu sein.

Die Ausrechnung nach der Formel (1) hat die Bedeutung einer Reduktion der geodätischen Linie s auf den Parallelkreis der Mittelbreite φ, und diese Reduktion spielt hier dieselbe Rolle wie die Reduktion einer Breiten-Gradmessung auf den Meridian, die wir in § 115. ausführlich für sich behandelt haben.

Wir denken nun die Reduktion nach (1) ausgeführt, und wir setzen zur Abkürzung:

$$s \sin \alpha \left\{1 + \left(\frac{s}{c} V\right)^2 \left(\sin^2 \alpha \, t^2 - \cos^2 \alpha (1 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2)\right)\right\} = p \tag{4}$$

Dann ist nach (1) und (2):

$$l \cos \varphi = \frac{p}{c} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \tag{5}$$

Hier erscheint der Parallelbogen p in gleicher Weise als gemessene Grösse wie der Meridianbogen m bei den Breiten-Gradmessungen.

Nun sollen zwei solcher Messungen p vorliegen, nämlich ausser (5) auch noch entsprechend:

$$l' \cos \varphi' = \frac{p'}{c} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi'} \tag{6}$$

Aus den Gleichungen (5) und (6) kann man die beiden Unbekannten e'^2 und c bestimmen; wir schreiben hiebei zur Abkürzung:

$$\frac{p \, l' \cos \varphi'}{p' \, l \cos \varphi} = q \tag{7}$$

Dann wird:

$$e'^2 = \frac{1 - q^2}{q^2 \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi'} \tag{8}$$

Dann mit Probe aus (5) und (6):

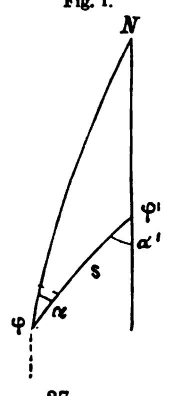
$$c = \frac{p}{l \cos \varphi} \sqrt{1 + e'^2 \cos \varphi} = \frac{p'}{l' \cos \varphi'} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi'} \tag{9}$$

Diese Gleichungen (7), (8), (9) sind ganz entsprechend den früheren für zwei Breiten-Gradmessungen gefundenen Gleichungen in § 114.

§ 118. Azimut-Übertragung.

Nachdem wir gesehen haben, dass die Excentricität der Meridian-Ellipse durch zwei Breiten-Gradmessungen bestimmt werden kann, und dass dieselbe Aufgabe auch durch zwei Längen-Gradmessungen gelöst wird, ist drittens noch zu zeigen, dass auch zwei Azimut-Messungen mit den zugehörigen Breiten und mit einer Triangulierungs-Verbindung, zur Bestimmung der Excentricität der Meridian-Ellipse führen.

Fig. 1.



Azimut-Messungen sind auch schon bei den Breiten-Gradmessungen und bei den Längen-Gradmessungen mit benützt worden, aber mehr nur als *Hilfs*-Messungen, zur Reduktion der gemessenen Bögen auf den Meridian oder rechtwinklig zum Meridian; dagegen bei der dritten Aufgabe, die wir nun vorhaben, sind die Azimute gerade die Hauptwerte der Messung.

Wenn man nach Andeutung von Fig. 1. die beiden Breiten φ, φ' und die beiden Azimute α, α' gemessen hat, so kann man zwischen diesen 4 Grössen einerseits, und der Excentrizität der Meridian-Ellipse andererseits, eine Beziehung herstellen durch Vermittlung der reduzierten Breiten.

Bezeichnen wir die reduzierten Breiten mit ψ und ψ', so ist nach (11) § 103. S. 519:

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi}{V\sqrt{1-e^2}} \qquad \cos\psi' = \frac{\cos\varphi'}{V'\sqrt{1-e^2}} \tag{1}$$

oder:

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi\sqrt{1+e'^2}}{V} \qquad \cos\psi' = \frac{\cos\varphi'\sqrt{1+e'^2}}{V'} \tag{1a}$$

Die reduzierten Breiten ψ und ψ' geben mit den Azimuten α und α' nach (1) § 104. S. 524 die Gleichung:

$$\cos\psi \sin\alpha = \cos\psi' \sin\alpha' \tag{2}$$

Dieses in Verbindung mit (1a) giebt:

$$\left(\frac{\cos\varphi' \sin\alpha'}{\cos\varphi \sin\alpha}\right)^2 = \frac{V'^2}{V^2} = \frac{1+e'^2\cos^2\varphi'}{1+e'^2\cos^2\varphi}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{\cos\varphi' \sin\alpha'}{\cos\varphi \sin\alpha} = q \tag{3}$$

so wird:

$$e'^2 = \frac{1-q^2}{q^2\cos^2\varphi - \cos^2\varphi'} \tag{4}$$

Damit hat man auch:

$$1+e'^2 = \frac{\sin^2\varphi' - q^2\sin^2\varphi}{q^2\cos^2\varphi - \cos^2\varphi'} = \frac{1}{1-e^2} \tag{5}$$

Man hat also in (3)—(5) abermals ein Gleichungs-System von derselben Form wie bei zwei Breiten-Gradmessungen in § 114 und bei zwei Längen-Gradmessungen in § 117.

Zu einem Zahlen-Beispiele nehmen wir:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Trunz} & \varphi' = 54^\circ\ 13'\ 11{,}466'' & & \alpha' = 67^\circ\ 26'\ 56{,}156'' \\ \text{Berlin} & \varphi\ = 52^\circ\ 30'\ 16{,}680'' & & \alpha\ = 62^\circ\ 31'\ 15{,}416'' \end{array}\right\} \tag{6}$$

Wenn man diese (6) in die Formeln (3), (4) und (5) einsetzt, so bekommt man:

$$\log q^2 = 9.999\,9152\cdot63 \quad , \quad e'^2 = \frac{0{,}000\,195\,095}{0{,}370\,440\,0839 - 0{,}341\,846\,755} \tag{7}$$

$$\log e'^2 = 7.833\,981 \quad , \quad \log(1+e'^2) = \log\frac{1}{1-e^2} = 9.997\,0468 \tag{8}$$

Damit ist die Excentricität der Meridian-Ellipse bestimmt. Man sieht aus den Gleichungen (3) und (4) unmittelbar, dass das ganze Verfahren unbrauchbar wird, wenn die beiden Punkte, in welchen die Breiten φ, φ' und die gegenseitigen Azimute α, α' gemessen werden, entweder auf demselben Meridian oder auf gleicher Breite liegen, denn im Meridian ist $\alpha = \alpha' = 0$, also $q = \frac{0}{0}$; und wenn $\varphi' = \varphi$ ist, so muss wegen (1) und (2), auch $\alpha' = \alpha$ werden, also wieder $q = \frac{0}{0}$, d. h. unbestimmt. Auch wenn φ und φ' beide klein sind, d. h. die Messung in der Nähe des Äquators stattfindet, versagt die Methode, weil dann α und α' sehr wenig verschieden sind, also q nahe $= 1$ und e'^2 nahezu $= \frac{0}{0}$.

Hiernach ist das Verfahren anwendbar in höheren Breiten mit Erstreckung schief zum Meridian.

Wenn ausser den astronomischen Messungs-Ergebnissen φ, φ', α, α' auch die Länge s der verbindenden geodätischen Linie bekannt ist, so kann man auch die Erdaxe bestimmen.

Wir können hiezu die Gleichung (17) § 106. S. 533 benützen, nämlich mit Einsetzung von S nach (10) S. 532:

$$\sigma \sqrt{1-e^2} = \frac{s}{c} V \left\{1 - \frac{\eta^2}{24}\left(2\left(\frac{s}{c} V \sin\alpha\right)^2 t^2 + \left(\frac{s}{c} V \cos\alpha\right)^2 (1-t^2+\eta^2+6\eta^2 t^2)\right)\right\}$$

Hier ist nach (9) S. 189 $c\sqrt{1-e^2} = a$, also giebt vorstehende Gleichung, mit Zusetzung des nötigen ϱ:

$$a = s\, V \frac{\varrho}{\sigma} \left\{1 - \frac{\eta^2}{24}\left(2\left(\frac{s}{c} V \sin\alpha\right)^2 t^2 + \left(\frac{s}{c} V \cos\alpha\right)^2 (1-t^2+\eta^2+6\eta^2 t^2)\right)\right\} \qquad (9)$$

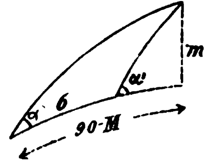
Es kommt also nur noch darauf an, σ zu berechnen, und das ist eine rein sphärische Aufgabe, welche mit Hilfe der Fig. 2. bzw. der ausführlicheren Fig. 2. in § 105. S. 525 gelöst wird.

Als Vorbereitung hiezu berechnet man die beiden reduzierten Breiten ψ und ψ', wobei der zuvor in (5) und (7) ermittelte Excentricitätswert e bzw. e' zu benützen ist.

$$tang\,\psi = \sqrt{1-e^2}\, tang\,\varphi \quad , \quad tang\,\psi' = \sqrt{1-e^2}\, tang\,\varphi' \qquad (10)$$

Nun hat man in dem sphärischen Dreieck von Fig. 2. vier Stücke gegeben, nämlich ψ, ψ', α, α''; die Berechnung von σ ist also nicht bloss bestimmt, sondern sogar überbestimmt, wodurch eine Rechenprobe entsteht, denn die reduzierten Breiten ψ und ψ' nach (10) beruhen auf derjenigen Excentricität e bzw. e', welche in (3)—(5) aus den 4 Grössen φ, φ', α, α' selbst abgeleitet worden ist. Würde also die Rechenprobe bei der Doppelbestimmung von σ nicht stimmen, so könnte der Grund entweder in der sphärischen Rechnung nach Fig. 2. oder aber auch in der vorhergehenden Berechnung der reduzierten Breiten nach (10) liegen.

Fig. 2.
(entsprechend Fig. 2. S. 525.)



Die zu der genannten sphärischen Berechnung von σ nach Fig. 2. nötigen Formeln können wir von § 105. S. 526 entnehmen; wir wollen dabei zwei Werte M einführen, den ersten zu ψ und α gehörig, den zweiten zu ψ' und α' gehörig, dann ist:

$$\sigma = M' - M \qquad (11)$$

Für M und M' hat man nach (2) S. 526:

$$tang\,M = \frac{tang\,\psi}{\cos\alpha} \quad , \quad tang\,M' = \frac{tang\,\psi'}{\cos\alpha'} \qquad (12)$$

Aus (12) und (11) hat man bereits das gewünschte σ. Die dazu gehörige, oben erwähnte Rechenprobe kann man auf verschiedene Art erlangen, z. B. durch Vermittlung des Bogens m, welcher für M und M' derselbe ist. Nach (2) und (3) S. 526 ist:

$$\sin m = \cos\psi \sin\alpha = \cos\psi' \sin\alpha'$$

dann:

$$\sin M = \frac{\cos m}{\sin\psi} \quad , \quad \sin M' = \frac{\cos m}{\sin\psi'} \qquad (13)$$

Damit hat man die zweite Bestimmung von M und M', als Versicherung für (12). Wenn aber M und M' erheblich grösser als 45° sind, so sind die Bestimmungen (13) nicht günstig; dann rechnet man lieber:

$$cotg\, \lambda_1 = tang\, M \sin m \quad , \quad cotg\, \lambda_2 = tang\, M' \sin m$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda$$

$$\sin \sigma = \frac{\sin \lambda \cos \psi'}{\sin \alpha} = \frac{\sin \lambda \cos \psi}{\sin \alpha'} \tag{14}$$

Die Anwendung dieser Formeln auf unser Beispiel (6) giebt:

Trunz $\psi' = 54°\ 7'\ 38{,}6482''$ $\alpha' = 67°\ 26'\ 56{,}152''$

Berlin $\psi = 52°\ 24'\ 37{,}8514''$ $\alpha = 62°\ 31'\ 15{,}416''$

$$M = 70°\ 26'\ 40{,}0950'' \qquad M' = 74°\ 29'\ 58{,}3496''$$

$$M' - M = \sigma = 4°\ 3'\ 18{,}2546'' \quad , \quad m = 32°\ 45'\ 50{,}2488'' \tag{15}$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda = 6°\ 8'\ 45{,}6806'' \quad , \quad \sigma = 4°\ 3'\ 18{,}2548'' \tag{16}$$

Die beiden Werte σ nach (15) und (16) stimmen unter sich hinreichend; wir haben mit dem Mittel $\sigma = 4°\ 3'\ 18{,}2547''$ weiter gerechnet, und damit aus (9) erhalten:

$$log\, \eta^2 = 7.385\,5669 \quad , \quad log\, V^2 = 0.001\,0593.6$$

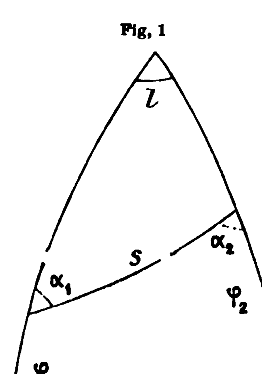
$$a = 6\,380\,516{,}074^m - 9{,}543^m + 0{,}448^m = 6\,380\,506{,}979^m \quad , \quad log\, a = 5.804\,8551{\cdot}88 \tag{17}$$

Die Korrektionsglieder von (9) haben also hier nur $9{,}5^m$ und $0{,}4^m$ ausgemacht, woraus zugleich zu ersehen ist, dass keine Wiederholung der Rechnung nötig ist wegen des in (9) vorläufig benützten $c = a\sqrt{1 + e'^2}$.

Der Grundgedanke, die Excentricität der Meridian-Ellipse aus einer Gradmessung schief zum Meridian zu bestimmen, ist zuerst von J. Tobias Mayer erfasst worden, wie aus „Astr. Nachr. 13. Band, 1836", S. 353, hervorgeht. Die erste Ausführung dieses Gedankens haben wir in der „Gradmessung in Ostpreussen" von Bessel, welcher in der Vorrede S. V—VI seines Werkes über diese Gradmessung Tobias Mayer citiert.

§ 119. Gradmessung schief zum Meridian.

Wenn man nach Fig. 1. eine geodätische Linie s (bzw. eine Dreieckskette) schief zum Meridian anlegt, am Anfangspunkt und am Endpunkt derselben die Azimute α_1, α_2 und die Breiten φ_1, φ_2 und endlich noch den Längenunterschied l astronomisch misst, so hat man alles das, was wir bisher als Breiten-Gradmessung, Längen-Gradmessung und Azimut-Übertragung getrennt behandelt haben, nun vereinigt; und da eine schiefe geodätische Linie mit Azimuten und Breiten an den Endpunkten nach § 118. hinreicht zur Bestimmung der Ellipsen-Dimensionen, so haben wir in der Vereinigung der 6 genannten Messungen bereits eine über das unmittelbare Bedürfnis hinausgehende Bestimmung der Erddimensionen.



Man kann sich dieses auch so klar machen: Ein sphärisches Dreieck von der Form Fig. 1. ist seiner Form nach bestimmt durch 3 Stücke, z. B. durch φ_1, φ_2, l; um auch den Halbmesser zu bestimmen, auf welchem das sphärische Dreieck liegen soll, braucht man ein viertes Stück, s linear gemessen. Geht man über zu einem Ellipsoid, auf welchem das Dreieck Fig. 1. liegen soll, so tritt eine weitere Unbekannte auf in der Excentricität, so dass nun 5 Messungsstücke erforderlich werden. Wenn also in Fig. 1. im ganzen 6 Stücke gemessen sind, so ist auch für das Ellipsoid noch *eine* Messung überschüssig, oder man hat es mit einer Ausgleichung zu thun.

Wie gewöhnlich wird diese Ausgleichung dadurch behandelt, dass man Näherungswerte der Erddimensionen einführt, und durch Differentiieren Beziehungen herstellt zwischen Verbösserungen jener Näherungswerte einerseits und Änderungen der beobachteten Grössen andererseits.

Man überblickt auch sofort, dass man *mehrere* solcher Systeme, wie das in Fig. 1. dargestellte, in eine Gesamtausgleichung zusammenfassen kann.

Dieses ist der Grundgedanke der heutigen internationalen Erdmessung. Eine wichtige Rolle spielen dabei die Lotabweichungen, von welchen wir im nächsten Kapitel XII noch das Nötigste behandeln werden.

Kapitel XII.

Lotabweichungen.

§ 120. Allgemeines über Lotabweichungen.

Anknüpfend an das, was wir schon in der Einleitung S. 11 über den Begriff der Lotabweichungen und des Geoids erwähnt haben, gehen wir nun zu näherer Betrachtung der Lotabweichungen über.

Wenn wir bei unseren Triangulierungen die unmittelbar gemessenen Grundlinien auf die Höhe des Meeres, (bzw. auf Normal-Null) reduzieren (vgl. S. 67), so legen wir damit unseren Messungen und Berechnungen eine ideale Erdoberfläche zu Grunde, welche, in erster Näherung, mit der Oberfläche der Weltmeere zusammenfallend, und unter den Kontinenten stetig fortgesetzt, angenommen wird.

Wenn wir ferner bei unseren geodätischen und astronomischen Winkelmessungen die vertikale Axe der Instrumente durch die Wasserwage einstellen, und die so erhaltenen Messungen in üblicher Weise weiter rechnerisch behandeln, so nehmen wir die durch die Wasserwage bestimmte Schwere-Richtung als geometrische Normale jener idealen Erdoberfläche an, und führen für diese Fläche ein Umdrehungs-Ellipsoid von gewissen Dimensionen in die Rechnung ein.

Nun haben aber schon die ersten zusammenfassenden Berechnungen der Gradmessungen ergeben, dass jene ideale Erdoberfläche nicht genau ein Ellipsoid ist, und man kann durch eine einfache physikalische Betrachtung zeigen, dass die ideale Erdoberfläche, welche wir den geodätischen Messungen und Berechnungen zu Grunde legen, kein Ellipsoid sein kann, weil auch die physische Erdoberfläche mit ihren Bergen und Thälern, Kontinenten und Meeren, selbst nicht ellipsoidisch ist.

Die Schwerkraft, welche auf einen Punkt (bzw. ein Massen-Element) an der Erdoberfläche einwirkt, ist die Resultante der Anziehungen, welche alle einzelnen Massenteile des Erdkörpers auf den Punkt ausüben, in Verbindung mit der Einwirkung der Centrifugalkraft.

Zwischen zwei Massenteilen m_1 und m_2, welche sich im Abstand r von einander befinden, besteht eine Anziehung, welche proportional $\frac{m_1\, m_2}{r^2}$ ist.



In Fig. 1. unten, ist die Erde kugelförmig angenommen, und über die kugelförmige Erdoberfläche soll eine Gebirgsmasse m hervorragen. Wenn es sich um Bestimmung der Lotrichtung in einem ausserhalb der kugelförmigen Erdoberfläche liegenden Punkte A handelt, so kann man die ganze Masse der Erde im Erdmittelpunkt konzentriert annehmen. (Der Beweis für die Zulässigkeit dieser Annahme lässt sich in elementarer Weise aus der Definition der Gravitation herleiten.) Es sei nun M die Masse der Erde und m die Masse eines Gebirges, dann bekommt man für einen Punkt A, dessen horizontaler Abstand von dem Schwerpunkt des Gebirges $= r$ ist, eine durch das Gebirge erzeugte Lotabweichung Θ, entsprechend der Gleichung:

$$tang\ \Theta = \frac{m}{r^2} : \frac{M}{R^2} = \frac{m\,R^2}{M\,r^2} \tag{1}$$

Fig. 1.
Lotabweichung Θ.

Das Volumen der Erde ist $= \frac{4}{3}\pi R^3$, und wenn γ die mittlere Dichte der Erde ist, so hat man die Masse der Erde:

$$M = \frac{4}{3}\gamma \pi R^3 \tag{2}$$

Das Volumen des Gebirges sei V, dessen Dichte sei δ, dann ist die Gebirgs-Masse:

$$m = V\delta \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) findet man die Lotabweichung Θ als kleinen Winkel:

$$\Theta = \frac{3}{4}\,\frac{\delta}{\gamma}\,\frac{V}{Rr^2}\,\frac{\varrho}{\pi} \tag{4}$$

Nach Listing „Neue geometrische und dynamische Konstanten des Erdkörpers", aus den „Nachr. der Königl. Gesellsch. der Wissensch., Göttingen 1878", S. 61, ist die mittlere Dichte der Erde: $\gamma = 5{,}63$; der mittlere Erdhalbmesser ist in runder Zahl (nach S. 225): $R = 6\,370\,000^m$. Setzt man dieses in (4) ein, so erhält man:

$$\Theta = 0{,}001373\,\frac{V\delta}{r^2} \text{ in Sekunden} \tag{5}$$

Dabei ist V das Volumen des Gebirges in Kubikmetern und r die Entfernung in Metern zu nehmen.

Als Beispiel nehmen wir die summarische Schätzung des Einflusses des nördlichen Schwarzwaldes mit dem Zentralpunkt Hornisgrinde auf die meridionale Lotrichtung in Durlach. Das Volumen dieses Gebirgsstocks stellt sich ungefähr dar als Produkt von $65\,000^m$ Breite, $43\,000^m$ Länge und 800^m Höhe; die mittlere Entfernung von Durlach mag $r = 46\,000^m$ angenommen werden und die Dichte $\delta = 2{,}3$ (bunter Sandstein und Granit). Mit diesen Zahlen bekommt man aus (5):

$$v = 3{,}3''$$

Durch eine ähnliche Überschlagsrechnung bekommt man für den südlichen Schwarzwald 1,0″ und für die schwäbische Alb 1,6″ zusammen 5,9″.

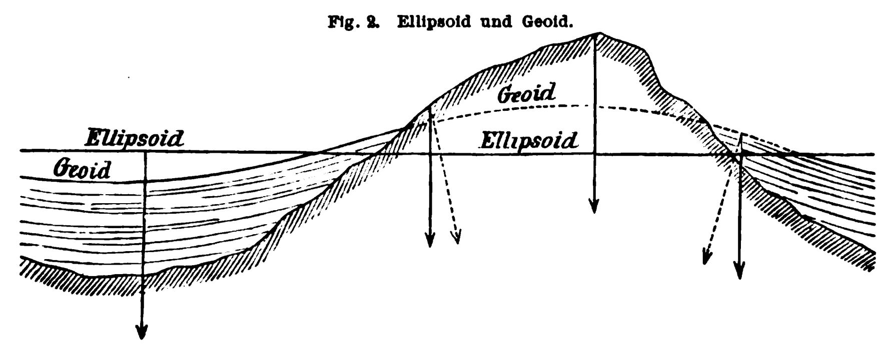
In dieser Weise kann man mit Sicherheit schliessen, dass die sichtbaren Ungleichheiten der Massenverteilung an der Erdoberfläche erhebliche Lotablenkungen im Vergleiche mit den Lotrichtungen eines mittleren Ellipsoids erzeugen müssen, d. h. Lotablenkungen, welche bei den Mittelgebirgen 5″—10″ betragen, und bei Hochgebirgen bis 1′ steigen müssen.

Ausser den sichtbaren Ungleichheiten der Massenverteilung an der Oberfläche der Erde giebt es aber auch Massen-Ungleichheiten unterhalb der Erdoberfläche, welche nicht durch geometrische Volumen-Berechnung bestimmt werden können.

Das Geoid.

Nachdem erkannt ist, dass die Schwerkraft-Richtungen im allgemeinen nicht mit den Ellipsoid-Normalen zusammenfallen, kommt man zu der Annahme einer anderen krummen Fläche, welche von allen Schwerkraft-Richtungen rechtwinklig geschnitten wird, und in Hinsicht der Höhenlage sich der physischen Erdoberfläche möglichst anpasst. Diese Fläche nennt man das Geoid (nach Listing, vgl. Einleitung S. 11).

Fig. 2. Ellipsoid und Geoid.



In vorstehender Fig. 2. ist die gegenseitige Lage der physischen Erdoberfläche, eines mittleren Ellipsoids und des Geoids in grob schematischer Weise dargestellt. Die Linie für das Ellipsoid ist gerade gezogen, insofern es sich nur um einen kleinen Teil der Erdoberfläche handeln soll und die Zeichnung nur dazu dient, die realitiven Krümmungen zwischen dem mittleren Ellipsoid und dem Geoid zu veranschaulichen.

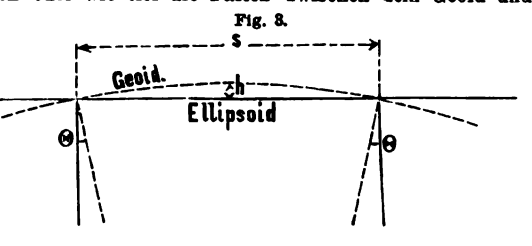
Die ausgezogenen Pfeillinien stellen die geometrischen Normalen des Ellipsoids, und die punktierten Pfeillinien stellen die physikalischen Lotlinien vor, welche rechtwinklig zur Geoidfläche sind. Der kleine Winkel zwischen einer Ellipsoid-Normalen und der Schwerkraft-Richtung ist die Lotablenkung; fällt die Schwerkraft-Richtung mit der Ellipsoid-Normalen zusammen, wie in Fig. 1. über der Wasserfläche und in der Höhe des Berges angenommen ist, so ist die Lotablenkung gleich Null.

Die Geoid-Falten.

Wenn nur die sichtbaren Massen-Ungleichheiten wirksam sind, so kann man z. B. in dem einfachen Falle von Fig. 2., wo ein Gebirge zwischen zwei Meeren angenommen ist, sofort sagen, dass unter dem Gebirge das Geoid über das mittlere Ellipsoid emporgehoben, und über den Meeren das Geoid unter das Ellipsoid gesenkt sein muss.

Um zu schätzen, wie hoch oder wie tief die Falten zwischen dem Geoid und einem mittleren Ellipsoid etwa sein werden, denken wir nach Andeutung von Fig. 3. eine solche Falte von kreisförmigem Profil mit einer Lotablenkung Θ am Anfange und am Ende, auf eine Erstreckung s, so wird die Höhe h als Pfeilhöhe eines flachen

Fig. 3.



Kreisbogens vom Centriwinkel $2\,\Theta$ mit der Sehne oder Bogenlänge s für einen Halbmesser r, woraus folgt:

$$r = \frac{s}{2\,\Theta}, \qquad \text{also } h = \frac{1}{2\,r}\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\,s\,\Theta \text{ bzw. } = \frac{1}{4}\,s\,\frac{\Theta}{\varrho}.$$

Nehmen wir $s = 100\,000^m$ und $\Theta = 10''$, so giebt dieses $h = 1{,}2^m$.

Im Mittel-Gebirge handelt es sich bei den Geoid-Falten immer nur um Höhen von einigen Metern. So giebt das Geoid des Harzes nur Höhen von 1^m—2^m gegen das Ellipsoid (s. Helmert, „Höhere Geodäsie, I, 1880“ S. 570).

Viel grössere Erhebungen und Vertiefungen der Geoid-Falten ergeben sich bei der Massenwirkung ganzer Kontinente gegenüber weniger dichten Oceanen. Im Durchschnitt für die sämtlichen Kontinente liegt innerhalb derselben die gestörte Meeresfläche (Geoid) nach der Berechnung um 700^m über der ursprünglichen Meeresfläche (Helmert, „Höhere Geodäsie, II., 1884“, S. 356).

Dieses ist aber ein Ergebnis aus Massen-Wirkungsberechnungen, welchem die Ergebnisse von Pendelbeobachtungen gegenüber stehen. Helmert hat aus solchen Vergleichungen geschlossen (Helmert, „Höhere Geodäsie, II.“, S. 364—365), „dass die Wirkung der Kontinentalmassen mehr oder weniger kompensiert wird durch eine Verminderung der Dichtigkeit der Erdkruste unterhalb der Kontinentalmassen“. „Die Kontinente erscheinen hiermit als Schollen der Erdkruste, welche etwas geringere Dichtigkeit haben als letztere im allgemeinen“, und Pendelbeobachtungen zeigen, „dass in der Regel Gebirge durch unterirdische Massendefekte mehr oder weniger kompensiert sind“.

Hieraus folgt, dass die Höhe der Geoid-Falten eine geringere ist, als die Verteilung zwischen Wasser und Land nach der schematischen Darstellung von Fig. 2. S. 583 vermuten lässt.

Lotablenkung und Lotabweichung.

Durch astronomisch-geodätische Hilfsmittel kann man immer nur *Differenzen* von Lotablenkungen, oder relative Lotablenkungen bestimmen, aus zwei Gründen: Erstens braucht man zu der Berechnung die Annahme eines Vergleich-Ellipsoids (z. *B.* des Besselschen Ellipsoides), und das ist eine innerhalb ziemlich weiter Grenzen willkürliche Annahme, und je nachdem man ein Ellipsoid zur Vergleichung annimmt, bekommt man verschiedene Lotablenkungen.

Ausserdem braucht man zu Lotablenkungs-Berechnungen irgend einen festen Ausgangspunkt, z. B. hat das geodätische Institut hiefür den Punkt Rauenberg bei Berlin. Nun geben alle Berechnungen nur die Vergleichung der Lotablenkungen anderer Punkte mit der Lotablenkung des Ausgangspunktes, welche selbst unbekannt, zuweilen schlechthin gleich Null gesetzt, oder dem negativen Mittel aller anderen Ablenkungen entsprechend angenommen werden kann.

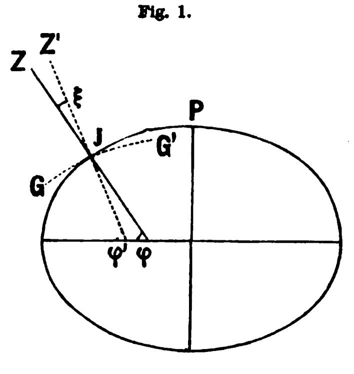
Aus diesen Gründen werden verschiedene Benennungen eingeführt; nach Helmert („Höhere Geodäsie, 1880“, I. Band, S. 514) unterscheiden wir erstens: absolute „Lotablenkungen“, d. h. solche, welche sich auf das günstigste mittlere Vergleichs-Ellipsoid beziehen, dessen Mittelpunkt mit dem Erdschwerpunkt, und dessen kleine Axe mit der Umdrehungsaxe der Erde zusammenfällt, und zweitens relative „Lotabweichungen“, welche sich auf ein vorläufig der Rechnung zu Grunde gelegtes Vergleichs-Ellipsoid und auf eine bestimmte Lage desselben beziehen.



§ 121. Bestimmung der Lotabweichung durch Vergleichung astronomischer und geodätischer Messungen.

Die Lotabweichung ist der Winkel, welchen die physikalische Lotlinie eines Punktes mit der entsprechenden Ellipsoid-Normalen bildet.

Fig. 1.



Wir wollen zuerst den einfachen Fall der Lotabweichung im Meridian behandeln, d. h. wir wollen annehmen, dass die Lotlinie von der Ellipsoid-Normalen abweicht, aber in der Ebene des Ellipsoid-Meridians sich befindet.

Dieser Fall ist in Fig. 1. dargestellt. In einem Punkte J des Ellipsoids haben wir die Ellipsoid-Normale JZ mit der ellipsoidischen oder geodätischen Breite φ, und die Lotlinie JZ' mit der astronomischen Breite φ'. Die Lotlinie JZ' ist rechtwinklig auf der Geoidfläche, welche durch die punktierte Linie $G\,J\,G'$ angedeutet ist. Der Winkel ξ zwischen JZ und JZ' ist die Lotabweichung im Meridian, und wir wollen ξ positiv zählen, wenn, wie in Fig. 1. angenommen ist, die Lotlinie JZ' gegen den Nordpol hin von JZ abweicht. Man sagt in diesem Falle auch, die Zenit-Abweichung ξ ist nördlich oder die Lot-Abweichung ξ ist südlich, und wir haben hiefür nach Fig. 1.:

$$\xi = \varphi' - \varphi \tag{1}$$

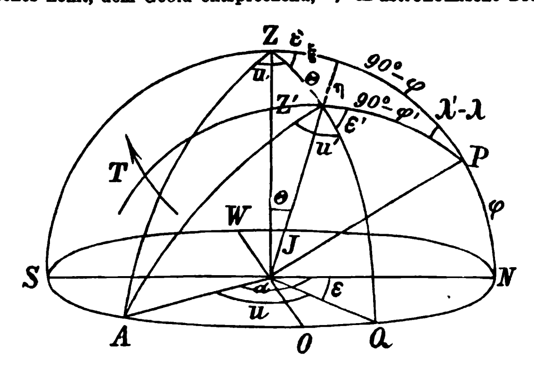
Die Lotabweichung im allgemeinen, d. h. nicht nur im Meridian, kann in zweierlei Weise bestimmt werden: Erstens giebt man die absolute Lotabweichung Θ und ihr Azimut ε an, oder zweitens bestimmt man die beiden Komponenten ξ und η der Lotabweichung nach Norden und Osten, dieselben sind:

$$\xi = \Theta \cos \varepsilon \qquad \eta = \Theta \sin \varepsilon \tag{2}$$

Diese zwei Gleichungen, welche nach dem Vorhergehenden wohl unmittelbar zu verstehen sind, werden wir auch wieder bestätigt finden durch die nachfolgende Fig. 2., zu welcher wir nun übergehen.

Fig. 2.

Z = Geodätisches Zenit, dem Ellipsoid entsprechend, φ = geodätische (ellipsoidische) Breite.
Z' = Astronomisches Zenit, dem Geoid entsprechend, φ' = astronomische Breite (Polhöhe).



In Fig. 2. S. 585 sei Z das geodätische Zenit und Z' das astronomische Zenit. P ist der Pol, welcher zu beiden Zeniten in Beziehung steht. J ist ein Punkt der Erdoberfläche, auf welchem geodätische und astronomische Beobachtungen gemacht werden. Durch astronomische Beobachtungen soll die Polhöhe φ', die geographische Länge λ, und ein Azimut α' bestimmt werden, und es handelt sich um die Auffindung von Beziehungen zwischen diesen Grössen φ', λ', α' und den entsprechenden geodätischen Werten φ, λ, α, welche man erhalten haben würde, wenn das Zenit nicht in Z' sondern in Z befindlich wäre.

I. Lotabweichung in Breite, ξ.

Die meridionale Komponente ξ der Lotabweichung ist leicht zu bestimmen.

Das Komplement der Polhöhe ist immer gleich dem Bogen zwischen dem Pol und dem Zenit, also $ZP = 90° - \varphi$, $Z'P = 90° - \varphi'$, wie auch bereits in Fig. 2. eingeschrieben ist.

Da nun das Dreieck PZZ' bei Z' nur die kleine Ordinate η hat, kann man die Projektion ξ der Seite $ZZ' = v$ hinreichend genau als Differenz der beiden Seiten PZ und PZ' annehmen, also:

$$\xi = (90° - \varphi) - (90° - \varphi')$$

oder

$$\xi = \varphi' - \varphi \tag{3}$$

Dieses ist wieder dieselbe Gleichung, die wir schon bei (1) unmittelbar gefunden haben.

II. Lotabweichung in Länge, $\eta \sec \varphi$.

Bei Vergleichung der geographischen Längen hat man zu beachten, dass alle astronomische Längen-Bestimmung auf Ortszeit-Bestimmung beruht. Wenn λ' die astronomisch bestimmte geographische Länge des Punktes J ist, bezogen auf einen westlich von J liegenden Anfangspunkt J_0 (z. B. Ferro, Paris, Greenwich), so heisst das so viel als: Ein Gestirn T, welches in J_0 zur Zeit t_0 kulminiert, kulminiert in J zur Zeit:

$$t' = t_0 - \lambda' \tag{4}$$

Diese Kulmination findet statt beim Durchgang des Gestirns durch den Deklinationskreis PZ'; dagegen der Durchgang durch den Deklinationskreis PZ, welcher dem geodätischen Zenit angehört, erfolgt später, und zwar um den Winkelbetrag ZPZ'; oder die geodätische Kulmination erfolgt zur Zeit:

$$t = t_0 - \lambda' + ZPZ' \tag{4a}$$

Wenn nun λ die geographische Länge des Beobachtungspunktes J ist, welche dem geodätischen Zenit Z entspricht, so hat man entsprechend (4):

$$t = t_0 - \lambda \tag{5}$$

Aus (4a) und (5) folgt:

$$ZPZ' = \lambda' - \lambda \tag{6}$$

wie auch bereits in Fig. 2. eingeschrieben ist.

Um $\lambda' - \lambda$ in η auszudrücken, braucht man nur wieder das schmale langgestreckte Dreieck $PZ'Z$ zu betrachten, oder das schmale rechtwinklige Dreieck, welches durch Projektion von Z' auf die Seite PZ entsteht. Dadurch erhält man:

$$\sin(\lambda' - \lambda) = \frac{\sin \eta}{\sin(90° - \varphi')} = \frac{\sin \eta}{\cos \varphi'}$$

Da hier $\lambda' - \lambda$ und η beide klein sind, und auch φ' sich von φ nur wenig unterscheidet, kann man aus der vorstehenden Gleichung bilden:

$$\lambda' - \lambda = \eta \sec \varphi \tag{7}$$

III. *Lotabweichung im Azimut, $\eta \tang \varphi$.*

Bei astronomischer Azimutmessung handelt es sich um den Horizontalwinkel zwischen der Richtung nach dem Pol P und der Richtung nach einem geodätischen Zielpunkt, der in Fig. 2. im Horizonte liegend als Punkt A angenommen sei. Die astronomische Azimutmessung wird daher den Winkel am astronomischen Zenit Z' geben, welcher in Fig. 2. als eine Summe $\varepsilon' + u'$ bezeichnet ist. Dabei war die vertikale Theodolit-Axe nach dem astronomischen Zenit Z' oder nach der physikalischen Lotlinie JZ' gerichtet, und das Messungs-Ergebnis $\varepsilon' + u'$ ist von der Lotabweichung beeinflusst.

Wenn wir andererseits dasjenige Azimut kennen lernen wollen, welches man ohne Lotabweichung erhalten haben würde, d. h. das geodätische Azimut, so muss man die vertikale Theodolit-Axe nach dem geodätischen Zenit JZ gerichtet denken, und damit erhält man das Azimut, welches bei Z als eine Summe $\varepsilon + u$, und in der Horizontal-Ebene bei J als ein Winkel $\alpha = \varepsilon + u$ dargestellt ist. Zur Vergleichung haben wir also nun:

$$\text{Geodätisches Azimut} \quad \alpha = \varepsilon + u \tag{8}$$

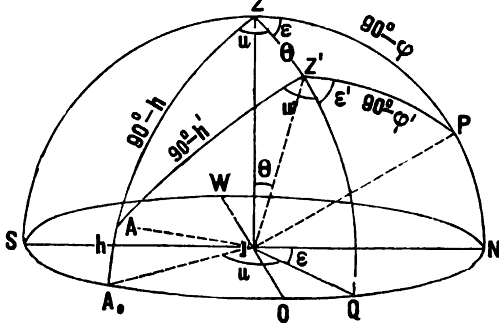
$$\text{Astronomisches Azimut} \quad \alpha' = \varepsilon' + u' \tag{9}$$

$$\text{Differenz} \quad \alpha - \alpha' = (\varepsilon - \varepsilon') + (u - u') \tag{10}$$

Von diesen beiden Teilen $\varepsilon - \varepsilon'$ und $u - u'$ ist der zweite Teil $u - u'$ immer sehr klein und meist zu vernachlässigen, wenn der geodätische Zielpunkt A im Horizonte selbst liegt, oder wenigstens nur einen kleinen Höhen- oder Tiefenwinkel hat.

Fig. 3.

Z = Geodätisches Zenit. Z' = Astronomisches Zenit.



Die Differenz $u - u'$ ist zu vergleichen dem Fehler einer Horizontal-Winkelmessung, der dadurch entsteht, dass die Theodolitaxe nicht genau vertikal, sondern etwas schief gestellt wird.

Die hiefür giltige Fehler-Formel haben wir schon früher (Band II, 4. Aufl. 1895, S. 203) entwickelt, im wesentlichen ebenso, wie wir nun die Entwicklung machen, im Anschluss an Fig. 3., welche sich von Fig. 2. nur dadurch unterscheidet, dass der geodätische Zielpunkt A nicht mehr im Horizont, sondern mit einem Höhenwinkel h angenommen wird.

Indem wir nun eine Cotang-Gleichung von § 27. S. 164 auf das sphärische Dreieck $ZZ'A$ Fig. 3. anwenden, erhalten wir:

$$\cotg(90° - h) \sin \Theta = \cos \Theta \cos u + \sin u \cotg(180° - u') \tag{11}$$

Indem man Θ als klein behandelt, erhält man:

$$\Theta \, tang\, h = cos\, u - sin\, u \, cotg\, u'$$

$$\Theta \, tang\, h = \frac{cos\, u \, sin\, u' - sin\, u \, cos\, u'}{sin\, u} = \frac{sin\,(u' - u)}{sin\, u'}$$

also: $$u' - u = \Theta \, sin\, u \, tang\, h \qquad (12)$$

Wenn der Höhenwinkel h klein ist, wie es bei geodätischen Zielpunkten gewöhnlich der Fall ist, so ist $\Theta \, tang\, h$ eine kleine Grösse zweiter Ordnung, welche wir vernachlässigen, oder besonderer Berücksichtigung vorbehalten.

Es bleibt also noch der erste Teil der Formel (10), d. h. $s - s'$ zu untersuchen, und hiezu machen wir eine ganz ähnliche Entwicklung wie soeben (11) — (12), nochmals in Bezug auf das sphärische Dreieck $Z Z' P$.

Wir nehmen also wieder eine Cotang-Gleichung von § 27. S. 164 und finden durch deren Anwendung auf das Dreieck $Z Z' P$:

$$cotg\,(90° - \varphi)\, sin\, \Theta = cos\, \Theta \, cos\, s + sin\, s \, cotg\,(180° - s')$$

$$\Theta \, tang\, \varphi = cos\, s - sin\, s \, cotg\, s'$$

$$\Theta \, tang\, \varphi = \frac{cos\, s \, sin\, s' - sin\, s \, cos\, s'}{sin\, s'} = \frac{sin\,(s' - s)}{sin\, s'}$$

also: $$s' - s = \Theta \, sin\, s \, tang\, \varphi \qquad (13)$$

Statt der absoluten Lotabweichung Θ kann man hier auch die Quer-Komponente $\eta = \Theta \, sin\, s$ einführen, und indem wir mit der bei (12) besprochenen Vernachlässigung wieder die Azimut-Differenz $\alpha - \alpha'$ selbst betrachten, haben wir:

$$\alpha' - \alpha = \eta \, tang\, \varphi \qquad (14)$$

Zusammenfassung der Grundformeln für Lotabweichung.

Bezeichnungen.

	Geodät.	Astron.	
Geographische Breite oder Polhöhe	φ	φ'	
Geographische Länge von Westen nach Osten positiv gezählt	λ	λ'	
Azimut von Norden nach Osten positiv gezählt	α	α'	(15)
Absolute Lotablenkung oder Zenitablenkung	$= \Theta$		
Südliche Lotablenkung oder nördliche Zenitablenkung	$= \xi$		
Westliche Lotablenkung oder östliche Zenitablenkung	$= \eta$		

Formeln.

$$\xi = \varphi' - \varphi \qquad (16)$$

$$\eta = (\lambda' - \lambda)\, cos\, \varphi \qquad (17)$$

$$\eta = (\alpha' - \alpha)\, cotg\, \varphi \qquad (18)$$

Die beiden Gleichungen (17) und (18) geben die Kontroll-Gleichung:

$$\alpha' - \alpha = (\lambda' - \lambda)\, sin\, \varphi \qquad (19)$$

Zur Bestimmung der Lotabweichung ξ im Meridian giebt es nur *ein* Mittel, nämlich nach (16) die Vergleichung astronomischer und geodätischer Breiten. Dagegen für die Querabweichung η kann man nach (17) und (18) die Längen-Vergleichung $\lambda' - \lambda$ *oder* die Azimut-Vergleichung $\alpha' - \alpha$ benützen; oder hat man beides, so ergiebt sich eine sehr erwünschte Probe, entsprechend der Gleichung (19).

Diese Gleichung (19) $\alpha' - \alpha = (\lambda' - \lambda)\, \sin \varphi$ heisst Laplace sche Gleichung; dieselbe ist sehr wichtig, weil sie eine Beziehung giebt zwischen den beiden aus Lotablenkung entstandenen Differenzen $\alpha' - \alpha$ und $\lambda' - \lambda$, ohne dass die Lotablenkungsbeträge ξ und η selbst bekannt zu sein brauchen.

Wir wollen den Sinn dieser Gleichung nochmals mit geodätischer Anwendung zurechtlegen: Von einem Punkte O ohne Lotablenkung geht eine geodätische Linie nach einem Punkte J (in Fig. 3. S. 587) und es wird Länge und Azimut von A nach J geodätisch übertragen mit den Ergebnissen λ und α. Diese Übertragung wollen wir als fehlerfrei annehmen, und wenn nun im Punkt J auch astronomisch fehlerfrei gemessen wird, und keine Lotablenkung stattfindet, so müssten wieder die Werte λ und α erhalten werden. Wegen der in J stattfindenden Lotablenkung wird aber astronomisch λ' und α' gemessen, und dazu besteht die Laplace sche Probe $\alpha' - \alpha = (\lambda' - \lambda)\, \sin \varphi$.

Es besteht also eine Probe für die geodätischen Übertragungen von Azimut und Länge, unabhängig von den Lotablenkungen.

Dieses ist nur eine summarische Erläuterung des Wesens der Laplace schen Gleichung, deren nähere Betrachtung an die zwei letzten Gleichungen der Gruppe (6) im folgenden § 122. S. 592 anzuschliessen wäre.

§ 122. Astronomisch-geodätisches Netz.

Um die Bedeutung eines astronomisch-geodätischen Netzes zunächst im ganzen zu erklären, wollen wir nochmals zurückschauen auf das rein geodätische Netz der Preussischen Landesaufnahme, welches in § 102. mit der Zeichnung auf S. 520—521 vorgeführt worden ist. Dort war nur *ein* Zentralpunkt, Berlin, astronomisch nach Breite, Länge und Azimut bestimmt, und daran hängt die ganze astronomische Orientierung des Netzes.

Im Gegensatz hiezu betrachten wir in Fig. 1. S. 590 das astronomisch-geodätische Netz, welches dem „Arbeitsplane des geodätischen Institutes für das nächste Dezennium", Berlin 1886, entnommen ist. (Abgedruckt in der „Zeitschr. f. Verm." 1886, S. 497—506.)

Die geraden Verbindungslinien dieses Netzes kann man sich als geodätische Linien denken, welche als Repräsentanten ganzer Dreiecksketten etwa in dem Sinne von § 72. Fig. 2. und Fig. 3. S. 388—389 auftreten; oder wir können z. B. annehmen, dass die Verbindung Leipzig—Brocken in dem astronomisch-geodätischen Netze aus den Dreiecken von § 102. S. 520—521 längs den Dreiecksseiten Leipzig—Petersberg—Kyffhäuser—Brocken als geodätische Linie berechnet worden sind, wie auf S. 389—390 gezeigt wurde.

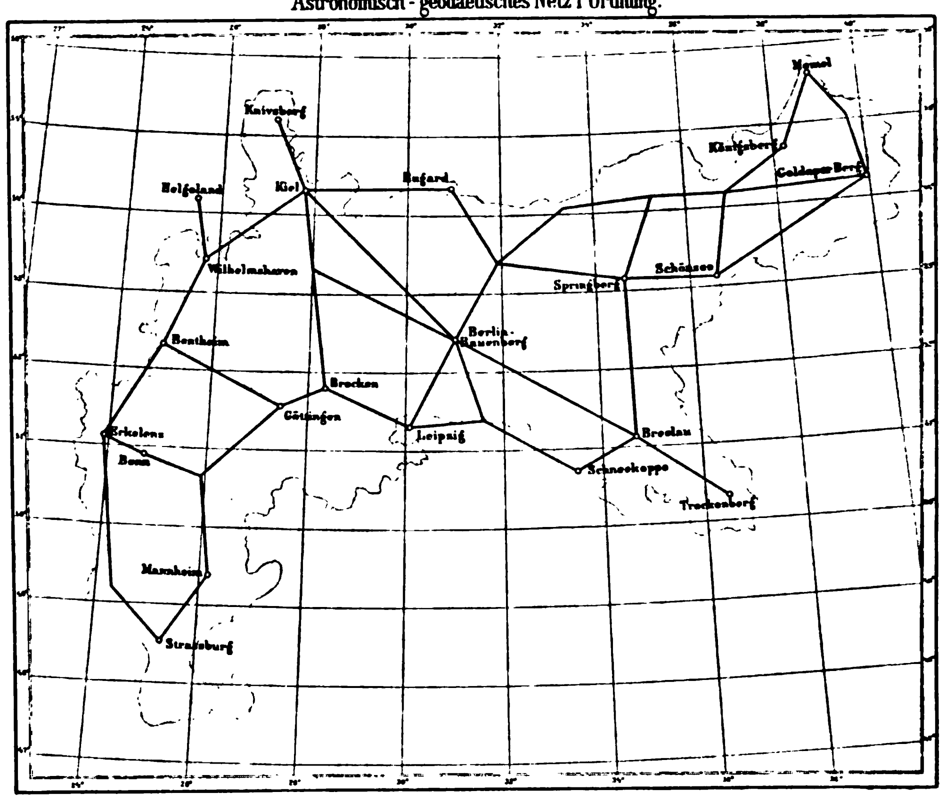
Mag das nun im einzelnen Falle nach der einen oder anderen Art geschehen sein; wir können annehmen, dass alle Punkte unseres astronomisch-geodätischen Netzes, jeder für sich nach geographischer Breite, geographischer Länge und mit Azimuten astronomisch bestimmt, und dass alle diese Punkte unter sich durch geodätische Linien verbunden seien. Nun bestehen ausser den rein geodätischen Bedingungen in unserem Netze die Laplaceschen Gleichungen, welche wir am Schlusse von § 121. oben kennen gelernt haben, und dadurch kann eine Ausgleichung des Netzes viel schärfer gemacht werden, als nach den geodätischen Bedingungen allein möglich wäre.



Denken wir uns ein Netz von der Art der Fig. 1. mit p Punkten und s Linien, und nehmen wir an, jede Linie sei geodätisch hin und her nach Richtungen beobachtet, so hat unter Voraussetzung *einer* gemessenen Seite s das Netz verschiedene geodätische Bedingungsgleichungen, deren Anzahl nach unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 176 ist:

$$2s - 3p + 4 \tag{1}$$

Fig. 1.



Massstab 1 : 10 800 000.

Dabei sind aber die geodätischen Linien selbst nicht als gemessene Grössen gezählt, sondern nur *eine* davon als Basis, und wenn die übrigen $s - 1$ Linien als lineare Messungen eingeführt werden, so kommt zu (1) noch die Zahl $s - 1$ hinzu und wir haben dann:

$$2s - 3p + 4 + s - 1 = 3s - 3(p - 1) \text{ geodätische Bedingungen} \tag{2}$$

Dazu kommen für s Linien noch s Laplacesche Gleichungen, indem wir annehmen, es sei jede Linie am Anfang und am Ende mit astronomischem Azimut gemessen und der geographische Längenunterschied zwischen den Endpunkten der Linie sei astronomisch-telegraphisch bestimmt. Also noch s Laplace sche Gleichungen zu (2) hiezugenommen giebt:

$$4s - 3(p - 1) \text{ astronomisch-geodätische Gleichungen} \tag{3}$$

Z. B. unser astronomisch-geodätisches Netz von Fig. 1. hat $p = 31$ Punkte und $s = 42$ Linien, wobei auch alle die Punkte, an welchen Brechung stattfindet, ohne dass ein Name beigesetzt wäre, als Punkte unter der Zahl $p = 31$ genommen sind. Also $s = 42$ und $p = 31$ giebt nach (3):

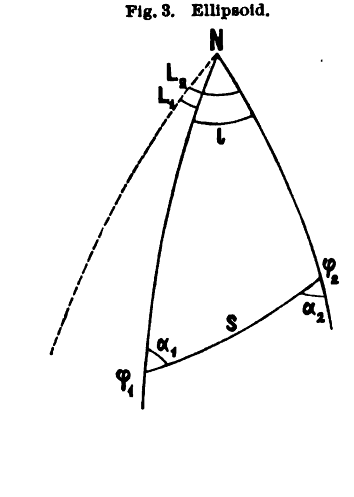
$$168 - 90 = 78 \text{ Gleichungen zu Fig. 1} \tag{4}$$

Man wird also eine Correlatenausgleichung mit 78 Normalgleichungen zu machen haben, wobei als Beobachtungsgrössen sowohl die linearen geodätischen Linien als auch die astronomischen Breiten-, Längen- und Azimut-Messungen auftreten (und als Azimutdifferenzen zugleich die geodätischen Winkel). Welche Annahmen von mittleren Fehlern a priori für alle diese Messungen zu machen, oder welche Messungsgewichte einzuführen sind, das ist eine Sache, welche für sich auf Grund des vorhandenen Materials zu entscheiden ist (z. B. geodätisch nach den Betrachtungen unseres früheren § 24. S. 154—157).

Obgleich hiemit eine solche astronomisch-geodätische Netzausgleichung nach ihrem Grundgedanken beschrieben ist und obgleich wir hier nicht viel weiter hierin gehen können, mag es doch am Platze sein, die Aufstellung der Gleichungen noch etwas näher zu betrachten, auf Grund des Werkes von Helmert: „Veröffentlichung des königl. Preussischen Geodätischen Instituts. Lotabweichungen. Heft I. Berlin 1886“ und Helmert: „Höhere Geodäsie I. S. 279—296“ mit Benützung unserer früheren Behandlung dieser Sache in der 3. Auflage dieses Bandes 1890, S. 539—549.

Fig. 2. Kugel mit reduzierten Breiten.

Fig. 3. Ellipsoid.



Hiezu nehmen wir ein geodätisches Polar-Dreieck in Fig. 2. sphärisch mit reduzierten Breiten und in Fig. 3. sphäroidisch; d. h. wir wollen die Theorieen von Kap. IX, § 106. benützen.

Das erste ist die Aufstellung von sphärischen Differentialformeln zwischen den Breitenänderungen $\psi'_1 - \psi_1 = d\,\psi_1$ und $\psi'_2 - \psi_2 = d\,\psi_2$ den Längenänderungen $\lambda' - \lambda = d\,\lambda$ und den Azimutänderungen $\alpha'_1 - \alpha_1 = d\,\alpha_1$ und $\alpha'_2 - \alpha_2 = d\,\alpha_2$, alles bezogen auf Fig. 2. Diese Differentialformeln erhält man durch Differentiieren sphärisch-trigonometrischer Formeln (in ähnlicher Weise wie z. B. bei Mond-Distanzen vorkommt). Die Ergebnisse sind:



$$\left.\begin{aligned} d\psi_2 &= \cos\lambda\, d\psi_1 + \cos\alpha_2\, d\sigma - \sin\alpha_2 \sin\sigma\, d\alpha_1 \\ d\lambda &= \sin\lambda \tang\psi_2\, d\psi_1 + \frac{\sin\alpha_2}{\cos\psi_2}\, d\sigma + \frac{\cos\alpha_2 \sin\sigma}{\cos\psi_2}\, d\alpha_1 \\ d\alpha_2 &= \sin\lambda \sec\psi_2\, d\psi_1 + \sin\alpha_2 \tang\psi_2\, d\sigma + \cos\lambda \cos\varphi_1 \sec\psi_2\, d\alpha_1 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Diese Gleichungen müssen auf das Ellipsoid übertragen werden, was am besten nach unserem § 106. geschieht und in erster Näherung giebt:

$$\left.\begin{aligned} d\varphi_2 &= \cos l\, d\varphi_1 + V^3 \cos\alpha_2 \frac{ds}{c} - V^2 \sin\alpha_2 \sin S\, d\alpha_1 \\ dL_2 - dL_1 = dl &= \frac{\sin l \sin\varphi_2}{V^2 \cos\varphi_2}\, d\varphi_1 + V \frac{\sin\alpha_2}{\cos\varphi_2} \frac{ds}{c} + \frac{\cos\alpha_2}{\cos\varphi_2} \sin S\, d\alpha_1 \\ d\alpha_1 &= \frac{\sin l}{\cos\varphi_2}\, d\varphi_1 + V \frac{\sin\alpha_2 \sin\varphi_2}{\cos\varphi_2} \frac{ds}{c} + \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} \cos l\, d\alpha \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Dabei ist $S = \frac{s}{N} = \frac{s}{c} V$, und es bezieht sich V auf die Mittelbreite $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$.

Weiter wollen wir in der Formelentwicklung nicht gehen; es mag genügen, einzusehen, dass es möglich ist, lineare Gleichungen zwischen den 6 Differentialen $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2$, dl, ds aufzustellen, auf welche dann eine Ausgleichung gegründet werden kann.

Es wird nämlich nun diesen Differentialen die Bedeutung untergelegt teils von Beobachtungsfehlern und von Näherungsverbesserungen, teils auch von Lotabweichungseinflüssen. Die Quadratsumme der Beobachtungsfehler mit Gewichten wird zu einem Minimum gemacht und daraus die Näherungsverbesserungen aller Messungsgrössen und die Lotabweichungselemente als Unbekannte bestimmt, alles im Wesentlichen wie bei einer reinen geodätischen Netzausgleichung. Die a priori einzuführenden Beobachtungsgewichte sind aus sachlichen Erwägungen zu ermitteln, wie schon bei (4) S. 591 angedeutet worden ist.

Wir wollen überlegen, wie gross die Anzahl der entstehenden unabhängigen Bedingungsgleichungen sein wird, unter der Voraussetzung, dass jede Linie des Netzes als geodätische Linie triangulatorisch bestimmt und astronomisch beiderseits durch Azimute sowie zwischen ihren Endpunkten telegraphisch als Längenunterschied gemessen sei. Dann haben wir bei p Punkten und s Linien folgende Beobachtungen:

Geographische Breiten	Anzahl $= p$		
„ Längenunterschiede	„ $= s$	$p + 4s$	(7)
Azimute	„ $= 2s$		
Geodätische Linien	„ $= s$		

Diesen $p + 4s$ Beobachtungen stehen gegenüber unabhängige Unbekannte:

Geograpische Breiten	Anzahl $= p$.		
„ Längenunterschiede	„ $= p - 1$	$4p - 3$	(8)
Lotabweichungs-Componenten ξ, η	„ $= 2(p-1)$		

Die Längenunterschiede sind nur in der Zahl $p - 1$ vorhanden, weil *ein* Punkt (Zentralpunkt Berlin) willkürlich ist und es sich nur um die relativen Längen gegen den Zentralpunkt handelt. Ebenso ist es mit den Lotabweichungen ξ, η, welche nur relativ gegen den Zentralpunkt bestimmbar sind.

Aus (7) und (8) hat man die Zahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen:

$$p + 4s - (4p - 3) = 4s - 3(p - 1) \quad (9)$$

Dieses stimmt mit dem früheren (3) S. 590 und giebt für das astronomisch-geodätische Netz von Fig. 1. S 590 wieder die schon bei (4) gefundene Zahl von 78 unabhängigen Bedingungsgleichungen.

Bei der bisherigen Betrachtung sind die Erddimensionen etwa a und e^2 oder c und e'^2 als gegeben vorausgesetzt. Es ist aber auch möglich, diese Dimensionen so zu bestimmen, dass sie sich dem Netz-Material möglichst anpassen; und dann muss man die Gleichungen auch noch nach c und e'^2 differentiieren und man bekommt noch entsprechende zwei neue Unbekannte in die Ausgleichung.

Dieses sind die Grundgedanken einer astronomisch-geodätischen Netzausgleichung, deren Anfänge in dem auf S. 591 citierten Helmert schen Werk des geodätischen Instituts enthalten sind, deren Ausführung im Grossen der Zukunft vorbehalten ist.

Anhang.

Hilfstafeln.

Grundfunktion $log\ V = log \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$

φ	log V	Differenzen —	Differenzen —	φ	log V	Differenzen —	Differenzen —
0° 0′	0.001 4541·798	0·123		8° 0′	0.001 4261·059	11·740	
10	4541·675	0·368	0·245	10	4249·319	11·974	0.234
20	4541·307	0·613	0·245	20	4237·343	12·210	0·236
30	4540·694	0·858	0·245	30	4225·133	12·446	0·236
40	4539·836	1·104	0·246	40	4212·687	12·679	0·233
50	4538·732	1·348	0·244	50	4200·008	12·913	0·234
1° 0′	0.001 4537·384	1·594	0·246	9° 0′	0.001 4187·095	13·147	0·234
10	4535·790	1·839	0·245	10	4173·948	13·379	0·232
20	4533·951	2·084	0·245	20	4160·569	13·612	0·233
30	4531·867	2·329	0·245	30	4146·957	13·844	0·232
40	4529·538	2·574	0·245	40	4133·113	14·076	0·232
50	4526·964	2·818	0·244	50	4119·037	14·307	0·231
2° 0′	0.001 4524·146	3·064	0·246	10° 0′	0.001 4104·730	14·537	0·230
10	4521·082	3·307	0·243	10	4090·193	14·768	0·231
20	4517·775	3·553	0·246	20	4075·425	14·997	0·229
30	4514·222	3·796	0·243	30	4060·428	15·226	0·229
40	4510·426	4·041	0·245	40	4045·202	15·455	0·229
50	4506·385	4·285	0·244	50	4029·747	15·683	0·228
3° 0′	0.001 4502·100	4·529	0·244	11° 0′	0.001 4014·064	15·911	0·228
10	4497·571	4·773	0·244	10	3998·153	16·137	0·226
20	4492·798	5·016	0·243	20	3982·016	16·365	0·228
30	4487·782	5·260	0·244	30	3965·651	16·590	0·225
40	4482·522	5·503	0·243	40	3949·061	16·815	0·225
50	4477·019	5·746	0·243	50	3932·246	17·041	0·226
4° 0′	0.001 4471·273	5·989	0·243	12° 0′	0.001 3915·205	17·264	0·223
10	4465·284	6·231	0.242	10	3897·941	17·488	0·224
20	4459·053	6·475	0.244	20	3880·453	17·712	0·224
30	4452·578	6·716	0·241	30	3862·741	17·934	0·222
40	4445·862	6·959	0·241	40	3844·807	18·156	0·222
50	4438·903	7·200	0·241	50	3826·651	18·377	0·221
5° 0′	0.001 4431·703	7·442	0·242	13° 0′	0.001 3808·274	18·598	0·221
10	4424·261	7·683	0·241	10	3789·676	18·817	0·219
20	4416·578	7·925	0·242	20	3770·859	19·038	0·221
30	4408·653	8·165	0·240	30	3751·821	19·256	0·218
40	4400·488	8·406	0·241	40	3732·565	19·474	0·218
50	4392·082	8·646	0·240	50	3713·091	19·692	0·218
6° 0′	0.001 4383·436	8·885	0·239	14° 0′	0.001 3693·399	19·908	0·216
10	4374·551	9·126	0·241	10	3673·491	20·125	0·217
20	4365·425	9·365	0·239	20	3653·366	20·340	0·215
30	4356 060	9·604	0·239	30	3633·026	20·555	0·215
40	4346·456	9·843	0·239	40	3612·471	20·769	0·214
50	4336·613	10·081	0·238	50	3591·702	20·982	0·213
7° 0′	0.001 4326·532	10·319	0·238	15° 0′	0.001 3570·720	21·196	0·214
10	4316·213	10.557	0·238	10	3549·524	21·407	0·211
20	4305·656	10·794	0·237	20	3528·117	21·618	0·211
30	4294.862	11·031	0·237	30	3506·499	21·829	0·211
40	4283·831	11·268	0·237	40	3484·670	22·039	0·210
50	4272·563	11·504	0·236	50	3462·631	22·248	0·209
8° 0′	0.001 4261·059			16° 0′	0.001 3440.383		

vgl. § 34.

φ	log V	Differenzen —	Differenzen —	φ	log V	Differenzen —	Differenzen —
16° 0′	0.001 3440·383	22·456	0·208	24° 0′	0.001 2142·793	31·447	0·164
10	3417·927	22.664	0·207	10	2111·346	31·611	0·163
20	3395·263	22·871	0·206	20	2079·735	31·774	0·161
30	3372·392	23·077	0·205	30	2047·961	31·935	0·160
40	3349·315	23·282	0·204	40	2016·026	32·095	0·160
50	3326·033	23·486	0·204	50	1983·931	32·255	0·158
17° 0′	0.001 3302·547	23·690	0·204	25° 0′	0.001 1951.676	32·413	0·158
10	3278·857	23·894	0·201	10	1919·263	32·571	0·155
20	3254·963	24·095	0·201	20	1886·692	32·726	0·156
30	3230·868	24·296	0·201	30	1853·966	32·882	0·154
40	3206·572	24·497	0·200	40	1821·084	33·036	0·152
50	3182·075	24·697	0·199	50	1788·048	33·188	0·152
18° 0′	0.001 3157·378	24·896	0·199	26° 0′	0.001 1754·860	33·340	0.151
10	3132·482	25·095	0·196	10	1721·520	33·491	0·149
20	3107·389	25·291	0·196	20	1688·029	33·640	0·149
30	3082·098	25·487	0·195	30	1654·389	33·789	0·146
40	3056·611	25·682	0·196	40	1620·600	33·935	0·147
50	3030·929	25·878	0·192	50	1586·665	34·082	0·145
19° 0′	0.001 3005·051	26·070	0·194	27° 0′	0.001 1552·583	34·227	0·143
10	2979·081	26·364	0·192	10	1518·356	34·370	0·143
20	2952·717	26·456	0·190	20	1483·986	34·513	0·141
30	2926·261	26·646	0·191	30	1449·473	34·654	0·141
40	2899·615	26·837	0·189	40	1414·819	34·795	0·139
50	2872·778	27·026	0·189	50	1380·024	34·934	0·138
20° 0′	0.001 2845·752	27·215	0·187	28° 0′	0.001 1345·090	35·072	0·136
10	2818·537	27·402	0·186	10	1310·018	35·208	0·136
20	2791·135	27·588	0·186	20	1274·810	35·344	0·134
30	2763·547	27·774	0·185	30	1239·466	35·478	0·134
40	2735·773	27·959	0·184	40	1203·988	35·612	0·131
50	2707·814	28·143	0·182	50	1168·376	35·743	0·132
21° 0′	0.001 2679·671	28·325	0·182	29° 0′	0.001 1132·633	35·875	0·128
10	2651·346	28·507	0·181	10	1096·758	36·003	0·130
20	2622·839	28·688	0·180	20	1060·755	36·133	0·126
30	2594·151	28·868	0·179	30	1024·622	36·259	0·126
40	2565·283	29·047	0·178	40	0988·363	36·385	0·125
50	2536·236	29·225	0·177	50	0951·978	36·510	0·123
22° 0′	0.001 2507·011	29·402	0·176	30° 0′	0.001 0915·468	36·633	0·123
10	2477·609	29·578	0·175	10	0878·835	36·756	0·121
20	2448·031	29·753	0·174	20	0842·079	36·877	0·119
30	2418·278	29·927	0·173	30	0805·202	36·996	0·119
40	2388·351	30·100	0·172	40	0768·206	37·115	0·117
50	2358·251	30·272	0·171	50	0731·091	37·232	0·116
23° 0′	0.001 2327·979	30·443	0·170	31° 0′	0.001 0693·859	37·348	0·115
10	2297·536	30·613	0·169	10	0656·511	37·463	0·113
20	2266·923	30·782	0·167	20	0619·048	37·576	0·112
30	2236·141	30·949	0·168	30	0581.472	37·688	0·112
40	2205·192	31·117	0·165	40	0543·784	37·800	0·109
50	2174·075	31·282		50	0505·984	37·909	
24° 0′	0.001 2142·793			32° 0′	0.001 0468·075		

vgl. § 34.

φ	log V	Differenzen		φ	log V	Differenzen	
		—	—			—	—
32° 0'	0.001 0468·075	38·017		40° 0'	0.000 8545·279	41·655	+
10	0430·058	38·125	0·108	10	8503·624	41·697	0·042
20	0391·933	38·230	0·105	20	8461·927	41·738	0·041
30	0353·703	38·335	0·105	30	8420·189	41·777	0·039
40	0315·368	38·438	0·103	40	8378·412	41·815	0·038
50	0276·930	38·540	0·102	50	8336·597	41·851	0·036
33° 0'	0.001 0238·390	38·641	0·101	41° 0'	0.000 8294·746	41·886	0·035
10	0199·749	38·740	0·099	10	8252·860	41·920	0·034
20	0161·009	38·838	0·098	20	8210·940	41·953	0·033
30	0122·171	38·935	0·097	30	8168·987	41·982	0·029
40	0083·236	39·030	0.095	40	8127·005	42·013	0·031
50	0044·206	39·124	0·094	50	8084·992	42·040	0·027
34° 0'	0.001 0005·082	39·218	0·094	42° 0'	0.000 8042·952	42·067	0·027
10	0.000 9965·864	39·308	0·090	10	8000·885	42·092	0·025
20	9926·556	39·399	0·091	20	7958·793	42·115	0·023
30	9887·157	39·487	0·088	30	7916·678	42·138	0·023
40	9847·670	39·575	0·088	40	7874·540	42·159	0·021
50	9808·095	39·661	0·086	50	7832·381	42·178	0·019
35° 0'	0.000 9768·434	39·746	0·085	43° 0'	0.000 7790·203	42·196	0·018
10	9728·688	39·830	0·084	10	7748·007	42·213	0·017
20	9688·858	39·911	0·081	20	7705·794	42·227	0·014
30	9648·947	39·992	0·081	30	7663·567	42·242	0·015
40	9608·955	40·072	0·080	40	7621·325	42·254	0·012
50	9568·883	40·150	0·078	50	7579·071	42·264	0·010
36° 0'	0.000 9528·733	40·226	0·076	44° 0'	0.000 7536·807	42·274	0·010
10	9488·507	40·302	0·076	10	7494·533	42·282	0·008
20	9448·205	40·376	0·074	20	7452·251	42·289	0·007
30	9407·829	40·448	0·072	30	7409·962	42·293	0·004
40	9367·381	40·520	0.072	40	7367·669	42·298	0·005
50	9326·861	40·590	0·070	50	7325·371	42·299	0·001
37° 0'	0.000 9286·271	40·658	0·068	45° 0'	0.000 7283·072	42·301	+
10	9245·613	40·725	0·067	10	7240·771	42·299	0·002
20	9204·888	40·791	0·066	20	7198·472	42·298	0·001
30	9164·097	40·855	0·064	30	7156·174	42·294	0·004
40	9123·242	40·919	0·064	40	7113·880	42·290	0·004
50	9082·323	40·980	0·061	50	7071·590	42·283	0·007
38° 0'	0.000 9041·343	41·041	0·061	46° 0'	0.000 7029·307	42·275	0·008
10	9000·302	41·099	0·058	10	6987·032	42·266	0·009
20	8959·203	41·157	0·058	20	6944·766	42·256	0.010
30	8918·046	41·212	0·055	30	6902·510	42·243	0·013
40	8876·834	41·268	0·056	40	6860·267	42·230	0·013
50	8835·566	41·321	0·053	50	6818·037	42·215	0·015
39° 0'	0.000 8794·245	41·373	0·052	47° 0'	0.000 6775·822	42·198	0·017
10	8752·872	41·423	0·050	10	6733·624	42·181	0·017
20	8711·449	41·472	0·049	20	6691·443	42·162	0·019
30	8669·977	41·521	0·049	30	6649·281	42·141	0·021
40	8628·456	41·566	0·045	40	6607·140	42·119	0·022
50	8586·890	41·611	0·045	50	6565·021	42·095	0·024
40° 0'	0.000 8545·279			48° 0'	0.000 6522·926		

vgl. § 84.

φ	log V	Differenzen −	Differenzen +	φ	log V	Differenzen −	Differenzen +
48° 0′	0.000 6522.926	42.071		56° 0′	0.000 4557.646	39.224	
10	6480.855	42.044	0.027	10	4518.422	39.130	0.094
20	6438.811	42.016	0.028	20	4479.292	39.036	0.094
30	6396.795	41.988	0.028	30	4440.256	38.941	0.095
40	6354.807	41.956	0.032	40	4401.315	38.843	0.098
50	6312.851	41.925	0.031	50	4362.472	38.746	0.097
49° 0′	0.000 6270.926	41.891	0.034	57° 0′	0.000 4323.726	38.646	0.100
10	6229.035	41.856	0.035	10	4285.080	38.545	0.101
20	6187.179	41.820	0.036	20	4246.535	38.443	0.102
30	6145.359	41.782	0.038	30	4208.092	38.339	0.104
40	6103.577	41.743	0.039	40	4169.753	38.235	0.104
50	6061.834	41.703	0.040	50	4131.518	38.128	0.107
50° 0′	0.000 6020.131	41.661	0.042	58° 0′	0.000 4093.390	38.021	0.107
10	5978.470	41.617	0.044	10	4055.369	37.913	0.108
20	5936.853	41.572	0.045	20	4017.456	37.802	0.111
30	5895.281	41.527	0.045	30	3979.654	37.692	0.110
40	5853.754	41.478	0.049	40	3941.962	37.578	0.114
50	5812.276	41.430	0.048	50	3904.384	37.465	0.113
51° 0′	0.000 5770.846	41.379	0.051	59° 0′	0.000 3866.919	37.350	0.115
10	5729.467	41.328	0.051	10	3829.569	37.234	0.116
20	5688.139	41.274	0.054	20	3792.335	37.116	0.118
30	5646.865	41.219	0.055	30	3755.219	36.997	0.119
40	5605.646	41.164	0.055	40	3718.222	36.877	0.120
50	5564.482	41.106	0.058	50	3681.345	36.756	0.121
52° 0′	0.000 5523.376	41.047	0.059	60° 0′	0.000 3644.589	36.633	0.123
10	5482.329	40.988	0.059	10	3607.956	36.509	0.124
20	5441.341	40.925	0.063	20	3571.447	36.384	0.125
30	5400.416	40.863	0.062	30	3535.063	36.257	0.127
40	5359.553	40.798	0.065	40	3498.806	36.130	0.127
50	5318.755	40.732	0.066	50	3462.676	36.002	0.128
53° 0′	0.000 5278.023	40.666	0.066	61° 0′	0.000 3426.674	35.871	0.131
10	5237.357	40.597	0.069	10	3390.803	35.740	0.131
20	5196.760	40.527	0.070	20	3355.063	35.607	0.133
30	5156.233	40.455	0.072	30	3319.456	35.474	0.133
40	5115.778	40.383	0.072	40	3283.982	35.339	0.135
50	5075.395	40.309	0.074	50	3248.643	35.202	0.137
54° 0′	0.000 5035.086	40.234	0.075	62° 0′	0.000 3213.441	35.066	0.136
10	4994.852	40.157	0.077	10	3178.375	34.927	0.139
20	4954.695	40.079	0.078	20	3143.448	34.787	0.140
30	4914.616	39.999	0.080	30	3108.661	34.646	0.141
40	4874.617	39.919	0.080	40	3074.015	34.504	0.142
50	4834.698	39.836	0.083	50	3039.511	34.362	0.142
55° 0′	0.000 4794.862	39.753	0.083	63° 0′	0.000 3005.149	34.216	0.146
10	4755.109	39.668	0.085	10	2970.933	34.071	0.145
20	4715.441	39.581	0.087	20	2936.862	33.925	0.146
30	4675.860	39.494	0.087	30	2902.937	33.776	0.149
40	4636.366	39.405	0.089	40	2869.161	33.628	0.148
50	4596.961	39.315	0.090	50	2835.533	33.477	0.151
56° 0′	0.000 4557.646			64° 0′	0.000 2802.056		

vgl. § 34.

Grundfunktion $log\ V = log \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$

φ	$log\ V$	Differenzen −	Differenzen +	φ	$log\ V$	Differenzen −	Differenzen +
64° 0′	0.000 2802·056	33·326		72° 0′	0.000 1392·831	24·831	
10	2768·730	33·174	0·152	10	1368·000	24·631	0·200
20	2735·556	33·020	0·154	20	1343·369	24·430	0.201
30	2702·536	32·865	0·155	30	1318·939	24·228	0·202
40	2669.671	32·710	0·155	40	1294·711	24·025	0·203
50	2636·961	32·552	0·158	50	1270·686	23·822	0·203
65° 0′	0.000 2604·409	32·395	0·157	73° 0′	0.000 1246·864	23·618	0·204
10	2572·014	32·235	0·160	10	1223·246	23·412	0·206
20	2539·779	32·075	0·160	20	1199·834	23·206	0·206
30	2507·704	31·914	0·161	30	1176·628	23·000	0·206
40	2475·790	31·752	0·162	40	1153·628	22·792	0·208
50	2444·038	31·587	0·165	50	1130·836	22·584	0·208
66° 0′	0.000 2412 451	31·424	0·163	74° 0′	0.000 1108·252	22·375	0·209
10	2381·027	31·257	0·167	10	1085·877	22·165	0·210
20	2349·770	31·091	0·166	20	1063·712	21·955	0·210
30	2318·679	30·923	0·168	30	1041·757	21·743	0·212
40	2287·756	30·755	0·168	40	1020·014	21·531	0·212
50	2257.001	30·584	0·171	50	0998·483	21·318	0·213
67° 0′	0.000 2226·417	30·414	0·170	75° 0′	0.000 0977·165	21·105	0·213
10	2196·003	30·241	0·173	10	0956·060	20·890	0·215
20	2165·762	30·069	0·172	20	0935·170	20·776	0·214
30	2135·693	29·895	0·174	30	0914·494	20·460	0·216
40	2105·798	29·719	0·176	40	0894·034	20·243	0·217
50	2076·079	29·544	0·175	50	0873·791	20·027	0·216
68° 0′	0.000 2046·535	29·366	0·178	76° 0′	0.000 0853·764	19·808	0·219
10	2017·169	29·188	0·178	10	833·956	19·590	0·218
20	1987·981	29·010	0·178	20	814·366	19·372	0·218
30	1958·971	28·829	0·181	30	794·994	19·151	0·221
40	1930·142	28·648	0·181	40	775·843	18·931	0·220
50	1901·494	28·467	0·181	50	756·912	18·710	0·221
69° 0′	0.000 1873·027	28·283	0·184	77° 0′	0.000 0738·202	18·488	0·222
10	1844·744	28·099	0·184	10	719·714	18·266	0·222
20	1816·645	27·915	0·184	20	701·448	18·043	0·223
30	1788·730	27·729	0·186	30	683·405	17·819	0·224
40	1761·001	27·542	0·187	40	665·586	17·595	0·224
50	1733·459	27·354	0·188	50	647·991	17·371	0·224
70° 0′	0.000 1706·105	27·165	0·189	78° 0′	0.000 0630.620	17·145	0·226
10	1678·940	26·976	0·189	10	613·475	16·919	0·226
20	1651·964	26·785	0·191	20	596·556	16·693	0·226
30	1625·179	26·594	0·191	30	579·863	16·465	0·228
40	1598·585	26·402	0·192	40	563·398	16·238	0·227
50	1572·183	26·208	0·194	50	547·160	16·009	0·229
71° 0′	0.000 1545·975	26·015	0·193	79° 0′	0.000 0531·151	15·781	0·228
10	1519·960	25·819	0·196	10	515·370	15·552	0·229
20	1494·141	25·623	0·196	20	499·818	15·321	0·231
30	1468·518	25·427	0·196	30	484·497	15·092	0·229
40	1443·091	25·229	0·198	40	469·405	14·860	0·232
50	1417·862	25·031	0·198	50	454·545	14·629	0·231
72° 0′	0.000 1392·831			80° 0′	0.000 0439·916		

vgl. § 34.

φ	log V	Differenzen −	Differenzen +
80° 0′	0.000 0439·916		
10	425·519	14·397	0·232
20	411·354	14·165	0·233
30	397·422	13·932	0·233
40	383·723	13·699	0·235
50	370·259	13·464	0·233
81° 0′	0.000 0357·028	13·231	0·235
10	344·032	12·996	0·236
20	331·272	12·760	0·234
30	318·746	12·526	0·237
40	306·457	12·289	0·237
50	294·405	12·052	0·236
82° 0′	0.000 0282·589	11·816	0·238
10	271·011	11·578	0·237
20	259·670	11·341	0·238
30	248·567	11·103	0·239
40	237·703	10·864	0·238
50	227·077	10·626	0·240
83° 0′	0.000 0216·691	10·386	0·239
10	206·544	10·147	0·240
20	196·637	9·907	0·240
30	186·970	9·667	0·241
40	177·544	9·426	0·240
50	168·358	9·186	0·242
84° 0′	0.000 0159·414	8·944	0·241
10	150·711	8·703	0·242
20	142·250	8·461	0·242
30	134·031	8·219	0·242
40	126·054	7·977	0·343
50	118·320	7·734	0·243
85° 0′	0.000 0110·829	7·491	0·243
10	103·581	7·248	0·243
20	96·576	7·005	0·244
30	89·815	6·761	0·244
40	83·298	6·517	0·244
50	77·025	6·273	0·244
86° 0′	0.000 0070·996	6·029	0·245
10	65·212	5·784	0·244
20	59·672	5·540	0·245
30	54·377	5·295	0·246
40	49 328	5·049	0·244
50	44·523	4·805	0·246
87° 0′	0.000 0039·964	4·559	0·245
10	35·650	4·314	0·247
20	31·583	4·067	0·245
30	27·761	3·822	0·246
40	24·185	3·576	0·246
50	20·855	3·330	0·246
88° 0′	0.000 0017·771	3·084	

φ	log V	Differenzen −	Differenzen +
88° 0′	0.000 0017·771		
10	14·933	2·838	0·247
20	12·342	2·591	0·247
30	9·998	2·344	0·246
40	7·900	2·098	0·247
50	6·049	1·851	0·246
89° 0′	0.000 0004·444	1·605	0·247
10	3·086	1·358	0·247
20	1·975	1·111	0·247
30	1·111	0·864	0·247
40	0·494	0·617	0·246
50	0·123	0·371	0·248
90° 0′	0.000 0000·000	0·123	

Berechnungsformeln für log *V*:

$$\log V = +\,[4{\cdot}164\,0730{\cdot}989]\cos 2\varphi - [1{\cdot}690\,3618{\cdot}9]\cos 4\varphi + [9{\cdot}341\,589]\cos 6\varphi - [7{\cdot}043\,97]\cos 8\varphi + [4{\cdot}774]\cos 10\varphi\ .$$

Wenn φ kleiner als 45° ist, so rechnet man bequemer:

$$-\log W = +\,[4{\cdot}161\,1047{\cdot}393]\sin 2\varphi + [1{\cdot}684\,5451{\cdot}6]\sin 4\varphi + [9{\cdot}332\,8643]\sin 6\varphi + [7{\cdot}032\,336]\sin 8\varphi + [4{\cdot}7598]\sin 10\varphi$$

$$V = \frac{W}{\sqrt{1-e^2}} \quad \text{oder} \quad V = W\sqrt{1+e'^2}$$

$$\log\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} = \log\sqrt{1+e'^2} = 0.001\,4541{\cdot}798002$$

$$\log V = 7276{\cdot}985\,4166 - [3.861\,5877{\cdot}062]\sin 2(\varphi-45°) + [0.784\,3611{\cdot}0]\cos 4(\varphi-45°) + [7.832\,0728]\sin 6(\varphi-45°) - [4.93\,069]\cos 8(\varphi-45°)\ \ldots$$

vgl. § 34.

φ	log *M*	Δ	log *N*	Δ	log *r*	Δ	$\log \frac{1}{r^2}$	Δ
	6.801	+	6.804	+	6.803	+	— 20	—
0° 0′	7351·0	0·4	6434·6	0·2	1892·8	0·3	6.393 621	0
10	7351·4	1·1	6434·8	0·3	1893·1	0·7	621	0
20	7352·5	1·9	6435·1	0·6	1893·8	1·2	621	0
30	7354·4	2·5	6435·7	0·9	1895·0	1·8	621	0
40	7356·9	3·3	6436·6	1·1	1896·8	2·2	621	1
50	7360·2	4·1	6437·7	1·4	1899·0	2·7	620	0
1° 0′	7364·3	4·8	6439·1	1·5	1901·7	3·2	6.393 620	1
10	7369·1	5·5	6440·6	1·9	1904·9	3·6	619	1
20	7374·6	6·2	6442·5	2·1	1908·5	4·2	618	1
30	7380·8	7·0	6444·6	2·3	1912·7	4·7	617	0
40	7387·8	7·7	6446·9	2·6	1917·4	5·1	617	0
50	7395·5	8·5	6449·5	2·8	1922·5	5·6	617	2
2° 0′	7404·0	9·2	6452·3	3·1	1928·1	6·2	6.393 615	2
10	7413·2	9·9	6455·4	3·3	1934·3	6·6	613	1
20	7423·1	10·7	6458·7	3·5	1940·9	7·1	612	2
30	7433·8	11·4	6462·2	3·8	1948·0	7·6	610	1
40	7445·2	12·1	6466·0	4·1	1955·6	8·1	609	2
50	7457·3	12·8	6470·1	4·2	1963·7	8·5	607	1
3° 0′	7470·1	13·6	6474·3	4·6	1972·2	9·1	6.393 606	2
10	7483·7	14·3	6478·9	4·7	1981·3	9·5	604	2
20	7498·0	15·1	6483·6	5·1	1990·8	10·1	602	2
30	7513·1	15·8	6488·7	5·2	2000·9	10·5	600	2
40	7528·9	16·5	6493·9	5·5	2011·4	11·0	598	2
50	7545·4	17·2	6499·4	5·8	2022·4	11·5	596	3
4° 0′	7562·6	18·0	6505·2	6·0	2033·9	12·0	6.393 593	2
10	7580·6	18·7	6511·2	6·2	2045·9	12·4	591	3
20	7599·3	19·4	6517·4	6·5	2058·3	13·0	588	2
30	7618·7	20·1	6523·9	6·7	2071·3	13·4	586	3
40	7638·8	20·9	6530·6	6·9	2084·7	13·9	583	3
50	7659·7	21·6	6537·5	7·2	2098·6	14·4	580	3
5° 0′	7681·3	22·4	6544·7	7·5	2113·0	14·9	6.393 577	3
10	7703·7	23·0	6552·2	7·7	2127·9	15·4	574	3
20	7726·7	23·8	6559·9	7·9	2143·3	15·8	571	3
30	7750·5	24·5	6567·8	8·1	2159·1	16·4	568	3
40	7775·0	25·2	6575·9	8·5	2175·5	16·8	565	3
50	7800·2	25·9	6584·4	8·6	2192·3	17·3	562	4
6° 0′	7826·1	26·7	6593·0	8·9	2209·6	17·7	6.393 558	3
10	7852·8	27·4	6601·9	9·1	2227·3	18·3	555	4
20	7880·2	28·1	6611·0	9·4	2245·6	18·7	551	4
30	7908·3	28·8	6620·4	9·6	2264·3	19·2	547	4
40	7937·1	29·5	6630·0	9·8	2283·5	19·7	543	4
50	7966·6	30·2	6639·8	10·1	2303·2	20·2	539	4
7° 0′	7996·8	31·0	6649·9	10·3	2323·4	20·6	6.393 535	4
10	8027·8	31·7	6660·2	10·6	2344·0	21·1	531	4
20	8059·5	32·3	6670·8	10·8	2365·1	21·6	527	4
30	8091·8	33·1	6681·6	11·0	2386·7	22·1	523	5
40	8124·9	33·8	6692·6	11·3	2408·8	22·5	518	4
50	8158·7	34·5	6703·9	11·5	2431·3	23·0	514	5
8° 0′	8193·2		6715·4		2454·3		509	

vgl. § 39. S. 230.

φ	log W	Δ	log [1]	Δ	log [2]	Δ	log V²	Δ
	9.999 —10	—	8.512 —10	—	8.509 —10	—	0.002	—
0° 0′	*0000·0	0·1	6900·3	0·4	7816·7	0·1	9083·6	0·2
10	9999·9	0·4	6899·9	1·1	7816·6	0·4	9083·4	0·8
20	9999·5	0·6	6898·8	1·8	7816·2	0·6	9082·6	1·2
30	9998·9	0·9	6897·0	2·6	7815·6	0·9	9081·4	1·7
40	9998·0	1·1	6894·4	3·3	7814·7	1·1	9079·7	2·2
50	9996·9	1·3	6891·1	4·0	7813·6	1·3	9077·5	2·7
1° 0′	9995·6	1·6	6887·1	4·8	7812·3	1·6	9074·8	3·2
10	9994·0	1·8	6882·3	5·6	7810·7	1·9	9071·6	3·7
20	9992·2	2·1	6876·7	6·2	7808·8	2·0	9067·9	4·2
30	9990·1	2·4	6870·5	7·0	7806·8	2·4	9063·7	4·6
40	9987·7	2·5	6863·5	7·7	7804·4	2·5	9059·1	5·2
50	9985·2	2·9	6855·8	8·5	7801·9	2·9	9053·9	5·6
2° 0′	9982·3	3·0	6847·3	9·2	7799·0	3·0	9048·3	6·1
10	9979·3	3·3	6838·1	9·9	7796·0	3·3	9042·2	6·7
20	9976·0	3·6	6828·2	10·6	7792·7	3·6	9035·5	7·1
30	9972·4	3·8	6817·6	11·4	7789·1	3·8	9028·4	7·5
40	9968·6	4·0	6806·2	12·1	7785·3	4·0	9020·9	8·1
50	9964·6	4·3	6794·1	12·9	7781·3	4·3	9012·8	8·6
3° 0′	9960·3	4·5	6781·2	13·6	7777·0	4·5	9004·2	9·1
10	9955·8	4·8	6767·6	14·3	7772·5	4·8	8995·1	9·5
20	9951·0	5·0	6753·3	15·1	7767·7	5·0	8985·6	10·0
30	9946·0	5·3	6738·2	15·7	7762·7	5·3	8975·6	10·5
40	9940·7	5·5	6722·5	16·5	7757·4	5·5	8965·1	11·0
50	9935·2	5·7	6706 0	17·3	7751·9	5·7	8954·1	11·5
4° 0′	9929·5	6·0	6688·7	18·0	7746·2	6·0	8942·6	11·9
10	9923·5	6·2	6670·7	18·6	7740·2	6·3	8930·7	12·5
20	9917·3	6·5	6652·1	19·5	7733·9	6·4	8918·2	12·9
30	9910·8	6·7	6632·6	20·1	7727·5	6·7	8905·3	13·5
40	9904·1	7·0	6612·5	20·9	7720·8	7·0	8891·8	13·9
50	9897·1	7·2	6591·6	21·6	7713·8	7·2	8877·9	14·4
5° 0′	9889·9	7·4	6570·0	22·3	7706·6	7·4	8863·5	14·9
10	9882·5	7·7	6547·7	23·1	7699·2	7·7	8848·6	15·3
20	9874·8	7·9	6524·6	23·7	7691·5	7·9	8833·3	15·9
30	9866·9	8·2	6500·9	24·5	7683·6	8·2	8817·4	16·3
40	9858·7	8·4	6476·4	25·3	7675·4	8·4	8801·1	16·8
50	9850·3	8·7	6451·1	25·9	7667·0	8·7	8784·3	17·3
6° 0′	9841·6	8·8	6425·2	26·7	7658·3	8·9	8766·9	17·8
10	9832·8	9·2	6398·5	27·3	7649·4	9·1	8749·1	18·3
20	9823·6	9·3	6371·2	28·1	7640·3	9·3	8730·8	18·7
30	9814·3	9·6	6343·1	28·8	7631·0	9·6	8712·1	19·2
40	9804·7	9·9	6314·3	29·6	7621·4	9·9	8692·9	19·7
50	9794·8	10·1	6284·7	30·2	7611·5	10·1	8673·2	20·1
7° 0′	9784·7	10·3	6254·5	31·0	7601·4	10·3	8653·1	20·7
10	9774·4	10·5	6223·5	31·6	7591·1	10·5	8632·4	21·1
20	9763·9	10·8	6191·9	32·4	7580·6	10·8	8611·3	21·6
30	9753·1	11·1	6159·5	33·1	7569·8	11·1	8589·2	22·0
40	9742·0	11·2	6126·4	33·8	7558·7	11·2	8567·7	22·6
50	9730·8	11·5	6092·6	34·5	7547·5	11·5	8545·1	23·0
8° 0′	9719·3		6058·1		7536·0		8522·1	

vgl. § 39. S. 230.

φ	$\log M$	Δ	$\log N$	Δ	$\log r$	Δ	$\log \frac{1}{r^2}$	Δ
	6.801	+	6.804	+	6.803	+	— 20	—
8° 0′	8193·2	35·3	6715·4	11·7	2454·3	23·5	6.393 509	5
10	8228·5	35·9	6727·1	12·0	2477·8	23·9	504	4
20	8264·4	36·6	6739·1	12·2	2501·7	24·4	500	5
30	8301·0	37·4	6751·3	12·4	2526·1	25·0	495	5
40	8338·4	38·0	6763·7	12·7	2551·1	25·3	490	5
50	8376·4	38·7	6776·4	12·9	2576·4	25·8	485	5
9° 0′	8415·1	39·5	6789·3	13·2	2602·2	26·3	6.393 480	6
10	8454·6	40·1	6802·5	13·4	2628·5	26·8	474	5
20	8494·7	40·9	6815·9	13·6	2655·3	27·2	469	6
30	8535·6	41·5	6829·5	13·8	2682·5	27·7	463	5
40	8577·1	42·2	6843·3	14·1	2710·2	28·2	458	6
50	8619·3	42·9	6857·4	14·3	2738·4	28·6	452	5
10° 0′	8662·2	43·7	6871·7	14·5	2767·0	29·0	6.393 447	6
10	8705·9	44·3	6886·2	14·8	2796·0	29·6	441	6
20	8750·2	45·0	6901·0	15·0	2825·6	30·0	435	6
30	8795·2	45·6	6916·0	15·2	2855·6	30·4	429	6
40	8840·8	46·4	6931·2	15·5	2886·0	30·9	423	6
50	8887·2	47·0	6946·7	15·7	2916·9	31·4	417	7
11° 0′	8934·2	47·8	6962·4	15·9	2948·3	31·8	6.393 410	6
10	8982·0	48·4	6978·3	16·1	2980·1	32·3	404	6
20	9030·4	49·1	6994·4	16·4	3012·4	32·7	398	7
30	9079·5	49·7	7010·8	16·6	3045·1	33·2	391	7
40	9129·2	50·5	7027·4	16·8	3078·3	33·6	384	6
50	9179·7	51·1	7044·2	17·0	3111·9	34·1	378	7
12° 0′	9230·8	51·8	7061·2	17·3	3146·0	34·6	6.393 371	7
10	9282·6	52·5	7078·5	17·5	3180·6	34·9	364	7
20	9335·1	53·1	7096·0	17·7	3215·5	35·5	357	7
30	9388·2	53·8	7113·7	17·9	3251·0	35·8	350	7
40	9442·0	54·5	7131·6	18·2	3286·8	36·3	343	8
50	9496·5	55·1	7149·8	18·4	3323·1	36·8	335	7
13° 0′	9551·6	55·8	7168·2	18·6	3359·9	37·2	6.393 328	7
10	9607·4	56·5	7186·8	18·8	3397·1	37·6	321	8
20	9663·9	57·1	7205·6	19·0	3434·7	38·1	313	8
30	9721·0	57·7	7224·6	19·3	3472·8	38·5	305	7
40	9778·7	58·5	7243·9	19·4	3511·3	39·0	298	8
50	9837·2	59·0	7263·3	19·7	3550·3	39·3	290	8
14° 0′	9896·2	59·8	7283·0	19·9	3589·6	39·9	6.393 282	8
10	9956·0	60·3	7302·9	20·2	3629·5	40·2	274	8
20	*0016·3	61·1	7323·1	20·3	3669·7	40·7	266	8
30	0077·4	61·6	7343·4	20·6	3710·4	41·1	258	8
40	0139·0	62·3	7364·0	20·7	3751·5	41·5	250	9
50	0201·3	63·0	7384·7	21·0	3793·0	42·0	241	8
15° 0′	0264·3	63·6	7405·7	21·2	3835·0	42·4	6.393 233	8
10	0327·9	64·2	7426·9	21·4	3877·4	42·8	225	9
20	0392·1	64·8	7448·3	21·6	3920·2	43·1	216	9
30	0456·9	65·5	7469·9	21·9	3963·4	43·7	207	8
40	0522·4	66·1	7491·8	22·0	4007·1	44·1	199	9
50	0588·5	66·8	7513·8	22·3	4051·2	44·5	190	9
16° 0′	0655·3		7536·1		4095·7		181	

vgl. § 39. S. 230.

φ	log W	Δ	log [1]	Δ	log [2]	Δ	log V²	Δ
	9.999 —10	—	8.512 —10	—	8.509 — 10	—	0.002	—
8° 0′	9719·3	11·8	6058·1	35·2	7536·0	11·8	8522·1	23·5
10	9707·5	12·0	6022·9	36·0	7524·2	12·0	8498·6	23·9
20	9695·5	12·2	5986·9	36·6	7512·2	12·2	8474·7	24·4
30	9683·3	12·4	5950·3	37·3	7500·0	12·4	8450·3	24·9
40	9670·9	12·7	5913·0	38·1	7487·6	12·7	8425·4	25·4
50	9658·2	12·9	5874·9	38·7	7474·9	12·9	8400·0	25·8
9° 0′	9645·3	13·2	5836·2	39·5	7462·0	13·2	8374·2	26·3
10	9632·1	13·3	5796·7	40·1	7448·8	13·3	8347·9	26·8
20	9618·8	13·6	5756·6	40·8	7435·5	13·6	8321·1	27·2
30	9605·2	13·9	5715·8	41·6	7421·9	13·9	8293·9	27·7
40	9591·3	14·1	5674·2	42·2	7408·0	14·1	8266·2	28·1
50	9577·2	14·3	5632·0	42·9	7393·9	14·3	8238·1	28·6
10° 0′	9562·9	14·5	5589·1	43·6	7379·6	14·5	8209·5	29·1
10	9548·4	14·6	5545·5	44·3	7365·1	14·8	8180·4	29·6
20	9533·6	15·0	5501·2	45·0	7350·3	15·0	8150·8	29·9
30	9518·6	15·2	5456·2	45·7	7335·3	15·2	8120·9	30·5
40	9503·4	15·5	5410·5	46·4	7320·1	15·5	8090·4	30·9
50	9487·9	15·6	5364·1	47·0	7304·6	15·6	8059·5	31·4
11° 0′	9472·3	15·9	5317·1	47·7	7289·0	15·9	8028·1	31·8
10	9456·4	16·2	5269·4	48·5	7273·1	16·2	7996·3	32·3
20	9440·2	16·3	5220·9	49·0	7256·9	16·4	7964·0	32·7
30	9423·9	16·6	5171·9	49·8	7240·5	16·5	7931·3	33·2
40	9407·3	16·8	5122·1	50·5	7224·0	16·9	7898·1	33·6
50	9390·4	17·1	5071·6	51·1	7207·1	17·0	7864·5	34·1
12° 0′	9373·4	17·3	5020·5	51·8	7190·1	17·3	7830·4	34·5
10	9356·1	17·4	4968·7	52·4	7172·8	17·5	7795·9	35·0
20	9338·7	17·8	4916·3	53·2	7155·3	17·7	7760·9	35·4
30	9320·9	17·9	4863·1	53·8	7137·6	17·9	7725·5	35·9
40	9303·0	18·1	4809·3	54·5	7119·7	18·2	7689·6	36·3
50	9284·9	18·4	4754·8	55·1	7101·5	18·3	7653·3	36·7
13° 0′	9266·5	18·6	4699·7	55·8	7083·2	18·6	7616·6	37·2
10	9247·9	18·8	4643·9	56·4	7064·6	18·8	7579·4	37·7
20	9229·1	19·1	4587·5	57·1	7045·8	19·1	7541·7	38·1
30	9210·0	19·2	4530·4	57·8	7026·7	19·2	7503·6	38·5
40	9190·8	19·5	4472·6	58·4	7007·5	19·5	7465·1	38·9
50	9171·3	19·7	4414·2	59·1	6988·0	19·7	7426·2	39.4
14° 0′	9151·6	19·9	4355·1	59·7	6968·3	19·9	7386·8	39·8
10	9131·7	20·1	4295·4	60·4	6948·4	20·1	7347·0	40·3
20	9111·6	20·4	4235·0	61·0	6928·3	20·4	7306·7	40·6
30	9091·2	20·5	4174·0	61·7	6907·9	20·5	7266·1	41·2
40	9070·7	20·8	4112·3	62·3	6887·4	20·8	7224·9	41·5
50	9049·9	21·0	4050·0	62·9	6866·6	21·0	7183·4	42·0
15° 0′	9028·9	21·2	3987·1	63·6	6845·6	21·2	7141·4	42·4
10	9007·7	21·4	3923·5	64·3	6824·4	21·4	7099·0	42·8
20	8986·3	21·6	3859·2	64·8	6803·0	21·6	7056·2	43·2
30	8964·7	21·8	3794·4	65·5	6781·4	21·8	7013·0	43·7
40	8942·9	22·1	3728·9	66·1	6759·6	22·1	6969·3	44·0
50	8920·8	22·2	3662·8	66·8	6737·5	22·2	6925·3	44·5
16° 0′	8898·6		3596·0		6715·3		6880·8	

vgl. § 39. S. 230.

φ	$\log M$	Δ	$\log N$	Δ	$\log r$	Δ	$\log \frac{1}{r^2}$	Δ
	6.802		6.804		6.803		— 20	—
16° 0′	0655·3	67·4	7536·1	22·4	4095·7	44·9	6.393 181	9
10	0722·7	67·9	7558·5	22·7	4140·6	45·3	172	9
20	0790·6	68·7	7581·2	22·8	4185·9	45·7	163	9
30	0859·3	69·2	7604·0	23·1	4231·6	46·2	154	10
40	0928·5	69·8	7627·1	23·3	4277·8	46·6	144	9
50	0998·3	70·5	7650·4	23·5	4324·4	46·9	135	9
17° 0′	1068·8	71·1	7673·9	23·7	4371·3	47·4	6.393 126	10
10	1139·9	71·6	7697·6	23·9	4418·7	47·8	116	9
20	1211·5	72·3	7721·5	24·1	4466·5	48·2	107	10
30	1283·8	72·9	7745·6	24·3	4514·7	48·6	097	10
40	1356·7	73·5	7769·9	24·5	4563·3	49·0	087	9
50	1430·2	74·1	7794·4	24·7	4612·3	49·4	078	10
18° 0′	1504·3	74·7	7819·1	24·9	4661·7	49·8	6.393 068	10
10	1579·0	75·3	7844·0	25·0	4711·5	50·2	058	10
20	1654·3	75·8	7869·0	25·3	4761·7	50·5	048	10
30	1730·1	76·5	7894·3	25·5	4812·2	51·0	038	11
40	1806·6	77·1	7919·8	25·7	4863·2	51·4	027	10
50	1883·7	77·6	7945·5	25·9	4914·6	51·7	017	10
19° 0′	1961·3	78·2	7971·4	26·1	4966·3	52·2	6.393 007	11
10	2039·5	78·8	7997·5	26·2	5018·5	52·5	6.392 996	10
20	2118·3	79·4	8023·7	26·5	5071·0	52·9	986	11
30	2197·7	79 9	8050·2	26·6	5123·9	53·3	975	10
40	2277·6	80·5	8076·8	26·9	5177·2	53·7	965	11
50	2358·1	81·1	8103·7	27·0	5230·9	54·0	954	11
20° 0′	2439·2	81·6	8130·7	27·2	5284·9	54·5	6.392 943	11
10	2520·8	82·2	8157·9	27·4	5339·4	54·8	932	11
20	2603·0	82·8	8185·3	27·6	5394·2	55·2	921	11
30	2685·8	83·3	8212·9	27·8	5449·4	55·5	910	11
40	2769·1	83·9	8240·7	27·9	5504·9	55·9	899	11
50	2853·0	84·4	8268·6	28·2	5560·8	56·3	888	11
21° 0′	2937·4	85·0	8296·8	28·3	5617·1	56·6	6.392 877	12
10	3022·4	85·5	8325·1	28·5	5673·7	57·1	865	11
20	3107·9	86·1	8353·6	28·7	5730·8	57·3	854	12
30	3194·0	86·6	8382·3	28·9	5788·1	57·8	842	11
40	3280·6	87·1	8411·2	29·0	5845·9	58·1	831	12
50	3367·7	87·7	8440·2	29·2	5904·0	58·4	819	11
22° 0′	3455·4	88·2	8469·4	29·4	5962·4	58·8	6.392 808	12
10	3543·6	88·8	8498·8	29·6	6021·2	59·2	796	12
20	3632·4	89·2	8528·4	29·8	6080·4	59·5	784	12
30	3721·6	89·8	8558·2	29·9	6139·9	59·8	772	12
40	3811·4	90·3	8588·1	30·1	6199·7	60·2	760	12
50	3901·7	90 8	8618·2	30·3	6259·9	60·6	748	12
23° 0′	3992·5	91·3	8648·5	30·4	6320·5	60·9	6.392 736	12
10	4083·8	91·9	8678·9	30·6	6381·4	61·2	724	13
20	4175·7	92·3	8709·5	30·8	6442·6	61·6	711	12
30	4268·0	92·9	8740·3	30·9	6504·2	61·9	699	12
40	4360·9	93·3	8771·2	31·2	6566·1	62·2	687	13
50	4454·2	93·9	8802·4	31·2	6628·3	62·5	674	12
24° 0′	4548·1		8833·6		6690·8		6.392 662	

vgl. § 39. S. 230.

φ	*log W*	Δ	*log* [1]	Δ	*log* [2]	Δ	*log* V^2	Δ
	9.999 —10	—	8.512 —10	—	8.509 —10	—	0.002	—
16° 0′	8898·6	22·5	3596·0	67·3	6715·3	22·5	6880·8	44·9
10	8876·1	22·6	3528·7	68·0	6692·8	22·6	6835·9	45·4
20	8853·5	22·9	3460·7	68·6	6670·2	22·9	6790·5	45·7
30	8830·6	23·1	3392·1	69·2	6647·3	23·1	6744·8	46·2
40	8807·5	23·3	3322·9	69·9	6624·2	23·3	6698·6	46·5
50	8784·2	23·5	3253·0	70·5	6600·9	23·5	6652·1	47·0
17° 0′	8760·7	23·6	3182·5	71·0	6577·4	23·6	6605·1	47·4
10	8737·1	23·9	3111·5	71·6	6553·8	23·9	6557·7	47·8
20	8713·2	24·1	3039·9	72·4	6529·9	24·1	6519·9	48·2
30	8689·1	24·3	2967·5	72·9	6505·8	24·3	6461·7	48·5
40	8664·8	24·5	2894·6	73·5	6481·5	24·5	6413·2	49·0
50	8640·3	24·7	2821·1	74·1	6457·0	24·7	6364·2	49·4
18° 0′	8615·6	24·9	2747·0	74·7	6432·3	24·9	6314·8	49·8
10	8590·7	25·1	2672·3	75·2	6407·4	25·1	6265·0	50·2
20	8565·6	25·3	2597·1	75·9	6382·3	25·3	6214·8	50·6
30	8540·3	25·5	2521·2	76·5	6357·0	25·5	6164·2	51·0
40	8514·8	25·7	2444·7	77·0	6331·5	25·7	6113·2	51·3
50	8489·1	25·8	2367·7	77·6	6305·8	25·9	6061·9	51·8
19° 0′	8463·3	26·1	2290·1	78·3	6279·9	26·0	6010·1	52·1
10	8437·2	26·3	2211·8	78·7	6253·9	26·3	5958·0	52·6
20	8410·9	26·4	2133·1	79·4	6227·6	26·4	5905·4	52·9
30	8384·5	26·7	2053·7	80·0	6201·2	26·7	5852·5	53·3
40	8357·8	26·8	1973·7	80·5	6174·5	26·8	5799·2	53·6
50	8331·0	27·0	1893·2	81·0	6147·7	27·1	5745·6	54·1
20° 0′	8304·0	27·3	1812·2	81·7	6120·6	27·1	5691·5	54·4
10	8276·7	27·4	1730·5	82·2	6093·4	27·4	5637·1	54·8
20	8249·3	27·6	1648·3	82·8	6066·0	27·6	5582·3	55·2
30	8221·7	27·7	1565·5	83·3	6038·4	27·7	5527·1	55·6
40	8194·0	28·0	1482·2	83·9	6010·7	28·0	5471·5	55·9
50	8166·0	28·1	1398·3	84·4	5982·7	28·1	5415·6	56·3
21° 0′	8137·9	28·4	1313·9	85·0	5954·6	28·4	5359·3	56·6
10	8109·5	28·5	1228·9	85·5	5926·2	28·5	5302·7	57·0
20	8081·0	28·6	1143·4	86·1	5897·7	28·7	5245·7	57·4
30	8052·4	28·9	1057·3	86·6	5869·0	28·8	5188·3	57·7
40	8023·5	29·1	0970·7	87·1	5840·2	29·1	5130·6	58·1
50	7994·4	29·2	0883·6	87·7	5811·1	29·2	5072·5	58·5
22° 0′	7965·2	29·4	0795·9	88·2	5781·9	29·4	5014·0	58·8
10	7935·8	29·6	0707·7	88·7	5752·5	29·6	4955·2	59·1
20	7906·2	29·7	0619·0	89·3	5722·9	29·7	4896·1	59·5
30	7876·5	29·9	0529·7	89·8	5693·2	30·0	4836·6	59·9
40	7846·6	30·1	0439·9	90·3	5663·2	30·1	4776·7	60·2
50	7816·5	30·3	0349·6	90·8	5633·1	30·2	4716·5	60·5
23° 0′	7786·2	30·5	0258·8	91·3	5602·9	30·5	4656·0	60·9
10	7755·7	30·6	0167·5	91·8	5572·4	30·6	4595·1	61·3
20	7725·1	30·8	0075·7	92·4	5541·8	30·8	4533·8	61·5
30	7694·3	30·9	*9983·3	92·8	5511·0	30·9	4472·3	61·9
40	7663·4	31·1	9890·5	93·4	5480·1	31·1	4410·4	62·3
50	7632·3	31·3	9797·1	93·8	5449·0	31·3	4348·1	62·5
24° 0′	7601·0		9703·3		5417·7		4285·6	

vgl. § 39. S. 230.

φ	log M	Δ	log N	Δ	log r	Δ	log $\frac{1}{r^2}$	Δ
	6.802	+	6.804	+	6.803	+	— 20	—
24° 0′	4548·1	94·3	8833·6	31·5	6690·8	62·9	6.392 662	13
10	4642·4	94·8	8865·1	31·6	6753·7	63·3	649	12
20	4737·2	95·4	8896·7	31·8	6817·0	63·5	637	13
30	4832·6	95·8	8928·5	31·9	6880·5	63·9	624	13
40	4928·4	96·3	8960·4	32·1	6944·4	64·2	611	13
50	5024·7	96·7	8992·5	32·3	7008·6	64·5	598	13
25° 0′	5121·4	97·2	9024·8	32·4	7073·1	64·8	6.392 585	13
10	5218·6	97·8	9057·2	32·5	7137·9	65·2	572	13
20	5316·4	98·1	9089·7	32·8	7203·1	65·4	559	13
30	5414·5	98·7	9122·5	32·9	7268·5	65·8	546	13
40	5513·2	99·1	9155·4	33·0	7334·3	66·0	533	13
50	5612·3	99·6	9188·4	33·2	7400·3	66·4	520	13
26° 0′	5711·9	100·0	9221·6	33·3	7466·7	66·7	6.392 507	14
10	5811·9	100·4	9254·9	33·5	7533·4	67·0	493	13
20	5912·3	101·0	9288·4	33·6	7600·4	67·3	480	14
30	6013·3	101·3	9322·0	33·8	7667·7	67·5	466	13
40	6114·6	101·8	9355·8	34·0	7735·2	67·9	453	14
50	6216·4	102·3	9389·8	34·1	7803·1	68·2	439	13
27° 0′	6318·7	102·7	9423·9	34·2	7871·3	68·4	6.392 426	14
10	6421·4	103·1	9458·1	34·3	7939·7	68·8	412	14
20	6524·5	103·5	9492·4	34·6	8008·5	69·0	398	13
30	6628·0	104·0	9527·0	34·6	8077·5	69·3	385	14
40	6732·0	104·4	9561·6	34·8	8146·8	69·6	371	14
50	6836·4	104·8	9596·4	34·9	8216·4	69·8	357	14
28° 0′	6941·2	105·2	9631·3	35·1	8286·2	70·2	6.392 343	14
10	7046·4	105·6	9666·4	35·2	8356·4	70·4	329	14
20	7152·0	106·0	9701·6	35·4	8426·8	70·7	315	15
30	7258·0	106·5	9737·0	35·4	8497·5	71·0	300	14
40	7364·5	106·8	9772·4	35·7	8568·5	71·2	286	14
50	7471·3	107·2	9808·1	35·7	8639·7	71·5	272	14
29° 0′	7578·5	107·7	9843·8	35·9	8711·2	71·7	6.392 258	15
10	7686·2	108·0	9879·7	36·0	8782·9	72·0	243	14
20	7794·2	108·4	9915·7	36·1	8854·9	72·3	229	14
30	7902·6	108·7	9951·8	36·3	8927·2	72·5	215	15
40	8011·3	109·2	9988·1	36·4	8999·7	72·8	200	14
50	8120·5	109·5	*0024·5	36·5	9072·5	73·0	186	15
30° 0′	8230·0	109·9	0061·0	36·6	9145·5	73·3	6.392 171	15
10	8339·9	110·3	0097·6	36·8	9218·8	73·5	156	14
20	8450·2	110·6	0134·4	36·8	9292·3	73·7	142	15
30	8560·8	111·0	0171·2	37·0	9366·0	74·0	127	15
40	8671·8	111·4	0208·2	37·1	9440·0	74·2	112	15
50	8783·2	111·7	0245·3	37·3	9514·2	74·5	097	15
31° 0′	8894·9	112·0	0282·6	37·3	9588·7	74·7	6.392 082	15
10	9006·9	112·4	0319·9	37·5	9663·4	74·9	067	15
20	9119·3	112·7	0357·4	37·6	9738·3	75·2	052	15
30	9232·0	113·1	0395·0	37·6	9813·5	75·4	037	15
40	9345·1	113·4	0432·6	37·8	9888·9	65·6	022	15
50	9458·5	113·7	0470·4	38·0	9964·5	65·8	007	15
32° 0′	9572·2		0508·4		*0040·3		6.391 992	

vgl. § 39. S. 230.

φ	log W	Δ	log [1]	Δ	log [2]	Δ	log V²	Δ
	9.999 —10	—	8.511 —10	—	8.509 —10	—	0.002	—
24° 0′	7601·0	31·5	9703·3	94·4	5417·7	31·5	4285·6	62·9
10	7569·5	31·6	9608·9	94·8	5386·2	31·6	4222·7	63·2
20	7537·9	31·7	9514·1	95·3	5354·6	31·7	4159·5	63·6
30	7506·2	32·0	9418·8	95·8	5322·9	32·0	4095·9	63·9
40	7474·2	32·1	9323·0	96·3	5290·9	32·1	4032·0	64·1
50	7442·1	32·2	9226·7	96·8	5258·8	32·2	3967·9	64·5
25° 0′	7409·9	32·4	9129·9	97·2	5226·6	32·4	3903·4	64·9
10	7377·5	32·6	9032·7	97·7	5194·2	32·6	3838·5	65·1
20	7344·9	32·7	8935·0	98·2	5161·6	32·7	3773·4	65·5
30	7312·2	32·9	8836·8	98·7	5128·9	32·9	3707·9	65·7
40	7279·3	33·0	8738·1	99·1	5096·0	33·1	3642·2	66·1
50	7246·3	33·2	8639·0	99·5	5062·9	33·1	3576·1	66·4
26° 0′	7213·1	33·4	8539·5	100·0	5029·8	33·4	3509·7	66·7
10	7179·7	33·5	8439·5	100·5	4996·4	33·5	3443·0	66·9
20	7146·2	33·6	8339·0	100·9	4962·9	33·6	3376·1	67·3
30	7112·6	33·8	8238·1	101·4	4929·3	33·8	3308·8	67·6
40	7078·8	33·9	8136·7	101·8	4895·5	33·9	3241·2	67·9
50	7044·9	34·1	8034·9	102·3	4861·6	34·1	3173·3	68·1
27° 0′	7010·8	34·2	7932·6	102·6	4827·5	34·2	3105·2	68·5
10	6976·6	34·4	7830·0	103·1	4793·3	34·4	3036·7	68·7
20	6942·2	34·5	7726·9	103·6	4758·9	34·5	2968·0	69·0
30	6907·7	34·7	7623·3	103·9	4724·4	34·7	2899·0	69·4
40	6873·0	34·8	7519·4	104·4	4689·7	34·8	2829·6	69·5
50	6838·2	34·9	7415·0	104·8	4654·9	34·9	2760·1	69·9
28° 0′	6803·3	35·1	7310·2	105·2	4620·0	35·1	2690·2	70·2
10	6768·2	35·2	7205·0	105·7	4584·9	35·2	2620·0	70·4
20	6733·0	35·3	7099·3	106·0	4549·7	35·3	2549·6	70·7
30	6697·7	35·5	6993·3	106·4	4514·4	35·5	2478·9	70·9
40	6662·2	35·6	6886·9	106·9	4478·9	35·6	2408·0	71·2
50	6626·6	35·8	6780·0	107·2	4443·3	35·8	2336·8	71·5
29° 0′	6590·8	35·8	6672·8	107·6	4407·5	35·8	2265·3	71·8
10	6555·0	36·0	6565·2	108·0	4371·7	36·0	2193·5	72·0
20	6519·0	36·2	6457·2	108·4	4335·7	36·2	2121·5	72·3
30	6482·8	36·2	6348·8	108·8	4299·5	36·2	2049·2	72·5
40	6446·6	36·4	6240·0	109·2	4263·3	36·4	1976·7	72·7
50	6410·2	36·5	6130·8	109·5	4226·9	36·5	1904·0	73·1
30° 0′	6373·7	36·7	6021·3	109·9	4190·4	36·7	1830·9	73·2
10	6337·0	36·7	5911·4	110·3	4153·7	36·7	1757·7	73·5
20	6300·3	36·9	5801·1	110·6	4117·0	36·9	1684·2	73·8
30	6263·4	37·0	5690·5	111·0	4080·1	37·0	1610·4	74·0
40	6226·4	37·1	5579·5	111·3	4043·1	37·1	1536·4	74·2
50	6189·3	37·2	5468·2	111·7	4006·0	37·2	1462·2	74·5
31° 0′	6152·1	37·4	5356·5	112·1	3968·8	37·4	1387·7	74·7
10	6114·7	37·4	5244·4	112·4	3931·4	37·5	1313·0	74·9
20	6077·3	37·6	5132·0	112·7	3893·9	37·5	1238·1	75·2
30	6039·7	37·7	5019·3	113·0	3856·4	37·7	1162·9	75·3
40	6002·0	37·8	4906·3	113·4	3818·7	37·8	1087·6	75·6
50	5964·2	37·9	4792·9	113·8	3780·9	37·9	1012·0	75·8
32° 0′	5926·3		4679·1		3743·0		0936·2	

vgl. § 39. S. 230.

φ	log M	Δ	log N	Δ	log r	Δ	$\log \frac{1}{r^2}$	Δ
	6.802	+	6.805	+	6.804	+	— 20	—
32° 0′	9572·2	114·1	0508·4	38·0	0040·3	76·0	6.391 992	15
10	9686·3	114·3	0546·4	38·1	0116·3	76·3	977	16
20	9800·6	114·7	0584·5	38·2	0192·6	76·4	961	15
30	9915·3	115·0	0622·7	38·4	0269·0	76·7	946	15
40	*0030·3	115·3	0661·1	38·4	0345·7	76·9	931	16
50	0145·6	115·7	0699·5	38·5	0422·6	77·1	915	15
33° 0′	0261·3	115·9	0738·0	38·7	0499·7	77·2	6.391 900	15
10	0377·2	116·2	0776·7	38·7	0576·9	77·5	885	16
20	0493·4	116·5	0815·4	38·9	0654·4	77·7	869	15
30	0609·9	116·8	0854·3	38·9	0732·1	77·9	854	16
40	0726·7	117·1	0893·2	39·0	0810·0	78·0	838	16
50	0843·8	117·4	0932·2	39·2	0888·0	78·3	822	15
34° 0′	0961·2	117·6	0971·4	39·2	0966·3	78·4	6.391 807	16
10	1078·8	118·0	1010·6	39·3	1044·7	78·6	791	16
20	1196·8	118·2	1049·9	39·4	1123·3	78·8	775	15
30	1315·0	118·4	1089·3	39·5	1202·1	79·0	760	16
40	1433·4	118·8	1128·8	39·5	1281·1	79·1	744	16
50	1552·2	118·9	1168·3	39·7	1360·2	79·4	728	16
35° 0′	1671·1	119·3	1208·0	39·7	1439·6	79·5	6.391 712	16
10	1790·4	119·5	1247·7	39·9	1519·1	79·6	696	16
20	1909·9	119·7	1287·6	39·9	1598·7	79·8	680	16
30	2029·6	120·0	1327·5	40·0	1678·5	80·0	664	16
40	2149·6	120·2	1367·5	40·1	1758·5	80·2	648	16
50	2269·8	120·4	1407·6	40·1	1838·7	80·3	632	16
36° 0′	2390·2	120·7	1447·7	40·2	1919·0	80·4	6.391 616	16
10	2510·9	120·9	1487·9	40·3	1999·4	80·6	600	16
20	2631·8	121·2	1528·2	40·4	2080·0	80·8	584	16
30	2753·0	121·3	1568·6	40·5	2160·8	80·9	568	16
40	2874·3	121·6	1609·1	40·5	2241·7	81·0	552	17
50	2995·9	121·7	1649·6	40·6	2322·7	81·2	535	16
37° 0′	3117·6	122·0	1690·2	40·6	2403·9	81·3	6.391 519	16
10	3239·6	122·2	1730·8	40·7	2485·2	81·5	503	16
20	3361·8	122·4	1771·5	40·8	2566·7	81·5	487	17
30	3484·2	122·5	1812·3	40·9	2648·2	81·8	470	16
40	3606·7	122·8	1853·2	40·9	2730·0	81·8	454	16
50	3729·5	122·9	1894·1	41·0	2811·8	82·0	438	17
38° 0′	3852·4	123·1	1935·1	41·0	2893·8	82·0	6.391 421	16
10	3975·5	123·3	1976·1	41·1	2975·8	82·2	405	17
20	4098·8	123·5	2017·2	41·2	3058·0	82·3	388	16
30	4222·3	123·6	2058·4	41·2	3140·3	82·5	372	17
40	4345·9	123·8	2099·6	41·3	3222·8	82·5	355	16
50	4469·7	124·0	2140·9	41·3	3305·3	82·6	339	17
39° 0′	4593·7	124·1	2182·2	41·4	3387·9	82·8	6.391 322	16
10	4717·8	124·3	2223·6	41·4	3470·7	82·8	306	17
20	4842·1	124·4	2265·0	41·5	3553·5	83·0	289	16
30	4966·5	124·6	2306·5	41·5	3636·5	83·0	273	17
40	5091·1	124·7	2348·0	41·5	3719·5	83·2	256	17
50	5215·8	124·8	2389·5	41·7	3802·7	83·2	239	16
40° 0′	5340·6		2431·2		8885·9		6.391 223	

vgl. § 39. S. 230.

φ	*log W*	Δ	*log* [1]	Δ	*log* [2]	Δ	*log* V^2	Δ
	9.999 —10	—	8.511 —10	—	8.509 —10	—	0.002	—
32° 0′	5926·3	38·0	4679·1	114·0	3743·0	38·0	0936·2	76·1
10	5888·3	38·2	4565·1	114·4	3705·0	38·2	0860·1	76·2
20	5850·1	38·2	4450·7	114·7	3666·8	38·2	0783·2	76·5
30	5811·9	38·3	4336·0	115·0	3628·6	38·3	0707·4	76·7
40	5773·6	38·5	4221·0	115·3	3590·3	38·5	0630·7	76·8
50	5735·1	38·5	4105·7	115·6	3551·8	38·5	0553·9	77·1
33° 0′	5696·6	38·6	3990·1	116·0	3513·3	38·7	0476·8	77·3
10	5658·0	38·8	3874·1	116·2	3474·6	38·7	0399·5	77·5
20	5619·2	38·8	3757·9	116·5	3435·9	38·8	0322·0	77·7
30	5580·4	39·0	3641·4	116·8	3397·1	38·9	0244·3	77·8
40	5541·4	39·0	3524·6	117·1	3358·1	39·1	0166·5	78·1
50	5502·4	39·1	3407·5	117·4	3319·1	39·1	0088·4	78·2
34° 0′	5463·3	39·2	3290·1	117·6	3280·0	39·2	0010·2	78·5
10	5424·1	39·3	3172·5	117·9	3240·8	39·3	*9931·7	78·6
20	5384·8	39·4	3054·6	118·2	3201·5	39·4	9853·1	78·8
30	5345·4	39·5	2936·4	118·5	3162·1	39·5	9774·3	79·0
40	5305·9	39·6	2817·9	118·7	3122·6	39·6	9695·3	79·1
50	5266·3	39·7	2699·2	119·0	3083·0	39·7	9616·2	79·3
35° 0′	5226·6	39·7	2580·2	119·2	3043·3	39·6	9536·9	79·5
10	5186·9	39·8	2461·0	119·5	3003·7	39·9	9457·4	79·7
20	5147·1	39·9	2341·5	119·8	2963·8	40·0	9377·7	79·8
30	5107·2	40·0	2221·7	119·9	2923·8	40·0	9297·9	80·0
40	5067·2	40·1	2101·8	120·3	2883·8	40·0	9217·9	80·1
50	5027·1	40·2	1981·5	120·4	2843·8	40·2	9137·8	80·3
36° 0′	4986·9	40·2	1861·1	120·7	2803·6	40·2	9057·5	80·5
10	4946·7	40·3	1740·4	120·9	2763·4	40·3	8977·0	80·6
20	4906·4	40·4	1619·5	121·1	2723·1	40·4	8896·4	80·7
30	4866·0	40·4	1498·4	121·4	2682·7	40·4	8815·7	80·9
40	4825·6	40·5	1377·0	121·5	2642·3	40·5	8734·8	81·1
50	4785·1	40·6	1255·5	121·8	2601·8	40·6	8653·7	81·2
37° 0′	4744·5	40·7	1133·7	122·0	2561·2	40·7	8572·5	81·3
10	4703·8	40·7	1011·7	122·1	2520·5	40·7	8591·2	81·4
20	4663·1	40·8	0889·6	122·4	2479·8	40·8	8409·8	81·6
30	4622·3	40·9	0767·2	122·6	2439·0	40·9	8328·2	81·7
40	4581·4	40·9	0644·6	122·7	2398·1	40·9	8246·5	81·9
50	4540·5	41·0	0521·9	123·0	2357·2	41·0	8164·6	81·9
38° 0′	4499·5	41·0	0398·9	123·1	2316·2	41·0	8082·7	82·1
10	4458·5	41·1	0275·8	123·3	2275·2	41·1	8000·6	82·2
20	4417·4	41·2	0152·5	123·5	2234·1	41·2	7918·4	82·3
30	4376·2	41·2	0029·0	123·6	2192·9	41·2	7836·1	82·4
40	4335·0	41·2	*9905·4	123·8	2151·7	41·2	7753·7	82·6
50	4293·8	41·4	9781·6	124·0	2110·5	41·4	7671·1	82·6
39° 0′	4252·4	41·3	9657·6	124·1	2069·1	41·3	7588·5	82·8
10	4211·1	41·5	9533·5	124·3	2027·8	41·5	7505·7	82·8
20	4169·6	41·4	9409·2	124·4	1986·3	41·4	7422·9	82·9
30	4128·2	41·5	9284·8	124·5	1944·9	41·5	7340·0	83·1
40	4086·7	41·6	9160.0	124·7	1903·4	41·6	7256·9	83·1
50	4045·1	41·6	9035·6	124·9	1861·8	41·6	7173·8	83·2
40° 0′	4003·5		8910·7		1820·2		7090·6	

vgl. § 39. S. 230.

φ	$\log M$	Δ	$\log N$	Δ	$\log r$	Δ	$\log \frac{1}{r^2}$	Δ
	6.803	+	6.805	+	6.804	+	— 20	—
40° 0′	5340·6	125·0	2431·1	41·7	3885·9	83·3	6.391 223	17
10	5465·6	125·1	2472·8	41·7	3969·2	83·4	206	17
20	5590·7	125·2	2514·5	41·7	4052·6	83·5	189	16
30	5715·9	125·3	2556·2	41·8	4136·1	83·5	173	17
40	5841·2	125·4	2598·0	41·8	4219·6	83·6	156	17
50	5966·6	125·6	2639·8	41·9	4303·2	83·7	139	16
41° 0′	6092·2	125·7	2681·7	41·9	4386·9	83·8	6.391 123	17
10	6217·9	125·7	2723·6	41·9	4470·7	83·9	106	17
20	6343·6	125·9	2765·5	41·9	4554·6	83·9	089	17
30	6469·5	125·9	2807·4	42·0	4638·5	83·9	072	16
40	6595·4	126·1	2849·4	42·0	4722·4	84·1	056	17
50	6721·5	126·1	2891·4	42·1	4806·5	84·0	039	17
42° 0′	6847·6	126·2	2933·5	42·1	4890·5	84·2	6.391 022	17
10	6973·8	126·3	2975·6	42·0	4974·7	84·1	391 005	17
20	7100·1	126·3	3017·6	42·1	5058·8	84·3	*390 988	17
30	7226·4	126·4	3059·7	42·2	5143·1	84·3	971	16
40	7352·8	126·5	3101·9	42·2	5227·4	84·3	955	17
50	7479·3	126·5	3144·1	42·1	5311·7	84·3	938	17
43° 0′	7605·8	126·6	3186·2	42·2	5396·0	84·4	6.390 921	17
10	7732·4	126·7	3228·4	42·2	5480·4	84·4	904	17
20	7859·1	126·6	3270·6	42·3	5564·8	84·5	887	17
30	7985·7	126·8	3312·9	42·2	5649·3	84·5	870	17
40	8112·5	126·7	3355·1	42·3	5733·8	84·5	853	17
50	8239·2	126·8	3397·4	42·2	5818·3	84·5	836	17
44° 0′	8366·0	126·8	3439·6	42·3	5902·8	84·6	6.390 819	16
10	8492·8	126·9	3481·9	42·3	5987·4	84·5	803	17
20	8619·7	126·8	3524·2	42·3	6071·9	84·6	786	17
30	8746·5	126·9	3566·5	42·3	6156·5	84·6	769	17
40	8873·4	126·9	3608·8	42·3	6241·1	84·6	752	17
50	9000·3	126·9	3651·1	42·3	6325·7	84·6	735	17
45° 0′	9127·2	126·9	3693·4	42·3	6410·3	84·6	6.390 718	17
10	9254·1	126·9	3735·7	42·3	6494·9	84·6	701	17
20	9381·0	126·9	3778·0	42·3	6579·5	84·6	684	17
30	9507·9	126·9	3820·3	42·3	6664·1	84·6	667	17
40	9634·8	126·9	3862·6	42·2	6748·7	84·6	650	17
50	9761·7	126·8	3904·8	42·3	6833·3	84·5	633	17
46° 0′	9888·5	126·8	3947·1	42·3	6917·8	84·6	6.390 616	16
10	*0015·3	126·8	3989·4	42·3	7002·4	84·5	600	17
20	0142·1	126·8	4031·7	42·2	7086·9	84·5	583	17
30	0268·9	126·7	4073·9	42·3	7171·4	84·5	566	17
40	0395·6	126·7	4116·2	42·2	7255·9	84·5	549	17
50	0522·3	126·7	4158·4	42·2	7340·4	84·4	532	17
47° 0′	0649·0	126·6	4200·6	42·2	7424·8	84·4	6.390 515	17
10	0775·6	126·5	4242·8	42·2	7509·2	84·3	498	17
20	0902·1	126·5	4285·0	42·2	7593·5	84·4	481	16
30	0928·6	126·4	4327·2	42·1	7677·9	84·3	474	17
40	1155·0	126·4	4369·3	42·1	7762·2	84·2	448	17
50	1281·4	126·3	4411·4	42·1	7846·4	84·2	431	17
48° 0′	1407·7		4453·5		7930·6		6.390 414	

vgl. § 39. S. 230.

φ	log W	Δ	log [1]	Δ	log [2]	Δ	log V²	Δ
	9.999 —10	—	8·511 —10	—	8.509 —10	—	0.001	
40° 0′	4003·5	41·7	8910·6	34·8	1820·2	41·7	7090·6	83·4
10	3961·8	41·7	8785·8	35·1	1778·5	41·7	7007·2	83·3
20	3920·1	41·7	8660·7	35·2	1736·8	41·7	6923·9	83·5
30	3878·4	41·8	8535·5	35·4	1695·1	41·8	6840·4	83·6
40	3836·6	41·8	8410·1	35·4	1653·3	41·8	6756·8	83·6
50	3794·8	41·9	8284·7	35·6	1611·5	41·9	6673·2	83·7
41° 0′	3752·9	41·8	8159·1	35·6	1569·6	41·8	6589·5	83·8
10	3711·1	42·0	8033·5	35·8	1527·8	42·0	6505·7	83·9
20	3669·1	41·9	7907·7	35·8	1485·8	41·9	6421·9	83·9
30	3627·2	42·0	7781·9	36·0	1443·9	42·0	6338·0	84·0
40	3585·2	42·0	7655·9	36·0	1401·9	42·0	6254·0	84·0
50	3543·2	42·0	7529·9	36·1	1359·9	42·1	6170·0	84·1
42° 0′	3501·2	42·1	7403·8	36·2	1317·8	42·0	6085·9	84·1
10	3459·1	42·1	7277·6	36·3	1275·8	42·1	6001·8	84·2
20	3417·0	42·1	7151·3	36·4	1233·7	42·1	5917·6	84·2
30	3374·9	42·2	7024·9	36·4	1191·6	42·2	5833·4	84·3
40	3332·7	42·1	6898·5	36·5	1149·4	42·1	5749·1	84·3
50	3290·6	42·2	6772·0	36·5	1107·3	42·2	5664·8	84·4
43° 0′	3248·4	42·2	6645·5	36·6	1065·1	42·2	5580·4	84·4
10	3206·2	42·2	6518·9	36·6	1022·9	42·2	5496·0	84·4
20	3164·0	42·2	6392·3	36·7	0980·7	42·2	5411·6	84·5
30	3121·8	42·3	6265·6	36·7	0938·5	42·3	5327·1	84·5
40	3079·5	42·2	6138·9	36·8	0896·2	42·2	5242·6	84·5
50	3037·3	42·3	6012·1	36·8	0854·0	42·3	5158·1	84·5
44° 0′	2995·0	42·3	5885·3	36·8	0811·7	42·3	5073·6	84·5
10	2952·7	42·2	5758·5	36·9	0769·4	42·3	4989·1	84·6
20	2910·5	42·3	5631·6	36·8	0727·1	42·2	4904·5	84·6
30	2868·2	42·3	5504·8	36·9	0684·9	42·3	4819·9	84·6
40	2825·9	42·3	5377·9	36·9	0642·6	42·3	4735·3	84·6
50	2783·6	42·3	5251·0	36·9	0600·3	42·3	4650·7	84·6
45° 0′	2741·3	42·3	5124·1	36·9	0558·0	42·3	4566·1	84·6
10	2699·0	42·3	4997·2	36·9	0515·7	42·3	4481·5	84·6
20	2656·7	42·3	4870·3	36·9	0473·4	42·3	4396·9	84·6
30	2614·4	42·3	4743·4	36·9	0431·1	42·3	4312·3	84·5
40	2572·1	42·3	4616·5	36·8	0388·8	42·3	4227·8	84·6
50	2529·8	42·3	4489·7	36·9	0346·5	42·3	4143·2	84·6
46° 0′	2487·5	42·3	4362·8	36·8	0304·2	42·3	4058·6	84·5
10	2445·2	42·2	4236·0	36·8	0261·9	42·2	3974·1	84·6
20	2403·0	42·3	4109·2	36·8	0219·7	42·3	3889·5	84·5
30	2360·7	42·2	3982·4	36·7	0177·4	42·2	3805·0	84·5
40	2318·5	42·3	3855·7	36·7	0135·2	42·3	3720·5	84·4
50	2276·2	42·2	3729·0	36·6	0092·9	42·2	3636·1	84·5
47° 0′	2234·0	42·2	3602·4	36·6	0050·7	42·2	3551·6	84·4
10	2191·8	42·2	3475·8	36·6	0008·5	42·2	3467·2	84·3
20	2149·6	42·1	3349·2	36·5	*9966·3	42·1	3382·9	84·3
30	2107·5	42·2	3222·7	36·4	9924·2	42·2	3298·6	84·3
40	2065·3	42·1	3096·3	36·3	9882·0	42·1	3214·3	84·3
50	2023·2	42·1	2970·0	36·3	9839·9	42·1	3130·0	84·1
48° 0′	1981·1		2843·7		9797·8		3045·9	

vgl. § 39. S. 230.

φ	log *M*	Δ	log *N*	Δ	log *r*	Δ	log $\frac{1}{r^2}$	Δ
	6.804	+	6.805	+	6.804	+	− 20	−
48° 0′	1407·7	126·2	4453·5	42·1	7930·6	84·1	6.390 414	17
10	1533·9	126·1	4495·6	42·0	8014·7	84·1	397	17
20	1660·0	126·1	4537·6	42·0	8098·8	84·0	380	17
30	1786·1	125·9	4579·6	42·0	8182·8	84·0	363	16
40	1912·0	125·9	4621·6	42·0	8266·8	83·9	347	17
50	2037·9	125·8	4663·6	41·9	8350·7	83·9	330	17
49° 0′	2163·7	125·6	4705·5	41·9	8434·6	83·8	6.390 313	17
10	2289·3	125·6	4747·4	41·9	8518·4	83·7	296	16
20	2414·9	125·5	4789·3	41·8	8602·1	83·6	280	17
30	2540·4	125·3	4831·1	41·8	8685·7	83·6	263	17
40	2665·7	125·2	4872·9	41·7	8769·3	83·5	246	17
50	2790·9	125·1	4914·6	41·7	8852·8	83·4	229	16
50° 0′	2916·0	125·0	4956·3	41·7	8936·2	83·3	6.390 213	17
10	3041·0	124·9	4998·0	41·6	9019·5	83·2	196	17
20	3165·9	124·7	5039·6	41·6	9102·7	83·2	179	16
30	3290·6	124·6	5081·2	41·5	9185·9	83·0	163	17
40	3415·2	124·4	5122·7	41·5	9268·9	83·0	146	16
50	3539·6	124·3	5164·2	41·4	9351·9	82·8	130	17
51° 0′	3663·9	124·1	5205·6	41·4	9434·7	82·8	6.390 113	17
10	3788·0	124·0	5247·0	41·3	9517·5	82·7	096	16
20	3912·0	123·8	5288·3	41·3	9600·2	82·5	080	17
30	4035·8	123·7	5329·6	41·2	9682·7	82·4	063	16
40	4159·5	123·5	5370·8	41·2	9765·1	82·4	047	16
50	4283·0	123·3	5412·0	41·1	9847·5	82·2	031	17
52° 0′	4406·3	123·1	5453·1	41·0	9929·7	82·1	6.390 014	16
10	4529·4	123·0	5494·1	41·0	*0011·8	82·0	389 998	17
20	4652·4	122·8	5535·1	40·9	0093·8	81·8	981	16
30	4775·2	122·6	5576·0	40·9	0175·6	81·7	965	16
40	4897·8	122·4	5616·9	40·8	0257·3	81·6	949	17
50	5020·2	122·2	5657·7	40·7	0338·9	81·5	932	16
53° 0′	5142·4	122·0	5698·4	40·7	0420·4	81·3	6.389 916	16
10	5264·4	121·8	5739·1	40·6	0501·7	81·2	900	17
20	5386·2	121·5	5779·7	40·5	0582·9	81·1	883	16
30	5507·7	121·4	5820·2	40·5	0664·0	80·9	867	16
40	5629·1	121·2	5860·7	40·3	0774·9	80·7	851	16
50	5750·3	120·9	5901·0	40·4	0825·6	80·7	835	16
54° 0′	5871·2	120·7	5941·3	40·3	0906·3	80·4	6.389 819	16
10	5991·9	120·4	5981·6	40·1	0986·7	80·3	803	16
20	6112·3	120·3	6021·7	40·1	1067·0	80·2	787	16
30	6232·6	120·0	6061·8	40·0	1147·2	80·0	771	16
40	6352·6	119·7	6101·8	39·9	1227·2	79·8	755	16
50	6472·3	119·6	6141·7	39·9	1307·0	79·7	739	16
55° 0′	6591·8	119·3	6181·6	39·7	1386·7	79·5	6.389 723	15
10	6711·1	119·0	6221·3	39·7	1466·2	79·4	707	16
20	6830·1	118·8	6261·0	39·6	1545·6	79·1	691	16
30	6948·9	118·4	6300·6	39·5	1624·7	79·0	675	16
40	7067·3	118·3	6340·1	39·4	1703·7	78·8	659	16
50	7185·6	117·9	6379·5	39·3	1782·5	78·6	643	15
56° 0′	7303·5		6418·8		1861·1		6.389 628	

vgl. § 39. S. 230.

φ	log W	Δ	log [1]	Δ	log [2]	Δ	log V²	Δ
	9.999 —10	—	8.510 —10	—	8.508 —10	—	0.001	—
48° 0′	1981·1	42·0	2843·7	126·2	9797·8	42·0	3045·9	84·2
10	1939·1	42·1	2717·5	126·2	9755·8	42·1	2961·7	84·1
20	1897·0	42·0	2591·3	126·0	9713·7	42·0	2877·6	84·0
30	1855·0	42·0	2465·3	126·0	9671·7	42·0	2793·6	84·0
40	1813·0	41·9	2339·3	125·9	9629·7	42·0	2709·6	83·9
50	1771·1	42·0	2213·4	125·7	9587·7	41·9	2625·7	83·8
49° 0′	1729·1	41·9	2087·7	125·7	9545·8	41·9	2541·9	83·8
10	1687·2	41·8	1962·0	125·6	9503·9	41·8	2458·1	83·7
20	1645·4	41·8	1836·4	125·4	9462·1	41·8	2374·4	83·7
30	1603·6	41·8	1711·0	125·4	9420·3	41·8	2290·7	83·5
40	1561·8	41·8	1585·6	125·2	9378·5	41·8	2207·2	83·5
50	1520·0	41·7	1460·4	125·1	9336·7	41·7	2123·7	83·4
50° 0′	1478·3	41·6	1335·3	125·0	9295·0	41·6	2040·3	83·4
10	1436·7	41·6	1210·3	124·8	9253·4	41·6	1956·9	83·2
20	1395·1	41·6	1085·5	124·8	9211·8	41·6	1873·7	83·1
30	1353·5	41·5	0960·7	124·5	9170·2	41·5	1790·6	83·1
40	1312·0	41·5	0836·2	124·5	9128·7	41·5	1707·5	82·9
50	1270·5	41·5	0711·7	124·3	9087·2	41·5	1624·6	82·9
51° 0′	1229·0	41·3	0587·4	124·1	9045·7	41·3	1541·7	82·8
10	1187·7	41·4	0463·3	124·0	9004·4	41·4	1458·9	82·6
20	1146·3	41·2	0339·3	123·8	8963·0	41·2	1376·3	82·6
30	1105·1	41·3	0215·5	123·7	8921·8	41·3	1293·7	82·4
40	1063·8	41·1	0091·8	123·5	8880·5	41·1	1211·3	82·3
50	1022·7	41·1	*9968·3	123·3	8839·4	41·1	1129·0	82·2
52° 0′	0981·6	41·1	9845·0	123·1	8798·3	41·1	1046·8	82·1
10	0940·5	41·0	9721·9	123·0	8757·2	41·0	0964·7	82·0
20	0899·5	40·9	9598·9	122·8	8716·2	40·9	0882·7	81·9
30	0858·6	40·8	9476·1	122·5	8675·3	40·8	0800·8	81·7
40	0817·8	40·8	9353·6	122·4	8634·5	40·8	0719·1	81·6
50	0777·0	40·8	9231·2	122·2	8593·7	40·8	0637·5	81·5
53° 0′	0736·2	40·6	9109·0	122·0	8552·9	40·6	0556·0	81·3
10	0695·6	40·6	8987·0	121·8	8512·3	40·6	0474·7	81·2
20	0655·0	40·6	8865·2	121·6	8471·7	40·6	0393·5	81·0
30	0614·4	40·4	8743·6	121·4	8431·3	40·4	0312·5	80·9
40	0574·0	40·4	8622·2	121·1	8390·7	40·4	0231·6	80·8
50	0533·6	40·3	8501·1	120·9	8350·3	40·3	0150·8	80·6
54° 0′	0493·3	40·2	8380·2	120·7	8310·0	40·3	0070·2	80·5
10	0453·1	40·2	8259·5	120·5	8269·7	40·1	*9989·7	80·3
20	0412·9	40·1	8139·0	120·3	8229·6	40·1	9909·4	80·2
30	0372·8	40·0	8018·7	120·0	8189·5	40·0	9829·2	80·0
40	0332·8	39·9	7898·7	119·7	8149·5	39·9	9749·2	79·8
50	0292·9	39·8	7779·0	119·5	8109·6	39·8	9669·4	79·7
55° 0′	0253·1	39·8	7659·5	119·3	8069·8	39·8	9589·7	79·5
10	0213·3	39·7	7540·2	119·0	8030·0	39·7	9510·2	79·3
20	0173·6	39·5	7421·2	118·7	7990·3	39·5	9430·9	79·2
30	0134·1	39·5	7302·5	118·5	7950·8	39·5	9351·7	79·0
40	0094·6	39·4	7184·0	118·2	7911·3	39·4	9272·7	78·8
50	0055·2	39·4	7065·8	118·0	7871·9	39·4	9193·9	78·6
56° 0′	0015·8		6947·8		7832·5		9115·3	

vgl. § 39. S. 230.

φ	$\log M$	Δ	$\log N$	Δ	$\log r$	Δ	$\log \frac{1}{r^2}$	Δ
	6.804	+	6.805	+	6.805	+	— 20	—
56° 0′	7303·5		6418·8		1861·1		6.389 628	
		117·7		39·2		78·5		16
10	7421·2		6458·0		1939·6		612	
		117·4		39·1		78·3		15
20	7538·6		6497·1		2017·9		597	
		117·1		39·1		78·0		16
30	7655·7		6536·2		2095·9		581	
		116·8		38·9		77·9		16
40	7772·5		6575·1		2173·8		565	
		116·5		38·9		77·7		15
50	7889·0		6614·0		2251·5		550	
		116·3		38·7		77·5		16
57° 0′	8005·3		6652·7		2329·0		6.389 534	
		115·9		38·7		77·3		15
10	8121·2		6691·4		2406·3		519	
		115·6		38·5		77·1		16
20	8236·8		6729·9		2483·4		503	
		115·4		38·4		76·8		15
30	8352·2		6768·3		2560·2		488	
		115·0		38·4		76·7		15
40	8467·2		6806·7		2636·9		473	
		114·7		38·2		76·5		16
50	8581·9		6844·9		2713·4		457	
		114·4		38·1		76·3		15
58° 0′	8696·3		6883·0		2789·7		6.389 442	
		114·0		38·1		76·0		15
10	8810·3		6921·1		2865·7		427	
		113·8		37·9		75·8		15
20	8924·1		6859·0		2941·5		412	
		113·4		37·8		75·6		15
30	9037·5		6996·8		3017·1		397	
		113·0		37·7		75·4		16
40	9150·5		7034·5		3092·5		381	
		112·8		37·6		75·2		15
50	9263·3		7072·1		3167·7		366	
		112·4		37·4		74·9		15
59° 0′	9375·7		7109·5		3242·6		6.389 351	
		112·0		37·4		74·7		14
10	9487·7		7146·9		3317·3		337	
		111·7		37·2		74·5		15
20	9599·4		7184·1		3391·8		322	
		111·4		37·1		74·2		15
30	9710·8		7221·2		3466·0		307	
		111·0		37·0		74·0		15
40	9821·8		7258·2		3540·0		292	
		110·6		36·9		73·7		15
50	9932·4		7295·1		3613·7		277	
		110·3		36·7		73·6		14
60° 0′	*0042·7		7331·8		3687·3		6.389 263	
		109·9		36·7		73·2		15
10	0152·6		7368·5		3760·5		248	
		109·5		36·5		73·0		15
20	0262·1		7405·0		3833·5		233	
		109·1		36·4		72·8		14
30	0371·2		7441·4		3906·3		219	
		108·8		36·2		72·5		15
40	0480·0		7447·6		3978·8		204	
		108·4		36·2		72·3		14
50	0588·4		7513·8		4051·1		190	
		108·0		36·0		72·0		15
61° 0′	0696·4		7549·8		4123·1		6.389 175	
		107·6		35·8		71·7		14
10	0804·0		7585·6		4194·8		161	
		107·2		35·8		71·5		14
20	0911·2		7621·4		4266·3		147	
		106·9		35·6		71·2		15
30	1018·1		7657·0		4337·5		132	
		106·4		35·5		71·0		14
40	1124·5		7692·5		4408·5		118	
		106·0		35·3		70·6		14
50	1230·5		7727·8		4479·1		104	
		105·6		35·2		70·5		14
62° 0′	1336·1		7763·0		4549·6		6.389 090	
		105·2		35·1		70·1		14
10	1441·3		7798·1		4619·7		076	
		104·8		34·9		69·8		14
20	1546·1		7833·0		4689·5		062	
		104·3		34·8		69·6		14
30	1650·4		7867·8		4759·1		048	
		104·0		34·6		69·3		14
40	1754·4		7902·4		4828·4		034	
		103·5		34·5		69·0		13
50	1857·9		7936·9		4897·4		021	
		103·1		34·4		68·7		14
63° 0′	1961·0		7971·3		4966·1		6.389 007	
		102·6		34·2		68·5		14
10	2063·6		8005·5		5034·6		388 993	
		102·3		34·2		68·1		14
20	2165·9		8039·6		5102·7		979	
		101·7		33·9		67·9		13
30	2267·6		8073·5		5170·6		966	
		101·4		33·8		67·5		14
40	2369·0		8107·3		5238·1		952	
		100·8		33·6		67·3		13
50	2469·8		8140·9		5305·4		939	
		100·5		33·5		66·9		13
64° 0′	2570·3		8174·4		5372·3		6.388 926	

vgl. § 39. S. 230.

φ	log W	Δ	log [1]	Δ	log [2]	Δ	log V²	Δ
	9.999 —10	—	8.509 —10	—	8.508 —10	—	0.000	—
56° 0′	0015·8	39·2	6947·8	117·6	7832·5	39·2	9115·3	78·5
10	*9976·6	39·1	6830·2	117·4	7793·3	39·1	9036·8	78·2
20	9937·5	39·0	6712·8	117·1	7754·2	39·0	8958·6	78·1
30	9898·5	39·0	6595·7	116·9	7715·2	39·0	8880·5	77·9
40	9859·5	38·8	6478·8	116·5	7676·2	38·8	8802·6	77·7
50	9820·7	38·8	6362·3	116·2	7637·4	38·8	8724·9	77·4
57° 0′	9781·9	38·6	6246·1	116·0	7598·6	38·6	8647·5	77·3
10	9743·3	38·6	6130·1	115·6	7560·0	38·6	8570·2	77·1
20	9704·7	38·4	6014·5	115·3	7521·4	38·4	8493·1	76·9
30	9666·3	38·3	5899·2	115·0	7483·0	38·3	8416·2	76·7
40	9628·0	38·3	5784·2	114·7	7444·7	38·3	8339·5	76·5
50	9589·7	38·1	5669·5	114·4	7406·4	38·1	8263·0	76·2
58° 0′	9551·6	38·0	5555·1	114·1	7368·3	38·0	8186·8	76·1
10	9513·6	37·9	5441·0	113·7	7330·3	37·9	8110·7	75·8
20	9475·7	37·8	5327·3	113·4	7292·4	37·8	8034·9	75·6
30	9437·9	37·7	5213·9	113·1	7254·6	37·7	7959·3	75·4
40	9400·2	37·6	5100·8	112·8	7216·9	37·6	7883·9	75·1
50	9362·6	37·5	4988·0	112·3	7179·3	37·5	7808·8	75·0
59° 0′	9325·1	37·3	4875·7	112·1	7141·8	37·3	7733·8	74·7
10	9287·8	37·3	4763·6	111·7	7104·5	37·3	7659·1	74·4
20	9250·5	37·1	4651·9	111·4	7067·2	37·1	7584·7	74·3
30	9213·4	37·0	4540·5	110·9	7030·1	37·0	7510·4	74·0
40	9176·4	36·9	4429·6	110·7	6993·1	36·9	7436·4	73·7
50	9139·5	36·7	4318·9	110·1	6956·2	36·7	7362·7	73·5
60° 0′	9102·8	36·6	4208·7	109·9	6919·5	36·6	7289·2	73·3
10	9066·2	36·6	4098·8	109·6	6882·9	36·6	7215·9	73·0
20	9029·6	36·3	3989·2	109·1	6846·3	36·3	7142·9	72·8
30	8993·3	36·3	3880·1	108·8	6810·0	36·3	7070·1	72·5
40	8957·0	36·1	3771·3	108·4	6773·7	36·1	6997·6	72·3
50	8920·9	36·0	3662·9	108·0	6737·6	36·0	6925·3	72·0
61° 0′	8884·9	35·9	3554·9	107·6	6701·6	35·9	6853·3	71·7
10	8849·0	35·7	3447·3	107·2	6665·7	35·7	6781·6	71·5
20	8813·3	35·6	3440·1	106·8	6630·0	35·6	6710·1	71·2
30	8777·7	35·5	3233·3	106·5	6594·4	35·5	6638·9	70·9
40	8742·2	35·4	3126·8	106·0	6558·9	35·4	6568·0	70·7
50	8706·8	35·2	3020·8	105·6	6523·5	35·2	6497·3	70·4
62° 0′	8671·6	35·0	2915·2	105·2	6488·3	35·0	6426·9	70·2
10	8636·6	34·9	2810·0	104·8	6453·3	35·0	6356·7	69·8
20	8601·7	34·8	2705·2	104·3	6418·3	34·7	6286·9	69·6
30	8566·9	34·7	2600·9	104·0	6383·6	34·7	6217·3	69·3
40	8532·2	34·5	2496·9	103·5	6348·9	34·5	6148·0	69·0
50	8497·7	34·3	2393·4	103·1	6314·4	34·4	6079·0	68·7
63° 0′	8463·4	34·3	2290·3	102·6	6280·0	34·2	6010·3	68·4
10	8429·1	34·0	2187·7	102·2	6245·8	34·0	5941·9	68·2
20	8395·1	34·0	2085·5	101·8	6211·8	34·0	5873·7	67·8
30	8361·1	33·7	1983·7	101·3	6177·8	33·7	5805·9	67·6
40	8327·4	33·7	1882·4	100·9	6144·1	33·7	5738·3	67·2
50	8293·7	33·4	1781·5	100·4	6110·4	33·4	5671·1	67·0
64° 0′	8260·3		1681.1		6077·0		5604·1	

vgl. § 39. S. 230.

φ	log *M*	Δ	log *N*	Δ	log *r*	Δ	$\log \frac{1}{r^2}$	Δ
	6.805	+	6.805	+	6.805	+	— 20	—
64° 0′	2570·3	99·9	8174·4	33·3	5372·3	68·7	6.388 926	14
10	2670·2	99·6	8207·7	33·2	5439·0	66·3	912	13
20	2769·8	99·0	8240·9	33·0	5505·3	66·1	899	13
30	2868·8	98·6	8273·9	32·9	5571·4	65·7	886	13
40	2967·4	98·1	8306·8	32·7	5637·1	65·4	873	14
50	3065·5	97·7	8339·5	32·5	5702·5	65·1	859	13
65° 0′	3163·2	97·2	8372·0	32·4	5767·6	64·8	6.388 846	12
10	3260·4	96·7	8404·4	32·3	5832·4	64·5	834	13
20	3357·1	96·2	8436·7	32·0	5896·9	64·1	821	13
30	3453·3	95·8	8468·7	31·9	5961·0	63·9	808	13
40	3549·1	95·2	8500·6	31·8	6024·9	63·5	795	13
50	3644·3	94·8	8532·4	31·6	6088·4	63·1	782	12
66° 0′	3739·1	94·3	8564·0	31·4	6151·5	62·9	6.388 770	13
10	3833·4	93·7	8595·4	31·3	6214·4	62·5	757	12
20	3927·1	93·3	8626·7	31·1	6276·1	62·2	745	13
30	4020·4	92·8	8657·8	30·9	6339·1	61·8	732	12
40	4113·2	92·2	8688·7	30·7	6400·9	61·5	720	12
50	4005·4	91·8	8719·4	30·6	6462·4	61·2	708	13
67° 0′	4297·2	91·2	8750·0	30·4	6523·6	60·8	6.388 695	12
10	4388·4	90·8	8780·4	30·3	6584·4	60·5	683	12
20	4479·2	90·2	8810·7	30·0	6644·9	60·2	671	12
30	4569·4	89·6	8840·7	29·9	6705·1	59·7	659	12
40	4659·0	89·2	8870·6	29·8	6764·8	59·5	647	12
50	4748·2	88·6	8900·4	29·4	6824·3	59·1	635	12
68° 0′	4836·8	88·1	8929·9	29·4	6883·4	58·7	6.388 623	11
10	4924·9	87·6	8959·3	29·2	6942·1	58·4	612	12
20	5012·5	87·0	8988·5	29·0	7000·5	58·0	600	12
30	5099·5	86·5	9017·5	28·8	7058·5	57·7	588	11
40	5186·0	86·0	9046·3	28·6	7116·2	57·2	577	12
50	5272·0	85·4	9074·9	28·5	7173·4	57·0	565	11
69° 0′	5357·4	84·8	9103·4	28·3	7230·4	56·5	6.388 554	11
10	5442·2	84·3	9131·7	28·1	7286·9	56·2	543	12
20	5526·5	83·7	9159·8	27·9	7343·1	55·9	531	11
30	5610·2	83·2	9187·7	27·7	7399·0	55·4	520	11
40	5693·4	82·7	9215·4	27·6	7454·4	55·1	509	11
50	5776·1	82·0	9243·0	27·3	7509·5	54·7	498	11
70° 0′	5858·1	81·5	9270·3	27·2	7564·2	54·4	6.388 487	11
10	5939·6	80·9	9297·5	27·0	7618·6	53·9	476	11
20	6020·5	80·4	9324·5	26·7	7672·5	53·6	465	10
30	6100·9	79·8	9351·2	26·6	7726·1	53·2	455	11
40	6180·7	79·2	9377·8	26·5	7779·3	52·8	444	10
50	6259·9	78·6	9404·3	26·2	7832·1	52·4	434	
71° 0′	6338·5	78·1	9430·5	26·0	7884·5	52·0	6.388 423	
10	6416·6	77·4	9456·5	25·8	7936·5	51·7	413	
20	6494·0	76·5	9482·3	25·6	7988·2	51·2	402	
30	6570·9	76·3	9507·9	25·4	8039·4	50·9	392	
40	6647·2	75·6	9533·3	25·3	8090·3	50·4	382	
50	6722·8	75·1	9558·6	25·0	8140·7	50·1	372	
72° 0′	6797·9		9583·6		8190·8		6.388 362	

vgl. § 39. S. 230.

φ	log W	Δ	log [1]	Δ	log [2]	Δ	log V²	Δ
-	9.998 —10	—	8.509 —10	—	8.508 —10	—	0.000	—
64° 0′	8260·3	33·4	1681·1	100·0	6077·0	33·4	5604·1	66·6
10	8226·9	33·1	1581·1	99·5	6043·6	33·1	5537·5	66·4
20	8193·8	33·1	1481·6	99·1	6010·5	33·1	5471·1	66·0
30	8160·7	32·8	1382·5	98·6	5977·4	32·8	5405·1	65·8
40	8127·9	32·7	1283·9	98·1	5944·6	32·7	5339·3	65·4
50	8095·2	32·6	1185·8	97·7	5911·9	32·6	5273·9	65·1
65° 0′	8062·6	32·4	1088·1	97·2	5879·3	32·4	5208·8	64·8
10	8030·2	32·2	0990·9	96·7	5846·9	32·2	5144·0	64·4
20	7998·0	32·1	0894·2	96·2	5814·7	32·1	5079·6	64·2
30	7965·9	31·9	0798·0	95·7	5782·6	31·9	5015·4	64·0
40	7934·0	31·8	0702·3	95·3	5750·7	31·8	4951·4	64·3
50	7902·2	31·5	0607·0	94·8	5718·9	31·6	4888·1	63·2
66° 0′	7870·7	31·5	0512·2	94·2	5687·3	31·4	4824·9	62·8
10	7839·2	31·2	0418·0	93·8	5655·9	31·2	4762·1	62·6
20	7808·0	31·1	0324·2	93·3	5624·7	31·1	4699·5	62·1
30	7776·9	30·9	0230·9	92·7	5593·6	30·9	4637·4	61·9
40	7746·0	30·8	0138·2	92·3	5562·7	30·8	4575·5	61·5
50	7715·2	30·6	0045·9	91·8	5531·9	30·6	4514·0	61·2
67° 0′	7684·6	30·4	*9954·1	91·2	5501·3	30·4	4452·8	60·8
10	7654·2	30·2	9862·9	90·7	5470·9	30·2	4392·0	60·5
20	7624·0	30·1	9772·2	90·2	5440·7	30·1	4331·5	60·1
30	7593·9	29·9	9682·0	89·7	5410·6	29·9	4271·4	59·8
40	7564·0	29·7	9592·3	89·2	5380·7	29·7	4211·6	59·6
50	7534·3	29·6	9503·1	88·6	5351·0	29·6	4152·2	58·9
68° 0′	7504·7	29·3	9414·5	88·1	5321·4	29·3	4093·1	58·8
10	7475·4	29·2	9326·4	87·6	5292·1	29·2	4034·3	58·3
20	7446·2	29·0	9238·8	87·0	5262·9	29·0	3976·0	58·0
30	7417·2	28·9	9151·8	86·5	5233·9	28·9	3918·0	57·7
40	7388·3	28·6	9065·3	85·9	5205·0	28·6	3860·3	57·3
50	7359·7	28·5	8979·4	85·4	5176·4	28·5	3803·0	56·9
69° 0′	7331·2	28·3	8894·0	84·9	5147·9	28·3	3746·1	56·6
10	7302·9	28·1	8809·1	84·3	5119·6	28·1	3689·5	56·2
20	7274·8	27·9	8724·8	83·7	5091·5	27·9	3633·3	55·8
30	7246·9	27·7	8641·1	83·2	5063·6	27·7	3577·5	55·5
40	7219·2	27·5	8557·9	82·6	5035·9	27·5	3522·0	55·1
50	7191·7	27·4	8475·3	82·1	5008·4	27·4	3466·9	54·7
70° 0′	7164·3	27·2	8393·2	81·5	4981·0	27·2	3412·2	54·3
10	7137·1	26·9	8311·7	80·9	4953·8	26·9	3357·9	54·0
20	7110·2	26·8	8230·8	80·4	4926·9	26·8	3303·9	53·5
30	7083·4	26·6	8150·4	79·7	4900·1	26·6	3250·4	53·2
40	7056·8	26·4	8070·7	79·3	4873·5	26·4	3197·2	52·8
50	7030·4	26·2	7991·4	78·6	4847·1	26·2	3144·4	52·5
71° 0′	7004·2	26·0	7912·8	78·0	4820·9	26·0	3091·9	52·0
10	6978·2	25·9	7834·8	77·5	4794·9	25·9	3039·9	51·6
20	6952·3	25·6	7757·3	76·8	4769·0	25·6	2988·3	51·3
30	6926·7	25·4	7680·5	76·3	4743·4	25·4	2937·0	50·8
40	6901·3	25·2	7604·2	75·7	4718·0	25·2	2886·2	50·5
50	6876·1	25·1	7528·5	75·1	4692·8	25·1	2835·7	50·0
72° 0′	6851·0		7453·4		4667·7		2785·7	

vgl. § 39. S. 280

φ	log M	Δ	log N	Δ	log r	Δ	log $\frac{1}{r^2}$	Δ
	6.805	+	6.805	+	6.805	+	— 20	—
72° 0′	6798	74	9584	24	8191	49	6.388 362	10
10	6872	74	9608	25	8240	50	352	10
20	6946	74	9633	25	8290	49	342	10
30	7020	72	9658	24	8339	48	332	9
40	7092	72	9682	24	8387	48	323	10
50	7164	72	9706	24	8435	48	313	10
73° 0′	7236	71	9730	23	8483	47	6.388 303	9
10	7307	70	9753	24	8530	47	294	9
20	7377	70	9777	23	8577	46	285	10
30	7447	69	9800	23	8623	46	275	9
40	7516	68	9823	23	8669	46	266	9
50	7584	68	9846	22	8715	45	257	9
74° 0′	7652	67	9868	23	8760	45	6.388 248	9
10	7719	66	9891	22	8805	44	239	9
20	7785	66	9913	22	8849	44	230	9
30	7851	65	9935	21	8893	43	221	8
40	7916	65	9956	22	8936	43	213	9
50	7981	64	9978	21	8979	43	204	8
75° 0′	8045	63	9999	21	9022	42	6.388 196	9
10	8108	63	*0020	21	9064	42	187	8
20	8171	62	0041	21	9106	41	179	8
30	8233	61	0062	20	9147	41	171	9
40	8294	61	0082	21	9188	41	162	8
50	8355	60	0103	20	9229	40	154	8
76° 0′	8415	59	0123	19	9269	39	6.388 146	8
10	8474	59	0142	20	9308	40	138	8
20	8533	58	0162	19	9348	38	130	7
30	8591	58	0181	20	9386	39	123	8
40	8649	57	0201	19	9425	38	115	8
50	8706	56	0220	18	9463	37	107	7
77° 0′	8762	55	0238	19	9500	37	6.388 100	7
10	8817	55	0257	18	9537	37	093	8
20	8872	54	0275	18	9574	36	085	7
30	8926	54	0293	18	9610	35	078	7
40	8980	52	0311	17	9645	35	071	7
50	9032	53	0328	18	9680	35	064	7
78° 0′	9085	51	0346	17	9715	34	6.388 057	7
10	9136	51	0363	17	9749	35	050	7
20	9187	50	0380	17	9783	34	043	6
30	9237	49	0397	16	9817	33	037	7
40	9286	49	0413	16	9850	32	030	6
50	9335	48	0429	16	9882	32	024	7
79° 0′	9383	47	0445	16	9914	32	6.388 017	6
10	9430	47	0461	16	9946	31	388 011	6
20	9477	46	0477	15	9977	30	388 005	6
30	9523	45	0492	15	*0007	31	387 999	7
40	9568	45	0507	15	0038	29	992	5
50	9613	44	0522	15	0067	30	987	6
80° 0′	9657		0537		0097		6.387 981	

vgl. § 39. S. 230.

φ	log W	Δ	log [1]	Δ	log [2]	Δ	log V²	Δ
	9.998 —10	—	8.508 —10	—	8.508 —10	—	0.000	—
72° 0′	6851	25	7453	74	4668	25	2786	50
10	6826	24	7379	74	4643	25	2736	49
20	6802	25	7305	73	4618	24	2687	49
30	6777	24	7232	73	4594	24	2638	49
40	6753	24	7159	72	4570	25	2589	48
50	6729	24	7087	72	4545	23	2541	47
73° 0′	6705	24	7015	71	4522	24	2494	48
10	6681	23	6944	70	4498	23	2446	46
20	6658	23	6874	69	4475	24	2400	47
30	6635	23	6805	69	4451	23	2353	46
40	6612	23	6736	69	4428	22	2307	45
50	6589	23	6667	67	4406	23	2262	45
74° 0′	6566	22	6600	67	4383	22	2217	45
10	6544	22	6533	67	4361	22	2172	45
20	6522	22	6466	66	4339	22	2127	43
30	6500	22	6400	65	4317	22	2084	44
40	6478	21	6335	65	4295	22	2040	43
50	6457	22	6270	64	4273	21	1997	43
75° 0′	6435	21	6206	63	4252	21	1954	42
10	6414	21	6143	63	4231	21	1912	42
20	6393	20	6080	62	4210	21	1870	41
30	6373	21	6018	61	4189	20	1829	41
40	6352	20	5957	61	4169	20	1788	40
50	6332	20	5896	60	4149	20	1748	40
76° 0′	6312	20	5836	59	4129	20	1708	40
10	6292	19	5777	59	4109	20	1668	39
20	6273	20	5718	58	4089	19	1629	39
30	6253	19	5660	58	4070	19	1590	38
40	6234	19	5602	56	4051	19	1552	38
50	6215	19	5546	57	4032	19	1514	38
77° 0′	6196	18	5489	55	4013	18	1476	37
10	6178	18	5434	55	3995	19	1439	36
20	6160	18	5379	54	3976	18	1403	36
30	6142	18	5325	53	3958	18	1367	36
40	6124	18	5272	53	3940	17	1331	35
50	6106	17	5219	52	3923	17	1296	35
78° 0′	6089	17	5167	52	3906	18	1261	34
10	6072	17	5115	50	3888	17	1227	34
20	6055	17	5065	50	3871	16	1193	33
30	6038	16	5015	50	3855	17	1160	33
40	6022	17	4965	49	3838	16	1127	33
50	6005	16	4916	48	3822	16	1094	32
79° 0′	5989	15	4868	47	3806	16	1062	31
10	5974	16	4821	47	3790	15	1031	31
20	5958	15	4774	46	3775	16	1000	31
30	5943	15	4728	45	3759	16	0969	30
40	5928	15	4683	45	3744	15	0939	30
50	5913	15	4638	43	3729	14	0909	29
80° 0′	5898		4595		3715		0880	

vgl. § 39. S. 230.

φ	log *M*	Δ	log *N*	Δ	log *r*	Δ	log $\frac{1}{r^2}$	Δ
	6.805	+	6.806	+	6.806	+	— 20	—
80° 0′	9657	43	0537	14	0097	28	6.387 981	6
10	9700	42	0551	14	0125	29	975	6
20	9742	42	0565	14	0154	27	969	5
30	9784	41	0579	14	0181	28	964	6
40	9825	41	0593	13	0209	27	958	5
50	9866	39	0606	13	0236	26	953	5
81° 0′	9905	39	0619	13	0262	26	6.387 948	6
10	9944	39	0632	13	0288	26	942	5
20	9983	37	0645	13	0314	25	937	5
30	*0020	37	0658	12	0339	24	932	5
40	0057	36	0670	12	0363	25	927	5
50	0093	36	0682	12	0388	23	922	4
82° 0′	0129	34	0694	11	0411	23	6.387 918	5
10	0163	34	0705	12	0434	23	913	4
20	0197	34	0717	11	0457	22	909	5
30	0231	32	0728	11	0479	22	904	3
40	0263	32	0739	10	0501	21	901	5
50	0295	31	0749	11	0522	21	896	5
83° 0′	0326	31	0760	10	0543	20	6.387 891	4
10	0357	30	0770	10	0563	20	887	4
20	0387	28	0780	9	0583	19	883	3
30	0415	29	0789	10	0602	19	880	4
40	0444	27	0799	9	0621	19	876	4
50	0471	27	0808	9	0640	18	872	4
84° 0′	0498	26	0817	9	0658	17	6.387 868	3
10	0524	26	0826	8	0675	17	865	3
20	0550	24	0834	8	0692	16	862	4
30	0574	24	0842	8	0708	16	858	3
40	0598	24	0850	8	0724	16	855	3
50	0622	22	0858	8	0740	15	852	3
85° 0′	0644	22	0866	7	0755	14	6.387 849	3
10	0666	21	0873	7	0769	14	846	3
20	0687	20	0880	7	0783	14	843	2
30	0707	20	0887	6	0797	13	841	3
40	0727	18	0893	6	0810	12	838	2
50	0745	18	0899	6	0822	12	836	3
86° 0′	0763	18	0905	6	0834	12	6.387 833	2
10	0781	16	0911	6	0846	11	831	2
20	0797	16	0917	5	0857	11	829	3
30	0813	16	0922	5	0868	10	826	2
40	0829	14	0927	5	0878	9	824	1
50	0843	13	0932	4	0887	10	823	2
87° 0′	0856	37	0936	13	0897	24	6.387 821	5
30	0893	30	0949	10	0921	20	816	4
88 0	0923	23	0959	7	0941	15	6.387 812	3
30	0946	17	0966	6	0956	12	809	3
89 0	0963	10	0972	3	0968	6	6.387 806	1
30	0973	3	0975	1	0974	2	805	0
90° 0′	0976		0976		0976		6.387 805	

vgl. § 39. S. 230.

φ	*log W*	Δ	*log* [1]	Δ	*log* [2]	Δ	*log* V^2	Δ
	9.998 —10	—	8.508 —10	—	8.508 —10	—	0.000 —10	—
80° 0′	5898	14	4595	44	3715	15	0880	29
10	5884	14	4551	42	3700	14	0851	28
20	5870	14	4509	42	3686	14	0823	28
30	5856	14	4467	41	3672	13	0795	28
40	5842	14	4426	40	3659	14	0767	26
50	5828	13	4386	40	3645	14	0741	27
81° 0′	5815	13	4346	39	3631	12	0714	26
10	5802	12	4307	38	3619	13	0688	25
20	5790	13	4269	38	3606	12	0663	26
30	5777	12	4231	37	3594	13	0637	24
40	5765	12	4194	36	3581	12	0613	24
50	5753	12	4158	35	3569	12	0589	24
82° 0′	5741	12	4123	35	3557	11	0565	23
10	5729	11	4088	34	3546	11	0542	23
20	5718	11	4054	33	3535	12	0519	22
30	5707	11	4021	33	3523	10	0497	22
40	5696	11	3988	32	3513	11	0475	21
50	5685	10	3956	31	3502	10	0454	21
83° 0′	5675	10	3925	31	3492	11	0433	20
10	5665	10	3894	29	3481	10	0413	20
20	5655	10	3865	29	3471	9	0393	19
30	5645	9	3836	29	3462	10	0374	19
40	5636	9	3807	27	3452	9	0355	18
50	5627	9	3780	27	3443	9	0337	18
84° 0′	5618	9	3753	26	3434	8	0319	18
10	5609	9	3727	25	3426	9	0301	16
20	5600	8	3702	25	3417	8	0285	17
30	5592	8	3677	24	3409	8	0268	16
40	5584	8	3653	23	3401	8	0252	15
50	5576	7	3630	23	3393	7	0237	15
85° 0′	5569	7	3607	21	3386	8	0222	15
10	5562	7	3586	21	3378	7	0207	14
20	5555	7	3565	21	3371	6	0193	13
30	5548	6	3544	19	3365	7	0180	13
40	5542	7	3525	19	3358	6	0167	13
50	5535	6	3506	18	3352	6	0154	12
86° 0′	5529	6	3488	18	3346	6	0142	12
10	5523	5	3470	16	3340	5	0130	11
20	5518	5	3454	16	3335	6	0119	10
30	5513	5	3438	15	3329	5	0109	10
40	5508	5	3423	14	3324	5	0099	10
50	5503	5	3319	14	3319	4	0089	9
87° 0′	5498	12	3395	37	3315	12	0080	24
30	5486	10	3358	30	3303	10	0056	20
88° 0′	5476	8	3328	23	3293	8	0036	16
30	5468	5	3305	17	3285	6	0020	11
89° 0′	5463	4	3288	10	3279	3	0009	7
30	5459	1	3278	3	3276	1	0002	2
90° 0′	5458		3275		3275		0000	

vgl. § 39. S. 230.

′	$\varphi = 45°$ $\log\frac{\varrho}{M} = \log[1]$		$\varphi = 45°$ $\log\frac{\varrho}{N} = \log[2]$		′	$\varphi = 46°$ $\log\frac{\varrho}{M} = \log[1]$		$\varphi = 46°$ $\log\frac{\varrho}{N} = \log[2]$	
		—		—			—		—
0	8.510 5124·1	12·7	8.509 0558·0	4·3	0	8.510 4362·8	12·7	8.509 0304·2	4·2
1	510 5111·4	12·7	509 0553·7	4·2	1	510 4350·1	12·6	509 0300·0	4·3
2	510 5098·7	12·7	509 0549·5	4·2	2	510 4337·5	12·7	509 0295·7	4·2
3	510 5086·0	12·6	509 0545·3	4·3	3	510 4324·8	12·7	509 0291·5	4·2
4	510 5073·4	12·7	509 0541·0	4·2	4	510 4312·1	12·7	509 0287·3	4·2
5	8.510 5060·7	12·7	8.509 0536·8	4·2	5	8.510 4299·4	12·7	8.509 0283·1	4·3
6	510 5048·0	12·7	509 0532·6	4·2	6	510 4286·7	12·7	509 0278·8	4·2
7	510 5035·3	12·7	509 0528·4	4·3	7	510 4274·0	12·6	509 0274·6	4·2
8	510 5022·6	12·7	509 0524·1	4·2	8	510 4261·4	12·7	509 0270·4	4·2
9	510 5009·9	12·7	509 0519·9	4·2	9	510 4248·7	12·7	509 0266·2	4·3
10	8.510 4997·2	12·7	8.509 0515·7	4·3	10	8.510 4236·0	12·7	8.509 0261·9	4·2
11	510 4984·5	12·7	509 0511·4	4·2	11	510 4223·3	12·7	509 0257·7	4·2
12	510 4971·8	12·7	509 0507·2	4·2	12	510 4210·6	12·6	509 0253·5	4·3
13	510 4959·1	12·6	509 0503·0	4·3	13	510 4198·0	12·7	509 0249·2	4·2
14	510 4946·5	12·7	509 0498·7	4·2	14	510 4185·3	12·7	509 0245·0	4·2
15	8.510 4933·8	12·7	8.509 0494·5	4·2	15	8.510 4172·6	12·7	8.509 0240·8	4·2
16	510 4921·1	12·7	509 0490·3	4·2	16	510 4159·9	12·7	509 0236·6	4·3
17	510 4908·4	12·7	509 0486·1	4·3	17	510 4147·2	12·6	509 0232·3	4·2
18	510 4895·7	12·7	509 0481·8	4·2	18	510 4134·6	12·7	509 0228·1	4·2
19	510 4883·0	12·7	509 0477·6	4·2	19	510 4121·9	12·7	509 0223·9	4·2
20	8.510 4870·3	12·7	8.509 0473·4	4·3	20	8.510 4109·2	12·7	8.509 0219·7	4·3
21	510 4857·6	12·7	509 0469·1	4·2	21	510 4096·5	12·7	509 0215·4	4·2
22	510 4844·9	12·7	509 0464·9	4·2	22	510 4083·8	12·6	509 0211·2	4·2
23	510 4832·2	12·6	509 0464·7	4·3	23	510 4071·2	12·7	509 0207·0	4·2
24	510 4819·6	12·7	509 0456·4	4·2	24	510 4058·5	12·7	509 0202·8	4·3
25	8.510 4806·9	12·7	8.509 0452·2	4·2	25	8.510 4045·8	12·7	8.509 0198·5	4·2
26	510 4794·2	12·7	509 0448·0	4·2	26	510 4033·1	12·6	509 0194·3	4·2
27	510 4781·5	12·7	509 0443·8	4·3	27	510 4020·5	12·7	509 0190·1	4·2
28	510 4768·8	12·7	509 0439·5	4·2	28	510 4007·8	12·7	509 0185·9	4·3
29	510 4756·1	12·7	509 0435·3	4·2	29	510 3995·1	12·7	509 0181·6	4·2
30	8.510 4743·4	12·7	8.509 0431·1	4·3	30	8.510 3982·4	12·6	8.509 0177·4	4·2
31	510 4730·7	12·7	509 0426·8	4·2	31	510 3969·8	12·7	509 0173·2	4·2
32	510 4718·0	12·6	509 0422·6	4·2	32	510 3957·1	12·7	509 0169·0	4·3
33	510 4705·4	12·7	509 0418·4	4·2	33	510 3944·4	12·7	509 0164·7	4·2
34	510 4692·7	12·7	509 0414·2	4·3	34	510 3931·7	12·6	509 0160·5	4·2
35	8.510 4680·0	12·7	8.509 0409·9	4·2	35	8.510 3919·1	12·7	8.509 0156·3	4·2
36	510 4667·3	12·7	509 0405·7	4·2	36	510 3906·4	12·7	509 0152·1	4·3
37	510 4654·6	12·7	509 0401·5	4·3	37	510 3893·7	12·7	509 0147·8	4·2
38	510 4641·9	12·7	509 0397·2	4·2	38	510 3881·0	12·6	509 0143·6	4·2
39	510 4629·2	12·7	509 0393·0	4·2	39	510 3868·4	12·7	509 0139·4	4·2
40	8.510 4616·5	12·7	8.509 0388·8	4·3	40	8.510 3855·7	12·7	8.509 0135·2	4·3
41	510 4603·8	12·6	509 0384·5	4·2	41	510 3843·0	12·6	509 0130·9	4·2
42	510 4591·2	12·7	509 0380·3	4·2	42	510 3830·4	12·7	509 0126·7	4·2
43	510 4578·5	12·7	509 0376·1	4·2	43	510 3817·7	12·7	509 0122·5	4·2
44	510 4565·8	12·7	509 0371·9	4·3	44	510 3805·0	12·6	509 0118·3	4·3
45	8.510 4553·1	12·7	8.509 0367·6	4·2	45	8.510 3792·4	12·7	8.509 0114·0	4·2
46	510 4540·4	12·7	509 0363·4	4·2	46	510 3779·7	12·7	509 0109·8	4·2
47	510 4527·7	12·7	509 0359·2	4·3	47	510 3767·0	12·7	509 0105·6	4·2
48	510 4515·0	12·6	509 0354·9	4·2	48	510 3754·3	12·6	509 0101·4	4·2
49	510 4502·4	12·7	509 0350·7	4·2	49	510 3741·7	12·7	509 0097·2	4·3
50	8.510 4489·7	12·7	8.509 0346·5	4·2	50	8.510 3729·0	12·7	8.509 0092·9	4·2
51	510 4477·0	12·7	509 0342·3	4·3	51	510 3716·3	12·6	509 0088·7	4·2
52	510 4464·3	12·7	509 0338·0	4·2	52	510 3703·7	12·7	509 0084·5	4·2
53	510 4451·6	12·7	509 0333·8	4·2	53	510 3691·0	12·6	509 0080·3	4·3
54	510 4438·9	12·7	509 0329·6	4·2	54	510 3678·4	12·7	509 0076·0	4·2
55	8.510 4426·2	12·6	8.509 0325·4	4·2	55	8.510 3665·7	12·7	8.509 0071·8	4·2
56	510 4413·6	12·7	509 0321·2	4·3	56	510 3653·0	12·6	509 0067·6	4·2
57	510 4400·9	12·7	509 0316·9	4·2	57	510 3640·4	12·7	509 0063·4	4·2
58	510 4388·2	12·7	509 0312·7	4·3	58	510 3627·7	12·7	509 0059·2	4·3
59	510 4375·5	12·7	509 0308·4	4·2	59	510 3615·0	12·0	509 0054·9	4·2
60	8.510 4362·8		8.509 0304·2		60	8.510 3602·4		8.509 0050·7	

vgl. § 39. S. 230.

′	$\varphi = 47°$: $log \frac{\varrho}{M} = log$ [1]	Δ	$\varphi = 47°$: $log \frac{\varrho}{N} = log$ [2]	Δ	′	$\varphi = 48°$: $log \frac{\varrho}{M} = log$ [1]	Δ	$\varphi = 48°$: $log \frac{\varrho}{N} = log$ [2]	Δ
0	8.510 3602·4	—	8.509 0050·7	—	0	8.510 2843·7	—	8.508 9797·8	—
1	8.510 3589·7	12·7	8.509 0046·5	4·2	1	8.510 2831·0	12·7	8.508 9793·6	4·2
2	8.510 3577·0	12·7	8.509 0042·3	4·2	2	8.510 2818·4	12·6	8.508 9789·4	4·2
3	8.510 3564·4	12·6	8.509 0038·1	4·2	3	8.510 2805·8	12·6	8.508 9785·2	4·2
4	8.510 3551·7	12·7	8.509 0033·8	4·3	4	8.510 2793·2	12·6	8.508 9781·0	4·2
5	8.510 3539·1	12·6	8.509 0029·6	4·2	5	8.510 2780·6	12·6	8.508 9776·8	4·2
6	8.510 3526·4	12·7	8.509 0025·4	4·2	6	8.510 2767·9	12·7	8.508 9772·6	4·2
7	8.510 3513·7	12·7	8.509 0021·2	4·2	7	8.510 2755·3	12·6	8.508 9768·4	4·2
8	8.510 3501·1	12·6	8.509 0017·0	4·2	8	8.510 2742·7	12·6	8.508 9764·2	4·2
9	8.510 3488·4	12·7	8.509 0012·7	4·3	9	8.510 2730·1	12·6	8.508 9760·0	4·2
10	8.510 3475·8	12·6	8.509 0008·5	4·2	10	8.510 2717·5	12·6	8.508 9755·8	4·2
11	8.510 3463·1	12·7	8.509 0004·3	4·2	11	8.510 2704·8	12·7	8.508 9751·5	4·3
12	8.510 3450·5	12·6	8.509 0000·1	4·2	12	8.510 2692·2	12·6	8.508 9747·3	4·2
13	8.510 3437·8	12·7	8.508 9995·9	4·2	13	8.510 2679·6	12·6	8.508 9743·1	4·2
14	8.510 3425·1	12·7	8.508 9991·6	4·3	14	8.510 2667·0	12·6	8.508 9738·9	4·2
15	8.510 3412·5	12·6	8.508 9987·4	4·2	15	8.510 2654·4	12·6	8.508 9734·7	4·2
16	8.510 3399·8	12·7	8.508 9983·2	4·2	16	8.510 2641·8	12·6	8.508 9730·5	4·2
17	8.510 3387·2	12·6	8.508 9979·0	4·2	17	8.510 2629·2	12·6	8.508 9726·3	4·2
18	8.510 3374·5	12·7	8.508 9974·8	4·2	18	8.510 2616·5	12·7	8.508 9722·1	4·2
19	8.510 3361·9	12·6	8.508 9970·6	4·2	19	8.510 2603·9	12·6	8.508 9717·9	4·2
20	8.510 3349·2	12·7	8.508 9966·3	4·3	20	8.510 2591·3	12·6	8.508 9713·7	4·2
21	8.510 3336·6	12·6	8.508 9962·1	4·2	21	8.510 2578·7	12·6	8.508 9709·5	4·2
22	8.510 3323·9	12·7	8.508 9957·9	4·2	22	8.510 2566·1	12·6	8.508 9705·3	4·2
23	8.510 3311·3	12·6	8.508 9953·7	4·2	23	8.510 2553·5	12·6	8.508 9701·1	4·2
24	8.510 3298·6	12·7	8.508 9949·5	4·2	24	8.510 2540·9	12·6	8.508 9696·9	4·2
25	8.510 3286·0	12·6	8.508 9945·3	4·2	25	8.510 2528·3	12·6	8.508 9692·7	4·2
26	8.510 3273·3	12·7	8.508 9941·0	4·3	26	8.510 2515·7	12·6	8.508 9688·5	4·2
27	8.510 3260·7	12·6	8.508 9936·8	4·2	27	8.510 2503·1	12·6	8.508 9684·3	4·2
28	8.510 3248·0	12·7	8.508 9932·6	4·2	28	8.510 2490·5	12·6	8.508 9680·1	4·2
29	8.510 3235·4	12·6	8.508 9928·4	4·2	29	8.510 2477·9	12·6	8.508 9675·9	4·2
80	8.510 3222·7	12·7	8.508 9924·2	4·2	80	8.510 2465·3	12·6	8.508 9671·7	4·2
31	8.510 3210.1	12·6	8.508 9920·0	4·2	31	8.510 2452·7	12·6	8.508 9667·5	4·2
32	8.510 3197·5	12·6	8.508 9915·7	4·3	32	8.510 2440·1	12·6	8.508 9663·3	4·2
33	8.510 3184·8	12·7	8.508 9911·5	4·2	33	8.510 2427·5	12·6	8.508 9659·1	4·2
34	8.510 3172·2	12·6	8.508 9907·3	4·2	34	8.510 2414·9	12·6	8.508 9654·9	4·2
35	8.510 3159·5	12·7	8.508 9903·1	4·2	35	8.510 2402·3	12·6	8.508 9650·7	4·2
36	8.510 3146·9	12·6	8.508 9898·9	4·2	36	8.510 2389·7	12·6	8.508 9646·5	4·2
37	8.510 3134·2	12·7	8.508 9894·7	4.2	37	8.510 2377·1	12·6	8.508 9642·3	4·2
38	8.510 3121·6	12·6	8.508 9890·5	4·2	38	8.510 2364·5	12·6	8.508 9638·1	4·2
39	8.510 3109·0	12·6	8.508 9886·2	4·3	39	8.510 2351·9	12·6	8.508 9633·9	4·2
40	8.510 3096·3	12·7	8.508 9892·0	4·2	40	8.510 2339·3	12·6	8.508 9629·7	4·2
41	8.510 3083·7	12·6	8.508 9877·8	4·2	41	8.510 2326·7	12·6	8.508 9625·5	4·2
42	8.510 3071·0	12·7	8.508 9873·6	4·2	42	8.510 2314·1	12·6	8.508 9621·3	4·2
43	8.510 3058·4	12·6	8.508 9869·4	4·2	43	8.510 2301·5	12·6	8.508 9617·1	4·2
44	8.510 3045·8	12·6	8.508 9865·2	4·2	44	8.510 2289·0	12·5	8.508 9612·9	4·2
45	8.510 3033·1	12·7	8.508 9861·0	4·2	45	8.510 2276·4	12·6	8.508 9608·7	4·2
46	8.510 3020·5	12·6	8.508 9856·8	4·2	46	8.510 2263·8	12·6	8.508 9604·5	4·2
47	8.510 3007.9	12·6	8.508 9852·6	4·2	47	8.510 2251·2	12·6	8.508 9600·3	4·2
48	8.510 2995·2	12·7	8.508 9848·3	4·3	48	8.510 2238·6	12·6	8.508 9596·1	4·2
49	8.510 2982·6	12·6	8.508 9844·1	4·2	49	8.510 2226·0	12·6	8.508 9591·9	4·2
50	8.510 2970·0	12·6	8.508 9839·9	4·2	50	8.510 2213·4	12·6	8.508 9587·7	4·2
51	8.510 2957·3	12·7	8.508 9835·7	4·2	51	8.510 2200·9	12·5	8.508 9583·6	4·1
52	8.510 2944·7	12·6	8.508 9831·5	4·2	52	8.510 2188·3	12·6	8.508 9579·4	4·2
53	8.510 2932·1	12·6	8.508 9827·3	4·2	53	8.510 2175·7	12·6	8.508 9575·2	4·2
54	8.510 2919·4	12·7	8.508 9823·1	4·2	54	8.510 2163·1	12·6	8.508 9571·0	4·2
55	8.510 2906·8	12·6	8.508 9818·9	4·2	55	8.510 2150·5	12·6	8.508 9566·8	4·2
56	8.510 2894·2	12·6	8.508 9814·7	4·2	56	8.510 2138·0	12·5	8.508 9562·6	4·2
57	8.510 2881·6	12·6	8.508 9810·4	4·3	57	8.510 2125·4	12·6	8.508 9558·4	4·2
58	8.510 2868·9	12·7	8.508 9806·2	4·2	58	8.510 2112·8	12·6	8.508 9554·2	4·2
59	8.510 2856·3	12·6	8.508 9802·0	4·2	59	8.510 2100·2	12·6	8.508 9550·0	4·2
60	8.510 2843·7	12·6	8.508 9797·8	4·2	60	8.510 2087·7	12·5	8.508 9545·8	4·2

vgl. § 39. S. 230.

$\varphi = 49°$					$\varphi = 50°$				
′	$log \frac{\varrho}{M} = log\ [1]$		$log \frac{\varrho}{N} = log\ [2]$		′	$log \frac{\varrho}{M} = log\ [1]$		$log \frac{\varrho}{N} = log\ [2]$	
0	8.510 2087.7	—	8.508 9545.8	—	0	8.510 1335.3	—	8.508 9295.0	—
1	8.510 2075.1	12.6	8.508 9541.6	4.2	1	8.510 1322.8	12.5	8.508 9290.9	4.1
2	8.510 2062.5	12.6	8.508 9537.4	4.2	2	8.510 1310.3	12.5	8.508 9286.7	4.2
3	8.510 2050.0	12.5	8.508 9533.3	4.1	3	8.510 1297.8	12.5	8.508 9282.5	4.2
4	8.510 2037.4	12.6	8.508 9529.1	4.2	4	8.510 1285.3	12.5	8.508 9278.4	4.1
5	8.510 2024.8	12.6	8.508 9524.9	4.2	5	8.510 1272.8	12.5	8.508 9274.2	4.2
6	8.510 2012.3	12.5	8.508 9520.7	4.2	6	8.510 1260.3	12.5	8.508 9270.0	4.2
7	8.510 1999.7	12.6	8.508 9516.5	4.2	7	8.510 1247.8	12.5	8.508 9265.9	4.1
8	8.510 1987.1	12.6	8.508 9512.3	4.2	8	8.510 1235.3	12.5	8.508 9261.7	4.2
9	8.510 1974.6	12.5	8.508 9508.1	4.2	9	8.510 1222.8	12.5	8.508 9257.5	4.2
10	8.510 1962.0	12.6	8.508 9503.9	4.2	10	8.510 1210.3	12.5	8.508 9253.4	4.1
11	8.510 1949.4	12.6	8.508 9499.7	4.2	11	8.510 1197.8	12.5	8.508 9249.2	4.2
12	8.510 1936.9	12.5	8.508 9495.6	4.1	12	8.510 1185.3	12.5	8.508 9245.0	4.2
13	8.510 1924.3	12.6	8.508 9491.4	4.2	13	8.510 1172.8	12.5	8.508 9240.9	4.1
14	8.510 1911.8	12.5	8.508 9487.2	4.2	14	8.510 1160.4	12.4	8.508 9236.7	4.2
15	8.510 1899.2	12.6	8.508 9483.0	4.2	15	8.510 1147.9	12.5	8.508 9232.6	4.1
16	8.510 1886.6	12.6	8.508 9478.8	4.2	16	8.510 1135.4	12.5	8.508 9228.4	4.2
17	8.510 1874.1	12.5	8.508 9474.6	4.2	17	8.510 1122.9	12.5	8.508 9224.2	4.2
18	8.510 1861.5	12.6	8.508 9470.4	4.2	18	8.510 1110.4	12.5	8.508 9220.1	4.1
19	8.510 1849.0	12.5	8.508 9466.3	4.1	19	8.510 1097.9	12.5	8.508 9215.9	4.2
20	8.510 1836.4	12.6	8.508 9462.1	4.2	20	8.510 1085.5	12.4	8.508 9211.7	4.2
21	8.510 1823.9	12.5	8.508 9457.9	4.2	21	8.510 1073.0	12.5	8.508 9207.6	4.1
22	8.510 1811.3	12.6	8.508 9453.7	4.2	22	8.510 1060.5	12.5	8.508 9203.4	4.2
23	8.510 1798.8	12.5	8.508 9449.5	4.2	23	8.510 1048.0	12.5	8.508 9199.3	4.1
24	8.510 1786.2	12.6	8.508 9445.3	4.2	24	8.510 1035.6	12.4	8.508 9195.1	4.2
25	8.510 1773.7	12.5	8.508 9441.2	4.1	25	8.510 1023.1	12.5	8.508 9191.0	4.1
26	8.510 1761.1	12.6	8.508 9437.0	4.2	26	8.510 1010.6	12.5	8.508 9186.8	4.2
27	8.510 1748.6	12.5	8.508 9432.8	4.2	27	8.510 0998.1	12.5	8.508 9182.6	4.2
28	8.510 1736.1	12.5	8.508 9428.6	4.2	28	8.510 0985.7	12.4	8.508 9178.5	4.1
29	8.510 1723.5	12.6	8.508 9424.4	4.2	29	8.510 0973.2	12.5	8.508 9174.3	4.2
30	8.510 1711.0	12.5	8.508 9420.3	4.1	30	8.510 0960.7	12.5	8.508 9170.2	4.1
31	8.510 1698.4	12.6	8.508 9416.1	4.2	31	8.510 0948.3	12.4	8.508 9166.0	4.2
32	8.510 1685.9	12.5	8.508 9411.9	4.2	32	8.510 0935.8	12.5	8.508 9161.9	4.1
33	8.510 1673.4	12.5	8.508 9407.7	4.2	33	8.510 0923.4	12.4	8.508 9157.7	4.2
34	8.510 1660.8	12.6	8.508 9403.5	4.2	34	8.510 0910.9	12.5	8.508 9153.6	4.1
35	8.510 1648.3	12.5	8.508 9399.4	4.1	35	8.510 0898.4	12.5	8.508 9149.4	4.2
36	8.510 1635.8	12.5	8.508 9395.2	4.2	36	8.510 0886.0	12.4	8.508 9145.3	4.1
37	8.510 1623.2	12.6	8.508 9391.0	4.2	37	8.510 0873.5	12.5	8.508 9141.1	4.2
38	8.510 1610.7	12.5	8.508 9386.8	4.2	38	8.510 0861.1	12.4	8.508 9137.0	4.1
39	8.510 1598.2	12.5	8.508 9382.6	4.2	39	8.510 0848.6	12.5	8.508 9132.8	4.2
40	8.510 1585.6	12.6	8.508 9378.5	4.1	40	8.510 0836.2	12.4	8.508 9128.7	4.1
41	8.510 1573.1	12.5	8.508 9374.3	4.2	41	8.510 0823.7	12.5	8.508 9124.5	4.2
42	8.510 1560.6	12.5	8.508 9370.1	4.2	42	8.510 0811.3	12.4	8.508 9120.4	4.1
43	8.510 1548.0	12.6	8.508 9365.9	4.2	43	8.510 0798.8	12.5	8.508 9116.2	4.2
44	8.510 1535.5	12.5	8.508 9361.8	4.1	44	8.510 0786.4	12.4	8.508 9112.1	4.1
45	8.510 1523.0	12.5	8.508 9357.6	4.2	45	8.510 0773.9	12.5	8.508 9107.9	4.2
46	8.510 1510.5	12.5	8.508 9353.4	4.2	46	8.510 0761.5	12.4	8.508 9103.8	4.1
47	8.510 1498.0	12.5	8.508 9349.2	4.2	47	8.510 0749.0	12.5	8.508 9099.6	4.2
48	8.510 1485.4	12.6	8.508 9345.1	4.1	48	8.510 0736.6	12.4	8.508 9095.5	4.1
49	8.510 1472.9	12.5	8.508 9340.9	4.2	49	8.510 0724.2	12.4	8.508 9091.3	4.2
50	8.510 1460.4	12.5	8.508 9336.7	4.2	50	8.510 0711.7	12.5	8.508 9087.2	4.1
51	8.510 1447.9	12.5	8.508 9332.6	4.1	51	8.510 0699.3	12.4	8.508 9083.0	4.2
52	8.510 1435.4	12.5	8.508 9328.4	4.2	52	8.510 0686.9	12.4	8.508 9078.9	4.1
53	8.510 1422.9	12.5	8.508 9324.2	4.2	53	8.510 0674.4	12.5	8.508 9074.7	4.2
54	8.510 1410.3	12.6	8.508 9320.0	4.2	54	8.510 0662.0	12.4	8.508 9070.6	4.1
55	8.510 1397.8	12.5	8.508 9315.9	4.1	55	8.510 0649.6	12.4	8.508 9066.5	4.1
56	8.510 1385.3	12.5	8.508 9311.7	4.2	56	8.510 0637.1	12.5	8.508 9062.3	4.2
57	8.510 1372.8	12.5	8.508 9307.5	4.2	57	8.510 0624.7	12.4	8.508 9058.2	4.1
58	8.510 1360.3	12.5	8.508 9303.4	4.1	58	8.510 0612.3	12.4	8.508 9054.0	4.2
59	8.510 1347.8	12.5	8.508 9299.2	4.2	59	8.510 0599.9	12.4	8.508 9049.9	4.1
60	8.510 1335.3	12.5	8.508 9295.0	4.2	60	8.510 0587.4	12.5	8.508 9045.7	4.2

vgl. § 39. S. 230.

$\varphi = 51°$

'	$log \frac{\varrho}{M} = log$ [1]		$log \frac{\varrho}{N} = log$ [2]	
		—		—
0	8.510 0587.4	12.4	8.508 9045.7	4.1
1	8.510 0575.0	12.4	8.508 9041.6	4.1
2	8.510 0562.6	12.4	8.508 9037.5	4.2
3	8.510 0050.2	12.4	8.508 9033.3	4.1
4	8.510 0537.8	12.5	8.508 9029.2	4.2
5	8.510 0525.3	12.4	8.508 9025.0	4.1
6	8.510 0512.9	12.4	8.508 9020.9	4.1
7	8.510 0500.5	12.4	8.508 9016.8	4.2
8	8.510 0488.1	12.4	8.508 9012.6	4.1
9	8.510 0475.7	12.4	8.508 9008.5	4.1
10	8.510 0463.3	12.4	8.508 9004.4	4.2
11	8.510 0450.9	12.4	8.508 9000.2	4.1
12	8.510 0438.5	12.4	8.508 8996.1	4.1
13	8.510 0426.1	12.4	8.508 8992.0	4.2
14	8.510 0413.7	12.4	8.508 8987.8	4.1
15	8.510 0401.3	12.4	8.508 8983.7	4.1
16	8.510 0388.9	12.4	8.508 8979.6	4.2
17	8.510 0376.5	12.4	8.508 8975.4	4.1
18	8.510 0364.1	12.4	8.508 8971.3	4.1
19	8.510 0351.7	12.4	8.508 8967.2	4.2
20	8.510 0339.3	12.4	8.508 8963.0	4.1
21	8.510 0326.9	12.4	8.508 8958.9	4.1
22	8.510 0314.5	12.3	8.508 8954.8	4.2
23	8.510 0302.2	12.4	8.508 8950.6	4.1
24	8.510 0289.8	12.4	8.508 8946.5	4.1
25	8.510 0277.4	12.4	8.508 8942.4	4.1
26	8.510 0265.0	12.4	8.508 8938.3	4.2
27	8.510 0252.6	12.4	8.508 8934.1	4.1
28	8.510 0240.2	12.3	8.508 8930.0	4.1
29	8.510 0227.9	12.4	8.508 8925.9	4.1
30	8.510 0215.5	12.4	8.508 8921.8	4.2
31	8.510 0203.1	12.4	8.508 8917.6	4.1
32	8.510 0190.7	12.3	8.508 8913.5	4.1
33	8.510 0178.4	12.4	8.508 8909.4	4.1
34	8.510 0166.0	12.4	8.508 8905.3	4.2
35	8.510 0153.6	12.3	8.508 8901.1	4.1
36	8.510 0141.3	12.4	8.508 8897.0	4.1
37	8.510 0128.9	12.3	8.508 8892.9	4.1
38	8.510 0116.6	12.4	8.508 8888.8	4.1
39	8.510 0104.2	12.4	8.508 8884.7	4.2
40	8.510 0091.8	12.3	8.508 8880.5	4.1
41	8.510 0079.5	12.4	8.508 8876.4	4.1
42	8.510 0067.1	12.3	8.508 8872.3	4.1
43	8.510 0054.8	12.4	8.508 8868.2	4.1
44	8.510 0042.4	12.3	8.508 8864.1	4.1
45	8.510 0030.1	12.4	8.508 8860.0	4.2
46	8.510 0017.7	12.3	8.508 8855.8	4.1
47	8.510 0005.4	12.4	8.508 8851.7	4.1
48	8.509 9993.0	12.3	8.508 8847.6	4.1
49	8.509 9980.7	12.4	8.508 8843.5	4.1
50	8.509 9968.3	12.3	8.508 8839.4	4.1
51	8.509 9956.0	12.3	8.508 8835.3	4.1
52	8.509 9943.7	12.4	8.508 8831.2	4.2
53	8.509 9931.3	12.3	8.508 8827.0	4.1
54	8.509 9919.0	12.3	8.508 8822.9	4.1
55	8.509 9906.7	12.4	8.508 8818.8	4.1
56	8.509 9894.3	12.3	8.508 8814.7	4.1
57	8.509 9882.0	12.3	8.508 8810.6	4.1
58	8.509 9869.7	12.4	8.508 8806.5	4.1
59	8.509 9857.3	12.3	8.508 8802.4	4.1
60	8.509 9845.0		8.508 8798.3	

$\varphi = 52°$

'	$log \frac{\varrho}{M} = log$ [1]		$log \frac{\varrho}{N} = log$ [2]	
		—		—
0	8.509 9845.0	12.3	8.508 8798.3	4.1
1	8.509 9832.7	12.3	8.508 8794.2	4.1
2	8.509 9820.4	12.3	8.508 8790.1	4.1
3	8.509 9808.1	12.4	8.508 8786.0	4.2
4	8.509 9795.7	12.3	8.508 8781.8	4.1
5	8.509 9783.4	12.3	8.508 8777.7	4.1
6	8.509 9771.1	12.3	8.508 8773.6	4.1
7	8.509 9758.8	12.3	8.508 8769.5	4.1
8	8.509 9746.5	12.3	8.508 8765.4	4.1
9	8.509 9734.2	12.3	8.508 8761.3	4.1
10	8.509 9721.9	12.3	8.508 8757.2	4.1
11	8.509 9709.6	12.3	8.508 8753.1	4.1
12	8.509 9697.3	12.3	8.508 8749.0	4.1
13	8.509 9685.0	12.3	8.508 8744.9	4.1
14	8.509 9672.7	12.3	8.508 8740.8	4.1
15	8.509 9660.4	12.3	8.508 8736.7	4.1
16	8.509 9648.1	12.3	8.508 8732.6	4.1
17	8.509 9635.8	12.3	8.508 8728.5	4.1
18	8.509 9623.5	12.3	8.508 8724.4	4.1
19	8.509 9611.2	12.3	8.508 8720.3	4.1
20	8.509 9598.9	12.3	8.508 8716.2	4.1
21	8.509 9586.6	12.2	8.508 8712.1	4.1
22	8.509 9574.4	12.3	8.508 8708.0	4.0
23	8.509 9562.1	12.3	8.508 8704.0	4.1
24	8.509 9549.8	12.3	8.508 8699.9	4.1
25	8.509 9537.5	12.3	8.508 8695.8	4.1
26	8.509 9525.2	12.2	8.508 8691.7	4.1
27	8.509 9513.0	12.3	8.508 8687.6	4.1
28	8.509 9500.7	12.3	8.508 8683.5	4.1
29	8.509 9488.4	12.3	8.508 8679.4	4.1
30	8.509 9476.1	12.2	8.508 8675.3	4.1
31	8.509 9463.9	12.3	8.508 8671.2	4.1
32	8.509 9451.6	12.3	8.508 8667.1	4.1
33	8.509 9439.3	12.2	8.508 8663.0	4.0
34	8.509 9427.1	12.3	8.508 8659.0	4.1
35	8.509 9414.8	12.2	8.508 8654.9	4.1
36	8.509 9402.6	12.3	8.508 8650.8	4.1
37	8.509 9390.3	12.2	8.508 8646.7	4.1
38	8.509 9378.1	12.3	8.508 8642.6	4.1
39	8.509 9365.8	12.2	8.508 8638.5	4.1
40	8.509 9353.6	12.3	8.508 8634.4	4.0
41	8.509 9341.3	12.2	8.508 8630.4	4.1
42	8.509 9329.1	12.3	8.508 8626.3	4.1
43	8.509 9316.8	12.2	8.508 8622.2	4.1
44	8.509 9304.6	12.3	8.508 8618.1	4.1
45	8.509 9292.3	12.2	8.508 8614.0	4.0
46	8.509 9280.1	12.2	8.508 8610.0	4.1
47	8.509 9267.9	12.3	8.508 8605.9	4.1
48	8.509 9255.6	12.2	8.508 8601.8	4.1
49	8.509 9243.4	12.2	8.508 8597.7	4.0
50	8.509 9231.2	12.3	8.508 8593.7	4.1
51	8.509 9218.9	12.2	8.508 8589.6	4.1
52	8.509 9206.7	12.2	8.508 8585.5	4.1
53	8.509 9194.5	12.2	8.508 8581.4	4.0
54	8.509 9182.3	12.3	8.508 8577.4	4.1
55	8.509 9170.0	12.2	8.508 8573.3	4.1
56	8.509 9157.8	12.2	8.508 8569.2	4.1
57	8.509 9145.6	12.2	8.508 8565.1	4.0
58	8.509 9133.4	12.2	8.508 8561.1	4.1
59	8.509 9121.2	12.2	8.508 8557.0	4.1
60	8.509 9109.0		8.508 8552.9	

vgl. § 39. S. 230.

$\varphi = 53°$

′	$log \frac{\varrho}{M} = log$ [1]	Δ	$log \frac{\varrho}{N} = log$ [2]	Δ
0	8.509 9109·0	—	8.508 8552.9	—
1	8.509 9096·8	12·2	8.508 8548.8	4·1
2	8.509 9084·5	12·3	8.508 8544·8	4·0
3	8.509 9072·3	12·2	8.508 8540·7	4·1
4	8.509 9060·1	12·2	8.508 8536·6	4·1
5	8 509 9047·9	12·2	8.508 8532·6	4 0
6	8.509 9035·7	12·2	8.508 8528·5	4·1
7	8.509 9023·5	12·2	8.508 8524·4	4·1
8	8.509 9011·4	12·1	8.508 8520·4	4·0
9	8.509 8999·2	12·2	8.508 8516·3	4·1
10	8 509 8987·0	12·2	8·508 8512·3	4·0
11	8.509 8974·8	12·2	8.508 8508·2	4·1
12	8.509 8962·6	12·2	8.508 8504·1	4·1
13	8.509 8950·4	12·2	8.508 8500·1	4·0
14	8.509 8938·2	12·2	8.508 8496·0	4·1
15	8.509 8926·0	12·2	8.508 8491·9	4·1
16	8.509 8913·9	12·1	8.508 8487·9	4·0
17	8.509 8901·7	12·2	8.508 8483·8	4·1
18	8.509 8889·5	12·2	8.508 8479·8	4·0
19	8 509 8877·3	12·2	8.508 8475·7	4·1
20	8.509 8865·2	12·1	8.508 8471·7	4·0
21	8.509 8853·0	12·2	8.508 8467·6	4·1
22	8.509 8840·8	12·2	8.508 8463·5	4·1
23	8.509 8828·7	12·1	8.508 8459·5	4·0
24	8.509 8816·5	12.2	8.508 8455·4	4·1
25	8.509 8804·4	12·1	8.508 8451·4	4·0
26	8.509 8792·2	12·2	8.508 8447·3	4·1
27	8.509 8780·0	12·2	8·508 8443·3	4·0
28	8.509 8767·9	12·1	8.508 8439·2	4·1
29	8.509 8755·7	12·2	8.508 8435·2	4·0
30	8.509 8743·6	12·1	8.508 8431·1	4·1
31	8.509 8731·5	12·1	8.508 8427·1	4·0
32	8.509 8719·3	12·2	8.508 8423·0	4·1
33	8.509 8707·2	12·1	8.508 8419·0	4·0
34	8.509 8695·0	12·2	8.508 8414·9	4·1
35	8.509 8682·9	12·1	8.508 8410·9	4·0
36	8.509 8670·8	12.1	8.508 8406·8	4·1
37	8.509 8658 6	12·2	8.508 8402·8	4·0
38	8 509 8646·5	12·1	8 508 8398·8	4·0
39	8.509 8634·4	12·1	8.508 8394·7	4·1
40	8.509 8622·2	12·2	8 508 8390·7	4·0
41	8.509 8610·1	12·1	8.508 8386·6	4·1
42	8.509 8598·0	12·1	8.508 8382·6	4·0
43	8.509 8585·9	12·1	8.508 8378·6	4·0
44	8.509 8573·7	12·2	8.508 8374·5	4·1
45	8.509 8561·6	12·1	8.508 8370·5	4·0
46	8.509 8549·5	12·1	8.508 8366·4	4·1
47	8.509 8537·4	12·1	8.508 8362·4	4·0
48	8.509 8525·3	12·1	8.508 8358·4	4·0
49	8.509 8513·2	12·1	8·508 8354·3	4·1
50	8.509 8501·1	12·1	8.508 8350·3	4·0
51	8.509 8489·0	12·1	8.508 8346·3	4·0
52	8.509 8476·9	12·1	8.508 8342·2	4·1
53	8.509 8464·8	12·1	8.508 8338·2	4·0
54	8.509 8452·7	12·1	8.508 8334·2	4·0
55	8.509 8440·6	12·1	8.508 8330·1	4·1
56	8.509 8428·5	12·1	8.508 8326·1	4·0
57	8.509 8416·4	12·1	8.508 8322·1	4·0
58	8.509 8404·3	12·1	8.508 8318·0	4·1
59	8.509 8392·2	12·1	8.508 8314·0	4·0
60	8.509 8380·2	12·0	8·508 8310·0	4·0

$\varphi = 54°$

′	$log \frac{\varrho}{M} = log$ [1]	Δ	$log \frac{\varrho}{N} log =$ [1]	Δ
0	8.509 8380 2	—	8.508 8310·0	—
1	8.509 8368·1	12·1	8.508 8306 0	4.0
2	8.509 8356.0	12·1	8.508 8301·9	4·1
3	8.509 8343·9	12·1	8.508 8297 9	4·0
4	8.509 8331·8	12·1	8.508 8293·9	4·0
5	8.509 8319·8	12·0	8.508 8289·9	4·0
6	8.509 8307·7	12·1	8.508 8285·8	4·1
7	8.509 8295·6	12·1	8.508 8281·8	4·0
8	8.509 8283·6	12·0	8.508 8277 8	4·0
9	8.509 8271·5	12·1	8.508 8273·8	4·0
10	8.509 8259·5	12·0	8.508 8269·7	4·1
11	8.509 8247·4	12·1	8.508 8265·7	4·0
12	8.509 8235·3	12·1	8.508 8261·7	4·0
13	8.509 8223·3	12·0	8.508 8257·7	4·0
14	8.509 8211·2	12·1	8.508 8253·7	4·0
15	8.509 8199·2	12·0	8.508 8249·7	4·0
16	8·509 8187 1	12·1	8.508 8245·6	4·1
17	8.509 8175 1	12·0	8.508 8241·6	4·0
18	8.509 8163·1	12·0	8.508 8237·6	4·0
19	8·509 8151 0	12·1	8.508 8233·6	4 0
20	8.509 8139·0	12·0	8 508 8229·6	4·0
21	8.509 8126·9	12 1	8.508 8225·6	4·0
22	8.509 8114·9	12·0	8.508 8221·6	4·0
23	8.509 8102·9	12·0	8.508 8217·6	4·0
24	8.509 8090·9	12·0	8.508 8213·6	4·0
25	8.509 8078·8	12·1	8.508 8209·5	4·1
26	8.509 8066·8	12·0	8.508 8205 5	4·0
27	8.509 8054·8	12·0	8.508 8201·5	4·0
28	8.509 8042·8	12·0	8.508 8197·5	4·0
29	8.509 8030·8	12·0	8.508 8193·5	4·0
30	8.509 8018·7	12·1	8.508 8189·5	4 0
31	8.509 8006·7	12·0	8.508 8185·5	4·0
32	8.509 7774·7	12·0	8.508 8181·5	4·0
33	8.509 7982·7	12 0	8.508 8177·5	4·0
34	8.509 7970·7	12·0	8.508 8173·5	4·0
35	8.509 7958·7	12·0	8.508 8169·5	4·0
36	8.509 7946·7	12·0	8.508 8165·5	4·0
37	8.509 7934·7	12·0	8.508 8161·5	4·0
38	8.509 7922·7	12·0	8.508 8157·5	4·0
39	8.509 7910·7	12·0	8.508 8153·5	4·0
40	8.509 7898·7	12·0	8.508 8149·5	4·0
41	8.509 7886·8	11·9	8.508 8145·5	4·0
42	8.509 7874·8	12·0	8.508 8141·5	4·0
43	8.509 7862·8	12·0	8.508 8137·5	4·0
44	8.509 7850·8	12·0	8.508 8133·5	4.0
45	8.509 7838 8	12·0	8.508 8129·5	4·0
46	8.509 7826·9	11·9	8.508 8125·6	3·9
47	8·509 7814·9	12·0	8.508 8121·6	4·0
48	8.509 7802·9	12·0	8.508 8117·6	4·0
49	8.509 7791 0	11·9	8.508 8113·6	4·0
50	8.509 7779 0	12·0	8.508 8109·6	4·0
51	8.509 7767·0	12·0	8.508 8105·6	4·0
52	8.509 7755·1	11·9	8.508 8101·6	4·0
53	8.509 7743·1	12·0	8.508 8097·6	4·0
54	8.509 7731·2	11·9	8.508 8093·7	3·9
55	8.509 7719·2	12·0	8.508 8089·7	4·0
56	8.509 7707·3	11·9	8.508 8085·7	4·0
57	8.509 7695·3	12·0	8.508 8081·7	4·0
58	8.509 7683·4	11·9	8.508 8077·7	4·0
59	8.509 7671·4	12·0	8.508 8073·7	4·0
60	8.509 7659·5	11·9	8.508 8069·8	3·9

vgl. § 39. S. 230.

$\varphi = 55°$

′	$log \frac{\varrho}{M} = log$ [1]	d	$log \frac{\varrho}{N} = log$ [2]	d
0	8.509 7659.5	12.0	8.508 8069.8	4.0
1	8.509 7647.5	11.9	8.508 8065.8	4.0
2	8.509 7635.6	11.9	8.508 8061.8	4.0
3	8.509 7623.7	12.0	8.508 8057.8	4.0
4	8.509 7611.7	11.9	8.508 8053.8	3.9
5	8.509 7599.8	11.9	8.508 8049.9	4.0
6	8.509 7587.9	11.9	8.508 8045.9	4.0
7	8.509 7576.0	11.9	8.508 8041.9	4.0
8	8.509 7564.1	12.0	8.508 8037.9	3.9
9	8.509 7552.1	11.9	8.508 8034.0	4.0
10	8.509 7540.2	11.9	8.508 8030.0	4.0
11	8.509 7528.3	11.9	8.508 8026.0	3.9
12	8.509 7516.4	11.9	8.508 8022.1	4.0
13	8.509 7504.5	11.9	8.508 8018.1	4.0
14	8.509 7492.6	11.9	8.508 8014.1	3.9
15	8.509 7480.7	11.9	8.508 8010.2	4.0
16	8.509 7468.8	11.9	8.508 8006.2	4.0
17	8.509 7456.9	11.9	8.508 8002.2	3.9
18	8.509 7445.0	11.9	8.508 7998.3	4.0
19	8.509 7433.1	11.9	8.508 7994.3	4.0
20	8.509 7421.2	11.9	8.508 7990.3	3.9
21	8.509 7409.3	11.8	8.508 7986.4	4.0
22	8.509 7397.5	11.9	8.508 7982.4	3.9
23	8.509 7385.6	11.9	8.508 7978.5	4.0
24	8.509 7373.7	11.9	8.508 7974.5	4.0
25	8.509 7361.8	11.9	8.508 7970.5	3.9
26	8.509 7349.9	11.8	8.508 7966.6	4.0
27	8.509 7338.1	11.9	8.508 7962.6	3.9
28	8.509 7326.2	11.9	8.508 7958.7	4.0
29	8.509 7314.3	11.8	8.508 7954.7	3.9
30	8.509 7302.5	11.9	8.508 7950.8	4.0
31	8.509 7290.6	11.8	8.508 7946.8	3.9
32	8.509 7278.8	11.9	8.508 7942.9	4.0
33	8.509 7266.9	11.8	8.508 7938.9	4.0
34	8.509 7255.1	11.9	8.508 7934.9	3.9
35	8.509 7243.2	11.8	8.508 7931.0	4.0
36	8.509 7231.4	11.9	8.508 7927.0	3.9
37	8.509 7219.5	11.8	8.508 7923.1	3.9
38	8.509 7207.7	11.9	8.508 7919.2	4.0
39	8.509 7195.8	11.8	8.508 7915.2	3.9
40	8.509 7184.0	11.8	8.508 7911.3	4.0
41	8.509 7172.2	11.9	8.508 7907.3	3.9
42	8.509 7160.3	11.8	8.508 7903.4	4.0
43	8.509 7148.5	11.8	8.508 7899.4	3.9
44	8.509 7136.7	11.8	8.508 7895.5	4.0
45	8.509 7124.9	11.9	8.508 7891.5	3.9
46	8.509 7113.0	11.8	8.508 7887.6	3.9
47	8.509 7101.2	11.8	8.508 7883.7	4.0
48	8.509 7089.4	11.8	8.508 7879.7	3.9
49	8.509 7077.6	11.8	8.508 7875.8	3.9
50	8.509 7065.8	11.8	8.508 7871.9	4.0
51	8.509 7054.0	11.8	8.508 7867.9	3.9
52	8.509 7042.2	11.8	8.508 7864.0	3.9
53	8.509 7030.4	11.8	8.508 7860.1	4.0
54	8.509 7018.6	11.8	8.508 7856.1	3.9
55	8.509 7006.8	11.8	8.508 7852.2	3.9
56	8.509 6995.0	11.8	8.508 7848.3	4.0
57	8.509 6983.2	11.8	8.508 7844.3	3.9
58	8.509 6971.4	11.8	8.508 7840.4	3.9
59	8.509 6959.6	11.8	8.508 7836.5	4.0
60	8.509 6947.8		8.508 7832.5	

$\varphi = 56°$

′	$log \frac{\varrho}{M} = log$ [1]	d	$log \frac{\varrho}{N} = log$ [2]	d
0	8.509 6947.8	11.7	8.508 7832.5	3.9
1	8.509 6936.1	11.8	8.508 7828.6	3.9
2	8.509 6924.3	11.8	8.508 7824.7	3.9
3	8.509 6912.5	11.8	8.508 7820.8	4.0
4	8.509 6900.7	11.7	8.508 7816.8	3.9
5	8.509 6889.0	11.8	8.508 7812.9	3.9
6	8.509 6877.2	11.8	8.508 7809.0	3.9
7	8.509 6865.4	11.7	8.508 7805.1	3.9
8	8.509 6853.7	11.8	8.508 7801.2	4.0
9	8.509 6841.9	11.7	8.508 7797.2	3.9
10	8.509 6830.2	11.8	8.508 7793.3	3.9
11	8.509 6818.4	11.7	8.508 7789.4	3.9
12	8.509 6806.7	11.8	8.508 7785.5	3.9
13	8.509 6794.9	11.7	8.508 7781.6	3.9
14	8.509 6783.2	11.8	8.508 7777.7	4.0
15	8.509 6771.4	11.7	8.508 7773.7	3.9
16	8.509 6759.7	11.7	8.508 7769.8	3.9
17	8.509 6748.0	11.8	8.508 7765.9	3.9
18	8.509 6736.2	11.7	8.508 7762.0	3.9
19	8.509 6724.5	11.7	8.508 7758.1	3.9
20	8.509 6712.8	11.8	8.508 7754.2	3.9
21	8.509 6701.0	11.7	8.508 7750.3	3.9
22	8.509 6689.3	11.7	8.508 7746.4	3.9
23	8.509 6677.6	11.7	8.508 7742.5	3.9
24	8.509 6665.9	11.7	8.508 7738.6	3.9
25	8.509 6654.2	11.7	8.508 7734.7	3.9
26	8.509 6642.5	11.7	8.508 7730.8	3.9
27	8.509 6630.8	11.7	8.508 7726.9	3.9
28	8.509 6619.1	11.7	8.508 7723.0	3.9
29	8.509 6607.4	11.7	8.508 7719.1	3.9
30	8.509 6595.7	11.7	8.508 7715.2	3.9
31	8.509 6584.0	11.7	8.508 7711.3	3.9
32	8.509 6572.3	11.7	8.508 7707.4	3.9
33	8.509 6560.6	11.7	8.508 7703.5	3.9
34	8.509 6548.9	11.7	8.508 7699.6	3.9
35	8.509 6537.2	11.7	8.508 7695.7	3.9
36	8.509 6525.5	11.6	8.508 7691.8	3.9
37	8.509 6513.9	11.7	8.508 7687.9	3.9
38	8.509 6502.2	11.7	8.508 7684.0	3.9
39	8.509 6490.5	11.7	8.508 7680.1	3.9
40	8.509 6478.8	11.6	8.508 7676.2	3.9
41	8.509 6467.2	11.7	8.508 7672.3	3.9
42	8.509 6455.5	11.6	8.508 7668.4	3.9
43	8.509 6443.9	11.7	8.508 7664.5	3.8
44	8.509 6432.2	11.7	8.508 7660.7	3.9
45	8.509 6420.5	11.6	8.508 7656.8	3.9
46	8.509 6408.9	11.7	8.508 7652.9	3.9
47	8.509 6397.2	11.6	8.508 7649.0	3.9
48	8.509 6385.6	11.6	8.508 7645.1	3.9
49	8.509 6374.0	11.7	8.508 7641.2	3.8
50	8.509 6362.3	11.6	8.508 7637.4	3.9
51	8.509 6350.7	11.7	8.508 7633.5	3.9
52	8.509 6339.0	11.6	8.508 7629.6	3.9
53	8.509 6327.4	11.6	8.508 7625.7	3.8
54	8.509 6315.8	11.6	8.508 7621.9	3.9
55	8.509 6304.2	11.7	8.508 7618.0	3.9
56	8.509 6292.5	11.6	8.508 7614.1	3.9
57	8.509 6280.9	11.6	8.508 7610.2	3.8
58	8.509 6269.3	11.6	8.508 7606.4	3.9
59	8.509 6257.7	11.6	8.508 7602.5	3.9
60	8.509 6246.1		8.508 7598.6	

vgl. § 39. S. 230.

φ	1° Länge in Kilometern	Δ	φ	1° Breite in Kilometern	Δ	1 Gradabteilung in Q.Kilometern	1 Gradabteilung in geogr. Q.Meilen
		—			+		
0°	111,3066	169	0°— 1°	110,5638	7	12 305,86	223,4873
1	111,2897	505	1 — 2	110,5645	13	12 302,21	223,4210
2	111,2392	842	2 — 3	110,5658	20	12 294,91	223,2885
3	111,1550	1178	3 — 4	110,5678	27	12 283,97	223,0898
4	111,0372	1514	4 — 5	110,5705	34	12 269,38	222,8249
5°	110,8858	1849	5°— 6°	110,5739	40	12 251,16	222,4939
6	110,7009	2185	6 — 7	110,5779	47	12 229,30	222,0968
7	110,4824	2519	7 — 8	110,5826	53	12 203,81	221,6339
8	110,2305	2853	8 — 9	110,5879	60	12 174,69	221,1051
9	109,9452	3186	9 —10	110,5939	66	12 141,95	220,5106
10°	109,6266	3518	10°—11°	110,6005	72	12 105,61	219,8505
11	109,2748	3848	11 —12	110,6077	79	12 065,66	219,1250
12	108,8900	4179	12 —13	110,6156	85	12 022,12	218,3343
13	108,4721	4507	13 —14	110,6241	90	11 975,00	217,4785
14	108,0214	4835	14 —15	110,6331	97	11 924,30	216,5578
15°	107,5379	5160	15°—16°	110,6428	103	11 870,05	215,5725
16	107,0219	5485	16 —17	110,6531	108	11 812,25	214,5228
17	106,4734	5808	17 —18	110,6639	113	11 750,92	213,4089
18	105,8926	6129	18 —19	110,6752	119	11 686,07	212,2312
19	105,2797	6449	19 —20	110,6871	125	11 617,71	210,9899
20°	104,6348	6766	20°—21°	110,6996	130	11 545,87	209,6852
21	103,9582	7082	21 —22	110,7126	134	11 470,56	208,3175
22	103,2500	7395	22 —23	110,7260	139	11 391,81	206,8871
23	102,5105	7707	23 —24	110,7399	144	11 309,62	205,3945
24	101,7398	8016	24 —25	110,7543	148	11 224,02	203,8399
25°	100,9382	8323	25°—26°	110,7691	153	11 135,03	202,2237
26	100,1059	8627	26 —27	110,7844	157	11 042,66	200,5464
27	99,2432	8930	27 —28	110,8001	161	10 946,96	198,8083
28	98,3502	9228	28 —29	110,8162	164	10 847,94	197,0099
29	97,4274	9526	29 —30	110,8326	168	10 745,61	195,1516
30°	96,4748	9819	30°—31°	110,8494	172	10 640,03	193,2340
31	95,4929	1,0110	31 —32	110,8666	174	10 531,20	191,2575
32	94,4819	1,0398	32 —33	110,8840	178	10 419,15	189,2226
33	93,4421	1,0683	33 —34	110,9018	180	10 303,91	187,1298
34	92,3738	1,0965	34 —35	110,9198	182	10 185,52	184,9797
35°	91,2773	1,1244	35°—36°	110,9380	185	10 064,01	182,7728
36	90,1529	1,1519	36 —37	110,9565	187	9 939,40	180,5098
37	89,0010	1,1791	37 —38	110,9752	188	9 811,73	178,1912
38	87,8219	1,2059	38 —39	110,9940	191	9 681,03	175,8176
39	86,6160	1,2324	39 —40	111,0131	191	9 547,34	173,3897
40°	85,3836	1,2585	40°—41°	111,0322	193	9 410,70	170,9081
41	84,1251	1,2843	41 —42	111,0515	193	9 271,14	168,3735
42	82,8408	1,3097	42 —43	111,0708	194	9 128,69	165,7866
43	81,5311	1,3346	43 —44	111,0902	195	8 983,41	163,1481
44	80,1965	1,3592	44 —45	111,1097		8 835,32	160,4587
45°	78,8373		0°—45°	4984,4393		499 699,59	9075,0670

1 Kilometer = 0,134 76292 geogr. Meilen (*log* = 9.129 5704·3)
1 Q.Kilometer = 0,018 161046 geogr. Q.Meilen (*log* = 8.259 1408·6)

vgl. § 35.—37.

φ	1° Länge in Kilometern	Δ	φ	1° Breite in Kilometern	Δ	1 Gradabteilung in Q.Kilometern	1 Gradabteilung in geogr. Q.Meilen
		—			+		
45°	78,8373	1,3834	45°—46°	111,1292	195	8 684,47	157,7192
46	77,4539	1,4071	46 —47	111,1487	194	8 530,91	154,9303
47	76,0468	1,4305	47 —48	111,1681	194	8 374,68	152,0928
48	74,6163	1,4534	48 —49	111,1875	193	8 215,81	149,2076
49	73,1629	1,4759	49 —50	111,2068	192	8 054,35	146,2754
50°	71,6870	1,4979	50°—51°	111,2260	191	7 890,36	143,2972
51	70,1891	1,5195	51 —52	111,2451	189	7 723,87	140,2736
52	68,6696	1,5406	52 —53	111,2640	188	7 554,95	137,2057
53	67,1290	1,5613	53 —54	111,2828	186	7 383,62	134,0943
54	65,5677	1,5814	54 —55	111,3014	183	7 209,96	130,9403
55°	63,9863	1,6012	55°—56°	111,3197	182	7 033,99	127,7446
56	62,3851	1,6204	56 —57	111,3379	178	6 855,79	124,5083
57	60,7647	1,6391	57 —58	111,3557	176	6 675,40	121,2323
58	59,1256	1,6574	58 —59	111,3733	173	6 492,88	117,9175
59	57,4682	1,6751	59 —60	111,3906	169	6 308,28	114,5650
60°	55,7931	1,6923	60°—61°	111,4075	166	6 121,66	111,1757
61	54,1008	1,7090	61 —62	111,4241	162	5 933,07	107,7507
62	52,3918	1,7253	62 —63	111,4403	159	5 742,57	104,2911
63	50,6665	1,7408	63 —64	111,4562	154	5 550,22	100,7979
64	48,9257	1,7560	64 —65	111,4716	150	5 356,09	97,2721
65°	47,1697	1,7706	65°—66°	111,4866	145	5 160,22	93,7150
66	45,3991	1,7846	66 —67	111,5011	141	4 962,68	90,1275
67	43,6145	1,7982	67 —68	111,5152	137	4 763,54	86,5108
68	41,8163	1,8111	68 —69	111,5289	131	4 562,85	82,8661
69	40,0052	1,8234	69 —70	111,5420	126	4 360,68	79,1945
70°	38,1818	1,8353	70°—71°	111,5546	120	4 157,09	75,4971
71	36,3465	1,8466	71 —72	111,5666	116	3 952,15	71,7751
72	34,4999	1,8572	72 —73	111,5782	109	3 745,92	68,0298
73	32,6427	1,8674	73 —74	111,5891	104	3 538,47	64,2623
74	30,7753	1,8769	74 —75	111,5995	99	3 329,86	60,4738
75°	28,8984	1,8859	75°—76°	111,6094	92	3 120,17	56,6656
76	27,0125	1,8943	76 —77	111,6186	85	2 909,45	52,8388
77	25,1182	1,9020	77 —78	111,6271	80	2 697,79	48,9947
78	23,2162	1,9093	78 —79	111,6351	74	2 485,23	45,1345
79	21,3069	1,9159	79 —80	111,6425	67	2 271,87	41,2595
80°	19,3910	1,9219	80°—81°	111,6492	61	2 057,76	37,3710
81	17,4691	1,9273	81 —82	111,6553	55	1 842,97	33,4703
82	15,5418	1,9321	82 —83	111,6608	47	1 627,58	29,5585
83	13,6097	1,9364	83 —84	111,6655	40	1 411,65	25,6371
84	11,6733	1,9400	84 —85	111,6695	34	1 195,26	21,7072
85°	9,7333	1,9430	85°—86°	111,6729	28	978,48	17,7702
86	7,7903	1,9455	86 —87	111,6757	20	761,37	13,8273
87	5,8448	1,9472	87 —88	111,6777	14	544,02	9,8799
88	3,8976	1,9485	88 —89	111,6791	7	326,48	5,9292
89	1,9491	1,9491	89 —90	111,6798		108,84	1,9767
90°	0,0000						
			45°—90°	5016,4165		208 565,31	3787,7641
			0°—45°	4984,4393		499 699,59	9075,0670
			0°—90°	10000,8558		708 264,90	12862,8311

1 geogr. Meile = 7,420 43854 Kilom. (*log* = 0.870 4295·7)
1 geogr. Q.Meile = 55,062 9081 Q.Kilom. (*log* = 1.740 8591·4)

vgl. § 35.—37.

φ	B	Differenzen +	+
40° 0′	4 429 084,788	18 504,034	+
10	447 588,822	18 504,567	0,533
20	466 093,389	18 505,100	0,533
30	484 598,489	18 505,634	0,534
40	503 104,123	18 506,169	0,535
50	521 610,292	18 506,704	0,535
41° 0′	4 540 116,996	18 507,239	0,535
10	558 624,235	18 507,774	0,535
20	577 132,009	18 508,309	0,535
30	595 640,318	18 508,846	0,537
40	614 149,164	18 509,383	0,537
50	632 658,547	18 509,921	0,538
42° 0′	4 651 168,468	18 510,459	0,538
10	669 678,927	18 510,997	0,538
20	688 189,924	18 511,536	0,539
30	706 701,460	18 512,075	0,539
40	725 213,535	18 512,614	0,539
50	743 726,149	18 513,153	0,539
43° 0′	4 762 239,302	18 513,692	0,539
10	780 752,994	18 514,231	0,539
20	799 267,225	18 514,770	0,539
30	817 781,995	18 515,311	0,541
40	836 297,306	18 515,853	0,542
50	854 813,159	18 516,398	0,540
44° 0′	4 873 329,552	18 516,934	0,541
10	891 846,486	18 517,474	0,540
20	910 363,960	18 518,015	0,541
30	928 881,975	18 518,555	0,540
40	947 400,530	18 519,097	0,542
50	965 919,627	18 519,638	0,541
45° 0′	4 984 439,265	18 520,180	0,542
10	5 002 959,445	18 520,720	0,540
20	021 480,165	18 521,261	0,541
30	040 001,426	18 521,803	0,542
40	058 523,229	18 522,344	0,541
50	077 045,573	18 522,885	0,541
46° 0′	5 095 568,458	18 523,425	0,540
10	114 091,883	18 523,967	0,542
20	132 615,850	18 524,508	0,541
30	151 140,358	18 525,048	0,540
40	169 665,406	18 525,588	0,540
50	188 190,994	18 526,129	0,541
47° 0′	5 206 717,123	18 526,669	0,540
10	225 243,792	18 527,209	0,540
20	243 771,001	18 527,749	0,540
30	262 298,750	18 528,288	0,539
40	280 827,038	18 528,828	0,540
50	299 355,866	18 529,366	0,538
48° 0′	5 317 885,232		

φ	B	Differenzen +	+
48° 0′	5 317 885,232	18 529,905	+
10	336 415,137	18 530,444	0,539
20	354 945,581	18 530,981	0,537
30	373 476,562	18 531,519	0,538
40	392 008,081	18 532,056	0,537
50	410 540,137	18 532,594	0,538
49° 0′	5 429 072,731	18 533,130	0,536
10	447 605,861	18 533,665	0,535
20	466 139,526	18 534,202	0,537
30	484 673,728	18 534,737	0,535
40	503 208,465	18 535,271	0,534
50	521 743,736	18 535,806	0,535
50° 0′	5 540 279,542	18 536,339	0,533
10	558 815,881	18 536,873	0,534
20	577 352,754	18 537,405	0,532
30	595 890,159	18 537,937	0,532
40	614 428,096	18 538,469	0,532
50	632 966,565	18 538,999	0,530
51° 0′	5 651 505,564	18 539,530	0,531
10	670 045,094	18 540,059	0,529
20	688 585,153	18 540,589	0,530
30	707 125,742	18 541,116	0,527
40	725 666,858	18 541,644	0,528
50	744 208,502	18 542,172	0,528
52° 0′	5 762 750,674	18 542,697	0,525
10	781 293,371	18 543,222	0,525
20	799 836,593	18 543,748	0,526
30	818 380,341	18 544,271	0,523
40	836 924,612	18 544,794	0,523
50	855 469,406	18 545,316	0,522
53° 0′	5 874 014,722	18 545,838	0,522
10	892 560,560	18 546,358	0,520
20	911 106,918	18 546,878	0,520
30	929 653,796	18 547,397	0,519
40	948 201,193	18 547,914	0,517
50	966 749,107	18 548,432	0,518
54° 0′	5 985 297,539	18 548,947	0,515
10	6 003 846,486	18 549,463	0,516
20	022 395,949	18 549,976	0,513
30	040 945,925	18 550,490	0,514
40	059 496,415	18 551,002	0,512
50	078 047,417	18 551,512	0,510
55° 0′	6 096 598,929	18 552,023	0,511
10	115 150,952	18 552,532	0,509
20	133 703,484	18 553,039	0,507
30	152 256,523	18 553,446	0,506
40	170 810,069	18 554,052	0,507
50	189 364,121	18 554,556	0,504
56° 0′	6 207 918,677		

vgl. S. 216.

Meridian-bogen	Mittelbreite φ							Meridian-bogen
	0°	30°	45°	50°	55°	60°	75°	
m	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi$	m
100m	3,26″	3,25″	3,24″	3,24″	3,23″	3,23″	3,23″	100m
200	6,51	6,50	6,48	6,47	6,47	6,46	6,45	200
300	9,77	9,74	9,72	9,71	9,70	9,69	9,68	300
400	13,02	12,99	12,96	12,95	12,94	12,93	12,90	400
500	16,28	16,24	16,20	16,18	16,17	16,16	16,13	500
600m	19,54	19,49″	19,44″	19,42″	19,40″	19,39″	19,35″	600m
700	22,79	22,74	22,68	22,66	22,64	22,62	22,58	700
800	26,05	25,98	25,92	25,90	25,85	25,85	25,81	800
900	29,30	29,23	29,16	29,13	29,11	29,08	29,03	900
1000m	0′ 32,6″	0′ 32,5″	0′ 32,4″	0′ 32,4″	0′ 32,3″	0′ 32,3″	0′ 32,3″	1000m
2000	1 5,1	1 5,0	1 4,8	1 4,7	1 4,7	1 4,6	1 4,5	2000
3000	1 37,7	1 37,4	1 37,2	1 37,1	1 37,0	1 36,9	1 36,8	3000
4000	2 10,2	2 9,9	2 9,6	2 9,5	2 9,4	2 9,3	2 9,0	4000
5000	2 42,8	2 42,4	2 42,0	2 41,8	2 41,7	2 41,6	2 41,3	5000
6000m	3′ 15,4″	3′ 14,9″	3′ 14,4″	3′ 14,2″	3′ 14,0″	3′ 13,9″	3′ 13,5″	6000m
7000	3 47,9	3 47,4	3 46,8	3 46,6	3 46,4	3 46,2	3 45,8	7000
8000	4 20,5	4 19,8	4 19,2	4 19,0	4 18,7	4 18,5	4 18,1	8000
9000	4 53,0	4 52,3	4 51,6	4 51,3	4 51,1	4 50,8	4 50,3	9000
10 000m	5′ 25,6″	5′ 24,8″	5′ 24,0″	5′ 23,7″	5′ 23,4″	5′ 23,2″	5′ 22,6″	10 000m
20 000	10 51,2	10 49,6	10 48,0	10 47,4	10 46,8	10 46,3	10 45,1	20 000
30 000	16 16,8	16 14,4	16 11,9	16 11,1	16 10,2	16 9,4	16 7,7	30 000
40 000	21 42,4	21 39,2	21 35,9	21 34,8	21 33,7	21 32,6	21 30,3	40 000
50 000	27 8,0	27 3,9	26 59,6	26 58,5	26 57,1	26 55,8	26 52,8	50 000
60 000m	32′ 33,6″	32′ 28,7″	32′ 23,9″	32′ 22,2″	32′ 20,5	32′ 19,0″	32′ 15,4″	60 000m
70 000	37 59,8	37 53,5	37 47,8	37 45,9	37 43,9	37 42,1	37 38,0	70 000
80 000	43 24,9	43 18,3	43 11,8	43 9,5	43 7,3	43 5,3	43 0,5	80 000
90 000	48 50,5	48 43,1	48 35,8	48 33,2	48 30,7	48 28,5	48 23,1	90 000
100 000	54 16,1	54 7,9	53 59,8	53 57,0	53 54,2	53 51,6	53 45,7	100 000

$\Delta\varphi$	m	m	m	m	m	m	m	$\Delta\varphi$
1″	30,7121m	30,7892m	30,8665m	30,8935m	30,9196m	30,9442m	31,0013m	1″
10″	307,1m	307,9m	308,7m	308,9	309,2m	309,4	310,0m	10″
20″	614,2	615,8	617,3	617,9	618,4	618,9	620,0	20″
30″	921,4	923,7	926,0	926,8	927,6	928,3	930,0	30″
40″	1228,5	1231,6	1234,7	1235,7	1236,8	1237,8	1240,0	40″
50″	1535,6	1539,5	1543,3	1544,7	1546,0	1547,2	1550,1	50″
60″ = 1′	1843m	1847m	1852m	1854m	1855m	1857m	1860m	60″ = 1′
2′	3685	3694	3704	3707	3710	3713	3720	2′
3′	5528	5542	5556	5561	5566	5570	5580	3′
4′	7371	7389	7408	7414	7421	7427	7440	4′
5′	9214	9237	9260	9268	9276	9283	9300	5′
6′	11 056m	11 084m	11 112m	11 122m	11 131m	11 140m	11 160m	6′
7′	12 899	12 931	12 964	12 975	12 986	12 997	13 021	7′
8′	14 742	14 779	14 816	14 829	14 841	14 853	14 881	8′
9′	16 585	16 626	16 668	16 682	16 697	16 710	16 741	9′
10′	18 427	18 474	18 520	18 536	18 552	18 567	18 601	10′

vgl. § 35. und § 55.

Breite φ	Bogen 1′	Bogen 1″	Zeit 1^m	Zeit 1^s	Breite φ	Bogen 1′	Bogen 1″	Zeit 1^m	Zeit 1^s
0°	1855^m	$30,9^m$	$27\,827^m$	464^m	45°	1314^m	$21,9^m$	$19\,709^m$	328^m
1	1855	30,9	27 822	464	46	1291	21,5	19 363	323
2	1854	30,9	27 810	464	47	1267	21,1	19 012	317
3	1853	30,9	27 789	463	48	1244	20,7	18 654	311
4	1851	30,8	27 759	463	49	1219	20,3	18 291	305
5°	1848^m	$30,8^m$	$27\,721^m$	462^m	50°	1195^m	$19,9^m$	$17\,922^m$	299^m
6	1845	30,8	27 675	461	51	1170	19,5	17 547	292
7	1841	30,7	27 621	460	52	1144	19,1	17 167	286
8	1837	30,6	27 558	459	53	1119	18,6	16 782	280
9	1832	30,5	27 486	458	54	1093	18,2	16 393	273
10°	1827^m	$30,5^m$	$27\,407^m$	457^m	55°	1066^m	$17,8^m$	$15\,997^m$	267^m
11	1821	30,4	27 319	455	56	1040	17,3	15 596	260
12	1815	30,2	27 222	454	57	1013	16,9	15 191	253
13	1808	30,1	27 118	452	58	985	16,4	14 781	246
14	1800	30,0	27 005	450	59	958	16,0	14 367	239
15°	1792^m	$29,9^m$	$26\,884^m$	448^m	60	930^m	15,5	$13\,948^m$	232^m
16	1784	29,7	26 755	446	61	902	15,0	13 525	225
17	1775	29,6	26 618	444	62	873	14,6	13 098	218
18	1765	29,4	26 473	441	63	844	14,1	12 667	211
19	1755	29,2	26 320	439	64	815	13,6	12 231	204
20°	1744^m	$29,1^m$	$26\,159^m$	436^m	65°	786^m	$13,1^m$	$11\,792^m$	197^m
21	1733	28,9	25 990	433	66	757	12,6	11 350	189
22	1721	28,7	25 812	430	67	727	12,1	10 904	182
23	1709	28,5	25 628	427	68	697	11,6	10 454	174
24	1696	28,3	25 435	424	69	667	11,1	10 001	167
25°	1682^m	$28,0^m$	$25\,235^m$	421^m	70°	636^m	$10,6^m$	9545^m	159^m
26	1668	27,8	25 026	417	71	606	10,1	9086	151
27	1654	27,6	24 811	414	72	575	9,6	8625	144
28	1639	27,3	24 588	410	73	544	9,1	8161	136
29	1624	27,1	24 357	406	74	513	8,5	7694	128
30°	1608^m	$26,8^m$	$24\,119^m$	402^m	75°	482^m	$8,0^m$	7225^m	120^m
31	1592	26,5	23 873	398	76	450	7,5	6753	113
32	1575	26,2	23 620	394	77	419	7,0	6280	105
33	1557	26,0	23 361	389	78	387	6,4	5804	97
34	1540	25,7	23 093	385	79	355	5,9	5327	89
35°	1521^m	$25,4^m$	$22\,810^m$	380^m	80°	323^m	$5,4^m$	4848^m	81^m
36	1503	25,0	22 538	376	81	291	4,9	4367	73
37	1483	24,7	22 250	371	82	259	4,3	3885	65
38	1464	24,4	21 955	366	83	227	3,8	3402	57
39	1444	24,1	21 654	361	84	195	3,2	2918	49
40°	1423^m	$23,7^m$	$21\,346^m$	356^m	85°	162^m	$2,7^m$	2433^m	41^m
41	1402	23,4	21 031	351	86	130	2,2	1948	32
42	1381	23,0	20 710	345	87	97	1,6	1461	24
43	1359	22,6	20 383	340	88	65	1,1	974	16
44	1337	22,3	20 049	334	89	32	0,5	487	8
45	1314	21,9	19 709	328	90	0	0,0	0	0

vgl. § 36.

Breite φ	Parallel-Bogen 10′	Meridian-Bogen 6′	Trapez-fläche	Breite φ	Parallel-Bogen 10′	Meridian-Bogen 6′	Trapez-fläche
	Meter	Meter	Q.Kilometer		Meter	Meter	Q.Kilometer
45° 0′	13 139,55	11 112,04	145,8802	50° 0′	11 947,84	11 121,74	132,7428
6	13 116,67	11 112,24	145,6283	6	11 923,03	11 121,93	132,4691
12	13 093,76	11 112,43	145,3760	12	11 898,20	11 122,12	132,1949
18	13 070,80	11 112,63	145,1232	18	11 873,32	11 122,32	131,9203
24	13 047,80	11 112,82	144,8699	24	11 848,41	11 122,51	131,6453
45° 30	13 024,77	11 113,02	144,6163	50° 30′	11 823,46	11 122,70	131,3699
36	13 001,69	11 113,21	144,3621	36	11 798,48	11 122,89	131,0941
42	12 978,57	11 113,41	144,1075	42	11 773,46	11 123,08	130,8178
48	12 955,42	11 113,60	143,8525	48	11 748,40	11 123,27	130,5412
54	12 932,22	11 113,80	143,5970	54	11 723,31	11 123,46	130,2641
46° 0′	12 908,98	11 113,99	143,3410	51° 0′	11 698,18	11 123,65	129,9866
6	12 885,71	11 114,19	143,0846	6	11 673,02	11 123,85	129,7087
12	12 862,39	11 114,38	142,8278	12	11 647,82	11 124,04	129,4304
18	12 839,04	11 114,57	142,5705	18	11 622,58	11 124,23	129,1517
24	12 815,65	11 114,77	142,3128	24	11 597,31	11 124,42	128,8726
46° 30′	12 792,21	11 114,96	142,0546	51° 30′	11 572,01	11 124,61	128,5931
36	12 768,74	11 115,16	141,7960	36	11 546,66	11 124,80	128,3131
42	12 745,23	11 115,35	141,5369	42	11 521,28	11 124,99	128,0328
48	12 721,68	11 115,55	141,2774	48	11 495,87	11 125,18	127,7521
54	12 698,09	11 115,74	141,0174	54	11 470,42	11 125,37	127,4709
47° 0′	12 674,46	11 115,94	140,7570	52° 0′	11 444,94	11 125,56	127,1894
6	12 650,79	11 116,13	140,4961	6	11 419,42	11 125,74	126,9074
12	12 627,09	11 116,32	140,2349	12	11 393,86	11 125,93	126,6250
18	12 603,34	11 116,52	139,9731	18	11 368,27	11 126,12	126,3423
24	12 579,56	11 116,71	139,7110	24	11 342,65	11 126,31	126,0591
47° 30	12 555,74	11 116,91	139,4484	52° 30′	11 316,99	11 126,50	125,7756
36	12 531,88	11 117,10	139,1853	36	11 291,29	11 126,69	125,4916
42	12 507,98	11 117,30	138,9218	42	11 165,56	11 126,88	125,2072
48	12 484,04	11 117,49	138,6579	48	11 239,80	11 127,07	124,9225
54	12 460,06	11 117,68	138,3936	54	11 214,00	11 127,25	124,6373
48° 0′	12 436,05	11 117,88	138,1288	53° 0′	11 188,17	11 127,44	124,3518
6	12 411,99	11 118,07	137,8636	6	11 162,30	11 127,63	124,0658
12	12 387,90	11 118,27	137,5979	12	11 136,40	11 127,82	123,7795
18	12 363,77	11 118,46	137,3319	18	11 110,46	11 128,00	123,4928
24	12 339,61	11 118,65	137,0653	24	11 084,49	11 128,19	123,2057
48° 30′	12 315,40	11 118,85	136,7983	53° 30	11 058,49	11 128,38	122,9183
36	12 291,16	11 119,04	136,5310	36	11 032,45	11 128,56	122,6303
42	12 266,88	11 119,23	136,2631	42	11 006,38	11 128,75	122,3420
48	12 242,56	11 119,43	135,9949	48	10 980,27	11 128,94	122,0533
54	12 218,21	11 119,62	135,7262	54	10 954,18	11 129,12	121,7642
49° 0′	12 193,81	11 119,81	135,4571	54° 0′	10 927,96	11 129,31	121,4748
6	12 169,38	11 120,01	135,1876	6	10 901,75	11 129,49	121,1849
12	12 144,92	11 120,20	134,9177	12	10 875,51	11 129,68	120,8947
18	12 120,41	11 120,39	134,6473	18	10 849,23	11 129,86	120,6041
24	12 095,87	11 120,59	134,3765	24	10 822,92	11 130,05	120,3121
49° 30′	12 071,29	11 120,78	134,1053	54° 30′	10 796,58	11 130,23	120,0218
36	12 046,67	11 120,97	133,8336	36	10 770,21	11 130,42	119,7300
42	12 022,02	11 121,16	133,5616	42	10 743,80	11 130,60	119,4378
48	11 997,33	11 121,36	133,2891	48	10 717,36	11 130,78	119,1454
54	11 972,60	11 121,55	133,0162	54	10 690,89	11 130,97	118,8524
50° 0′	11 947,84			55° 0′	10 664,38		

vgl. § 35.—37.

°	h	m	'	m	s	'	m	s	''	s	''	s
1	0	4	1	0	4	31	2	4	1	0,0667	31	2,0667
2	0	8	2	0	8	32	2	8	2	0,1333	32	2,1333
3	0	12	3	0	12	33	2	12	3	0,2000	33	2,2000
4	0	16	4	0	16	34	2	16	4	0,2667	34	2,2667
5	0	20	5	0	20	35	2	20	5	0,3333	35	2,3333
6	0	24	6	0	24	36	2	24	6	0,4000	36	2,4000
7	0	28	7	0	28	37	2	28	7	0,4667	37	2,4667
8	0	32	8	0	32	38	2	32	8	0,5333	38	2,5333
9	0	36	9	0	36	39	2	36	9	0,6000	39	2,6000
10	0	40	10	0	40	40	2	40	10	0,6667	40	2,6667
10	0	40	11	0	44	41	2	44	11	0,7333	41	2,7333
20	1	20	12	0	48	42	2	48	12	0,8000	42	2,8000
30	2	0	13	0	52	43	2	52	13	0,8667	43	2,8667
40	2	40	14	0	56	44	2	56	14	0,9333	44	2,9333
50	3	20	15	1	0	45	3	0	15	1,0000	45	3,0000
60	4	0	16	1	4	46	3	4	16	1,0667	46	3,0667
70	4	40	17	1	8	47	3	8	17	1,1333	47	3,1333
80	5	20	18	1	12	48	3	12	18	1,2000	48	3,2000
90	6	0	19	1	16	49	3	16	19	1,2667	49	3,2667
100	6	40	20	1	20	50	3	20	20	1,3333	50	3,3333
110	7	20	21	1	24	51	3	24	21	1,4000	51	3,4000
120	8	0	22	1	28	52	3	28	22	1,4667	52	3,4667
130	8	40	23	1	32	53	3	32	23	1,5333	53	3,5333
140	9	20	24	1	36	54	3	36	24	1,6000	54	3,6000
150	10	0	25	1	40	55	3	40	25	1,6667	55	3,6667
160	10	40	26	1	44	56	3	44	26	1,7333	56	3,7333
170	11	20	27	1	48	57	3	48	27	1,8000	57	3,8000
180	12	0	28	1	52	58	3	52	28	1,8667	58	3,8667
190	12	40	29	1	56	59	3	56	29	1,9333	59	3,9333
200	13	20	30	2	0	60	4	0	30	2,0000	60	4,0000

Verwandlung der Zeit in Bogen.

h	°	m / s	° ' / ' ''	m / s	° ' / ' ''	m / s	° ' / ' ''	m / s	° ' / ' ''	s	''
1	15	1	0 15	16	4 0	31	7 45	46	11 30	0,1	1,5
2	30	2	0 30	17	4 15	32	8 0	47	11 45	0,2	3,0
3	45	3	0 45	18	4 30	33	8 15	48	12 0	0,3	4,5
4	60	4	1 0	19	4 45	34	8 30	49	12 15	0,4	6,0
5	75	5	1 15	20	5 0	35	8 45	50	12 30	0,5	7,5
6	90	6	1 30	21	5 15	36	9 0	51	12 45	0,6	9,0
7	105	7	1 45	22	5 30	37	9 15	52	13 0	0,7	10,5
8	120	8	2 0	23	5 45	38	9 30	53	13 15	0,8	12,0
9	135	9	2 15	24	6 0	39	9 45	54	13 30	0,9	13,5
10	150	10	2 30	25	6 15	40	10 0	55	13 45	1,0	15,0
11	165	11	2 45	26	6 30	41	10 15	56	14 0		
12	180	12	3 0	27	6 45	42	10 30	57	14 15		
13	195	13	3 15	28	7 0	43	10 45	58	14 30		
14	210	14	3 30	29	7 15	44	11 0	59	14 45		
15	225	15	3 45	30	7 30	45	11 15	60	15 0		

vgl. § 36.

Additamente für $\log \sin \frac{s}{r}$

$$A = \log \frac{s}{r} - \log \sin \frac{s}{r} = \frac{\mu}{6\, r^2}\, s^2$$

I. *Additament A als Funktion von log s, für die Mittelbreite* $\varphi = 50^\circ$

$$\log \frac{\mu}{6\, r^2} = 2{\cdot}249846 - 10.$$

log s	.00	.01	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	Diff.
4.0	1·8	1·9	1·9	2·0	2·1	2·2	2·3	2·5	2·6	2·7	0·1
4.1	2·8	3·0	3·1	3·1	3·4	3·5	3·7	3·9	4·1	4·2	0·3
4.2	4·5	4·7	4·9	5·1	5·4	5·6	5·9	6·2	6·5	6·8	0.3
4.3	7·1	7·4	7·8	8·1	8·5	8·9	9·3	9·8	10·3	10·7	0.5
4.4	11·2	11·7	12·3	12·9	13·5	14·1	14·8	15·5	16·2	17·0	0·8
4.5	17·8	18·6	19·5	20·4	21·4	22·4	23·4	24·5	25·7	26·9	1·3
4.6	28·2	29·5	30·9	32·4	33·9	35·5	37·2	38·9	40·8	42·7	2·0
4.7	44·7	46·8	49·0	51·3	53·7	56·2	58·9	61·7	64·6	67·6	3·2
4.8	70·8	74·1	77·6	81·3	85·1	89·1	93·6	97·7	102·3	107·1	5·1
4.9	112·2	117·4	123·0	128·8	134·8	141·2	147·9	154·8	162·1	169·8	8·0
5.0	177·8	186·1	194·9	204·1	213·7	223·8	234·3	245·4	256·9	169·1	12·8

für *log s* < 4·0

log s	*A*
3.2	0·0
3.3	0·1
3.4	0·2
3.5	0·3
3.6	0·3
3.7	0·4
3.8	0·7
3.9	1·1

II. *Additament A als Funktion von* $\log \frac{s}{r}$

$\frac{s}{r}\varrho$	$\log \frac{s}{r}$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	Diff.
												+
3′ 26″	7.0	0·7	0·8	0·8	0·8	0·9	0·9	1·0	1·0	1·0	1·1	0·0
4 20	7.1	1·1	1·2	1·3	1.3	1·4	1·4	1·5	1·6	1·7	1·7	0·1
5 27	7.2	1·8	1·9	2·0	2.1	2·2	2.3	2·4	2.5	2·6	2·8	0·1
6 52	7.3	2·9	3·0	3·2	3.3	3·5	3·6	3·8	4·0	4·2	4·4	0·2
8 38	7.4	4·6	4·8	5·0	5.2	5·5	5·7	6·0	6·3	6·6	6·9	0·3
10′ 52″	7.5	7·2	7·6	7·5	8·3	8·7	9·1	9·5	10·0	10·5	11·0	0·5
13 41	7.6	11·5	12·0	12·6	13·2	13·8	14·4	15·1	15·8	16·6	17·4	0·8
17 14	7.7	18·2	19·0	19·9	20·9	21·9	22·9	24·0	25·1	26·3	27·5	1·3
21 41	7.8	28·8	30·2	31·6	33·1	34·6	36·3	38·0	39·8	41·7	43·6	2·1
27 18	7.9	45·7	47·8	50·1	52·4	54·9	57·5	60.2	63·0	66·0	69·1	3·3
		.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009	
34′ 23″	8.00	72·4	72·7	73.1	73·4	73·7	74·1	74·4	74·8	75·1	75·4	0·4
35 11	8.01	75·8	76·1	76·5	76·8	77·2	77·6	77·9	78·3	78·6	79·0	0·4
36 0	8.02	79·4	79·7	80·1	80·5	80·8	81·2	81·6	82·0	82·3	82·7	0·4
36 50	8.03	83·1	83·5	83·9	84·3	84·7	85·0	85·4	85·8	86·2	86·6	0·4
37 42	8.04	87·0	87·4	87·8	88·2	88·6	89·1	89·5	89·9	90·3	90·7	0·4
38′ 34″	8.05	91·1	91·5	92·0	92·4	92·8	93·2	93·7	94·1	94·5	95·0	0·4
39 28	8.06	95·4	95·9	96·3	96·7	97·2	97·6	98·1	98·5	99·0	99·4	0·5
40 23	8.07	99·9	100·4	100·8	101·3	101·8	102·2	102·7	103·2	103·7	104·1	0·5
41 20	8.08	104·6	105·1	105·6	106·1	106·6	107·1	107·6	108·1	108·5	109·0	0·5
42 17	8.09	109·5	110·0	110·6	111·1	111·6	112·1	112·6	113·1	113·7	114·2	0·5
43′ 17″	8.10	114.7	115·2	115·8	116·3	116·8	117·4	117·9	118·5	119·0	119·6	0·5
44 17	8.11	120·1	120·7	121·2	121·8	122·3	122·9	123·5	124·0	124·6	125·2	0·6
45 19	8.12	125·8	126·3	126·9	127·5	128·2	128·7	129·3	129·9	130·5	131·1	0·6
46 22	8.13	131·7	132·3	132·9	133·5	134·1	134·8	135·4	136·0	136·6	137·3	0·6
47 27	8.14	137·9	138·5	139·2	139·8	140·5	141·1	141·8	142·4	143·1	143·8	0·7
48′ 33″	8.15	144·4	145·1	145·7	146·4	147·1	147·8	148·5	149·1	149·8	150·5	0·7
49 41	8.16	151·2	151·9	152·6	153·3	154·0	154·8	155·4	156·2	156·9	157·6	0·7
50 51	8.17	158·3	159·1	159·8	160·5	161·3	162·0	162·8	163·5	164·3	165·0	0·8
52 2	8.18	165·8	166·6	167·3	168·1	168.9	169·7	170·4	171·2	172·0	172·8	0·8
53 14	8.19	173·6	174·4	175·2	176·0	176·8	177·7	178·5	179·3	180·1	181·0	0·8

vgl. § 42.

I. Abscissen-Korrektionen oder Ordinaten-Korrektionen von der Form

$$d = \frac{a^2 b}{2 r^2} \qquad \left(log \frac{1}{2 r^2} = 6.08918 \text{ für } \varphi = 50°\right).$$

a	b									
	10km	20km	30km	40km	50km	60km	70km	80km	90km	100km
10km	0,01m	0,02m	0,04m	0,05m	0,06m	0,07m	0,09m	0,10m	0,11m	0,12m
20	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,29	0,34	0,39	0,44	0,49
30	0,11	0,22	0,33	0,44	0,55	0,66	0,77	0,88	0,99	1,11
40	0,20	0,39	0,59	0,79	0,98	1,18	1,38	1,57	1,77	1,96
50	0,31	0,61	0,92	1,23	1,53	1,84	2,15	2,46	2,76	3,07
60km	0,44m	0,88m	1,33m	1,77m	2,21m	2,65m	3,09m	3,54m	3,98m	4,42m
70	0,60	1,20	1,81	2,41	3,01	3,61	4,21	4,81	5,42	6,02
80	0,79	1,57	2,36	3,14	3,93	4,72	5,50	6,29	7,09	7,86
90	0,99	1,99	2,98	3,98	4,97	5,97	6,96	7,96	8,95	9,95
100	1,23	2,46	3,68	4,91	6,14	7,37	8,60	9,82	11,05	12,28

II. Ordinaten-Konvergenz $\alpha' - \alpha = (x' - x) \frac{y' + y}{2} \frac{\varrho}{r^2}$ oder

$$\alpha' - \alpha = m n \frac{\varrho}{r^2} \qquad \left(log \frac{\varrho}{r^2} = 1.70464 \text{ für } \varphi = 50°\right).$$

m	n									
	10km	20km	30km	40km	50km	60km	70km	80km	90km	100km
10km	0,5″	1,0″	1,5″	2,0″	2,5″	3,0″	3,5″	4,1″	4,6″	5,1″
20	1,0	2,0	3,0	4,1	5,1	6,1	7,1	8,1	9,1	10,1
30	1,5	3,0	4,6	6,1	7,6	9,1	10,6	12,2	13,7	15,2
40	2,0	4,1	6,1	8,1	10,1	12,2	14,2	16,2	18,2	20,3
50	2,5	5,1	7,6	10,1	12,7	15,2	17,7	20,3	22,8	25,3
60km	3,0″	6,1″	9,1″	12,2″	15,2″	18,2″	21,3″	24,3″	27,4″	30,4″
70	3,5	7,1	10,6	14,2	17,7	21,3	24,8	28,4	31,9	35,5
80	4,1	8,1	12,2	16,2	20,3	24,3	28,4	32,4	36,5	40,5
90	4,6	9,1	13,7	18,2	22,8	27,4	31,9	36,5	41,0	45,6
100	5,1	10,1	15,2	20,3	25,3	30,4	35,5	40,5	45,6	50,7

III. Meridian-Konvergenz. Für die Ordinate y und die Breite φ ist die Meridian-Konvergenz genähert $\gamma = \frac{y}{N} \varrho \, tang \, \varphi = [2] \, y \, tang \, \varphi$ in Sekunden, wo N und [2] der Tafel von Seite [2] bis [23] entsprechen. Folgendes Täfelchen giebt γ in Minuten.

y	Geographische Breite φ										
	45°	46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°
10km	5,4′	5,6′	5,8′	6,0′	6,2′	6,4′	6,6′	6,9′	7,1′	7,4′	7,7′
20	10,8	11,1	11,5	12,0	12,4	12,8	13,3	13,8	14,3	14,8	15,4
30	16,1	16,7	17,3	17,9	18,6	19,2	19,9	20,7	21,4	22,2	23,0
40	21,5	22,3	23,1	23,9	24,8	25,6	26,6	27,5	28,6	29,6	30,7
50	26,9	27,9	28,9	29,9	30,9	32,1	33,2	34,4	35,7	37,0	38,4
60km	32,3′	33,4′	34,6′	35,9′	37,1′	38,5′	39,9′	41,3′	42,8′	44,4′	46,1′
70	37,7	39,0	40,4	41,8	43,3	44,9	46,5	48,2	50,0	51,8	53,8
80	43,1	44,6	46,2	47,8	49,5	51,3	53,1	55,1	57,1	59,2	61,4
90	48,4	50,1	51,9	53,8	55,7	57,7	59,8	62,0	64,2	66,6	69,1
100	53,8	55,7	57,7	59,8	61,9	64,1	66,4	68,9	71,4	74,0	76,8

vgl. § 46. S. 263.

I. Konforme Projektion der Preussischen Landesaufnahme.

Ordinatenvergrösserung $Y - y = \frac{y^3}{6\,A^2}$, $log\,\frac{1}{6\,A^2} = 5.611\,7939$

für y = sphärische Ordinate, Y = ebene Ordinate der konformen Projektion.

y oder Y	0^{km}	1^{km}	2^{km}	3^{km}	4^{km}	5^{km}	6^{km}	7^{km}	8^{km}	9^{km}	d
0^{km}	$0{,}000^m$	$0{,}000^m$	$0{,}000^m$	$0{,}000^m$	$0{,}000^m$	$0{,}001^m$	$0{,}001^m$	$0{,}001^m$	$0{,}002^m$	$0{,}003^m$	$0{,}1^{cm}$
10	0,004	0,005	0,007	0,009	0,011	0,014	0,017	0,020	0,024	0,028	0,5
20	0,033	0,038	0,044	0,050	0,057	0,064	0,072	0,081	0,090	0,100	1,0
30	0,110	0,121	0,134	0,147	0,161	0,175	0,191	0,207	0,225	0,243	1,9
40	0,262	0,282	0,303	0,325	0,349	0,373	0,398	0,425	0,453	0,480	3
50^{km}	$0{,}51^m$	$0{,}54^m$	$0{,}58^m$	$0{,}61^m$	$0{,}64^m$	$0{,}68^m$	$0{,}72^m$	$0{,}78^m$	$0{,}80^m$	$0{,}84^m$	4^{cm}
60	0,88	0,93	0,98	1,02	1,07	1,12	1,15	1,26	1,29	1,34	6
70	1,40	1,46	1,53	1,59	1,66	1,73	1,80	1,87	1,99	2,02	7
80	2,09	2,17	2,26	2,34	2,42	2,51	2,60	2,69	2,79	2,88	10
90	2,98	3,08	3,19	3,29	3,40	3,51	3,62	3,73	3,85	3,97	12
100^{km}	$4{,}09^m$	$4{,}21^m$	$4{,}34^m$	$4{,}47^m$	$4{,}60^m$	$4{,}74^m$	$4{,}87^m$	$5{,}01^m$	$5{,}15^m$	$5{,}30^m$	14^{cm}
110	5,44	5,59	5,75	5,90	6,06	6,22	6,39	6,55	6,72	6,89	18
120	7,07	7,25	7,43	7,61	7,80	7,99	8,18	8,38	8,58	8,78	21
130	8 99	9,20	9,41	9,62	9,84	10,06	10,29	10,52	10,75	10,99	23
140	11,22	11,47	11,71	11,96	12,21	12,47	12,74	12,99	12,26	13,53	28
150	13,81										

Für grössere Werte gilt:

$$Y = y + \frac{y^3}{6\,A^2} + \frac{y^5}{24\,A^4} \quad \text{oder} \quad y = Y - \frac{y^3}{6\,A^2} + \frac{y^5}{24\,A^4}\,, \quad log\,\frac{1}{24\,A^4} = 1.39968$$

$y =$	$200\,000^m$	$300\,000^m$	$400\,000^m$	$500\,000^m$	$600{,}000^m$
$Y =$	$200\,032{,}73^m$	$300\,110{,}11^m$	$400\,262{,}06^m$	$500\,512{,}12^m$	$600\,885{,}54^m$

II. Reduktion einer Streckenmessung auf ihren Wert im trigonometrischen Netze wegen Höhe h über dem Meere und wegen Projektionsverzerrung.

$$\delta = \left(-\frac{h}{r} + \frac{y^2}{2\,r^2}\right) 1\,000\,000 \text{ d. h. } \delta \text{ in Millimetern für 1 Kilometer,}$$

für die Mittelbreite $\varphi = 50°$, $log\,r = 6.804\,8936$.

h	y										
	0^{km}	10^{km}	20^{km}	30^{km}	40^{km}	50^{km}	60^{km}	70^{km}	80^{km}	90^{km}	100^{km}
m	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0	± 0,0	+ 1,2	+ 4,9	+ 11,1	+ 19,6	+ 30,7	+ 44,2	+ 60,2	+ 78,6	+ 99,5	+ 122,8
50	− 7,8	− 6,6	− 2,9	+ 3,2	+ 11,8	+ 22,9	+ 36,4	+ 52,2	+ 70,8	+ 91,6	+ 115,0
100	− 15,7	− 14,4	− 10,8	− 4,6	+ 4,0	+ 15,0	+ 28,5	+ 44,5	+ 62,9	+ 83,8	+ 107,1
200	− 31,3	− 30,1	− 26,4	− 20,3	− 11,7	− 0,6	+ 12,9	+ 28,8	+ 47,2	+ 68,1	+ 91,5
300	− 47,0	− 45,8	− 42,1	− 36,0	− 27,4	− 16,3	− 2,8	+ 13,2	+ 31,6	+ 52,4	+ 75,8
400	− 62,7	− 61,4	− 57,8	− 51,6	− 43,0	− 32,0	− 18,5	− 2,5	+ 15,9	+ 36,8	+ 60,1
500	− 78,4	− 77,1	− 73,4	− 67,3	− 58,7	− 47,7	− 34,2	− 18,2	+ 0,2	+ 21,1	+ 44,4
600	− 94,0	− 92,8	− 89,1	− 83,0	− 74,4	− 63,3	− 49,8	− 33,9	− 15,4	+ 5,4	+ 28,8
700	− 109,7	− 108,5	− 104,8	− 98,6	− 90,0	− 79,0	− 65,5	− 49,5	− 31,1	− 10,2	+ 13,1
800	− 125,4	− 124,1	− 120,5	− 114,3	− 105,7	− 94,7	− 81,2	− 65,2	− 46,8	− 25,9	− 2,6
900	− 141,0	− 139,8	− 136,1	− 130,0	− 121,4	− 110,3	− 96,8	− 80,9	− 62,4	− 41,6	− 18,2
1000	− 156,7	− 155,5	− 151,8	− 145,7	− 137,1	− 126,0	− 112,5	− 96,5	− 78,1	− 57,2	− 33,9
1200	− 188	− 187	− 183	− 177	− 168	− 157	− 144	− 128	− 109	− 89	− 65
1400	− 219	− 218	− 214	− 208	− 200	− 189	− 175	− 159	− 141	− 120	− 97
1500	− 235	− 234	− 230	− 224	− 215	− 204	− 191	− 175	− 156	− 136	− 112
1600	− 251	− 250	− 246	− 240	− 231	− 220	− 207	− 191	− 172	− 151	− 128
1800	− 282	− 281	− 277	− 271	− 262	− 251	− 238	− 222	− 203	− 183	− 159
2000	− 313	− 312	− 309	− 302	− 294	− 283	− 269	− 253	− 235	− 214	− 191

vgl. § 50. S. 286 und § 52. S. 295.

Vergrösserungsverhältnis m der Preussischen Landesaufnahme.

$$\log m = \frac{\mu}{2\,A^2}\,y^2 \qquad \log A = 6.805\,0274 \qquad \log \frac{\mu}{2\,A^2} = 2.726\,700$$

y	0000m	1000m	2000m	3000m	4000m	5000m	6000m	7000m	8000m	9000m	d
0m	0·0	0·1	0·2	0·5	0·9	1·3	1·9	2·6	3·4	4·3	1·0
10 000	5·3	6·5	7·7	9·0	10·0	12·0	13·6	15·4	17·3	19·2	2·1
20 000	21·3	23·7	25·8	28·2	30·7	33·3	36·0	38·9	41·8	44·8	3·2
30 000	48·0	51·2	54·6	58·0	61·6	65·3	69·1	73·0	77·0	81·1	4·2
40 000	85·3	89·6	94·0	98·5	103·2	107·9	112·8	117·7	122·8	128·0	5·2
50 000	133·2	138·6	144·1	149·7	155·4	161·2	167·1	173·2	179·3	185·5	6·4
60 000	191·9	198·3	204·9	211·5	218·3	225·2	232·2	239·2	246·4	253·7	7·5
70 000	261·2	268·7	276·3	284·0	291·9	299·8	307·8	316·6	324·3	332·6	8·5
80 000	341·1	349·7	358·4	367·2	376·1	385·1	394·2	403·4	412·7	422·2	9·5
90 000	431·7	441·3	451·0	461·0	470·9	481·0	491·2	501·5	511·9	522·4	10·6
100 000	533·0										

y	0m	100m	200m	300m	400m	500m	600m	700m	800m	900m	d
230km	2819·4	2821·9	2824·3	2826·8	2829·2	2831·7	2834·2	2836·6	2839·1	2841·5	2·5
231	2844·0	2846·5	2848·9	2851·4	2853·8	2856·3	2858·8	2861·2	2863·7	2866·1	2·5
232	2868·6	2871·1	2873·6	2876·0	2878·5	2881·0	2883·5	2886·0	2888·4	2890·9	2·5
233	2893·4	2895·9	2898·4	2900·9	2903·4	2905·8	2908·3	2910·8	2913·3	2915·8	2·5
234	2918·3	2920·8	2923·3	2925·8	2928·3	2930·8	2933·3	2935·8	2938·3	2940·8	2·5
235	2943·3	2945·8	2948·3	2950·8	2953·3	2955·8	2958·4	2960·9	2963·4	2965·9	2·5
236	2968·4	2970·9	2973·4	2976·0	2978·5	2981·0	2983·5	2986·0	2988·6	2991·1	2·5
237	2993·6	2996·1	2998·7	3001·2	3003·7	3006·2	3008·8	3011.3	3013·8	3016·4	2·5
238	3018·9	3021·4	3024·0	3026·6	3029·1	3031·6	3034·2	3036	3039·3	3041·8	2·6
239	3044·4	3047·0	3049·5	3052·0	3054·6	3057·2	3059·7	306	3064·8	[illegible]067·4	2·5
240	3069·9	3072·5	3075·0	3077·6	3080·1	3082·7	3085·3	3087·8	3090·4	3092·9	2·6
241	3095·5	3098·1	3100·7	3103·2	3105.8	3108·4	3111·0	3113·6	3116·1	3118·7	2·6
242	3121·3	3123·9	3126·5	3129·0	3131·6	3134·2	3136·8	3139·4	3141·9	3144·5	2·6
243	3147·1	3149·7	3152·3	3154·9	3157·5	3160·1	3162·7	3165·3	3167·9	3170·5	2·6
244	3173·1	3175·7	3178·3	3180·9	3183·5	3186·1	3188·7	3191·3	3193·9	3196·5	2·6
245	3199·1	3201·7	3204·3	3207·0	3209·6	3212·1	3214·8	3217·4	3220·1	3222·7	2·6
246	3225·3	3227·9	3230·6	3233·2	3235·8	3238·4	3241·1	3243·7	3246·3	3248·9	2·7
247	3251·6	3254·2	3256·8	3259·5	3262·1	3264·8	3267·4	3270·0	3272·7	3275·3	2·7
248	3278·0	3280·6	3283·3	3285·9	3288·6	3291·2	3293·8	3296·5	3299·1	3301·8	2·6
249	3304·4	3307·1	3309·8	3312·4	3315·1	3317·7	3320·4	3323·1	3325·7	3328·4	2·6
250	3331·0	3333·7	3336·4	3339·0	3341·7	3344·4	3347·1	3349·7	3352·4	3355·1	2·6
251	3357·7	3360·4	3363·1	3365·8	3368·5	3371·2	3373·9	3376·6	3379·3	3382·0	2·6
252	3384·6	3387·3	3390·0	3392·7	3395·4	3398·1	3400·8	3403·5	3406·2	3408·8	2·7
253	3411·5	3414·2	3416·9	3419·6	3422·3	3425·0	3427·7	3430·4	3433·1	3435·8	2·7
254	3438·5	3441·2	3444·0	3446·7	3449·4	3452·1	3454.8	3457·5	3460·2	3462·9	2·7

Die vorstehenden Werte *log m* sind *nur* mit y^2 berechnet; für grössere Ordinaten y ist genauer bis zur 4ten Ordnung:

$$\log m = \frac{\mu}{2\,A^2}\,y^2 - \frac{\mu}{12\,A^4}\,y^4 = [2.7266995]\,y^2 - [8.38849]\,y^4$$

Zur allgemeinen Übersicht dienen folgende 5stellige *log m*.

y	0km	10km	20km	30km	40km	50km	60km	70km	80km	90km	d
0km	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00001	0.00002	0.00003	0.00003	0.00004	1
100	5	6	8	9	10	12	14	15	17	19	2
200	21	24	26	28	31	33	36	39	42	45	3
300	48	51	55	58	62	65	69	73	77	81	4
400	85	90	94	99	103	108	113	118	123	128	5
500	133	139	144	150	155	161	167	173	179	186	6
600	192	198	205	212	218	225	232	239	246	254	7

westliche Grenze 540km östliche Grenze 622km

vgl. § 50. S. 286 und § 85.



φ = Geographische Breite, $t^2 = tang^2\,\varphi$, $e'^2 \cos^2\varphi = \eta^2$, $e'^2 \sin^2\varphi = \eta^2 t^2$.

φ	t^2	Diff.	t^4	Diff.	η^2	Diff.	$\eta^2 t^2$	Diff.	η^4	Diff.
		+		+		—		+		+
0°	0,0000	3	0,0000		0,0[illegible]672	0	0,00000	0	0,0000451	0
1	0003	9	0000		672	1	000	1	451	1
2	0012	15	0000		671	1	001	1	450	1
3	0027	22	0000		670	1	002	1	449	2
4	0049	28	0000		669	2	003	2	447	2
5°	0,0077	33	0,0001	0	0,00667	2	0,00005	2	0,0000445	3
6	0110	41	0001	1	665	3	007	3	442	4
7	0151	47	0002	2	662	3	010	3	438	4
8	0198	53	0004	2	659	4	013	3	434	4
9	0251	60	0006	4	655	3	016	4	430	5
10°	0,0311	67	0,0010	4	0,00652	5	0,00020	5	0,0000425	6
11	0378	74	0014	6	647	4	025	4	419	6
12	0452	81	0020	8	643	5	029	5	413	6
13	0533	89	0028	11	638	5	034	5	407	7
14	0622	96	0039	13	633	6	039	6	400	7
15°	0,0718	104	0,0052	16	0,00627	6	0,00045	6	0,0000393	8
16	0822	113	0068	20	621	7	051	6	385	7
17	0935	121	0088	23	614	6	057	7	378	9
18	1056	130	0111	30	608	7	064	7	369	8
19	1186	13[illegible]	0141	34	601	8	071	8	361	9
20°	0,1325	149	0,0175	42	0,00593	7	0,00079	7	0,0000352	9
21	1474	158	0217	49	586	8	086	8	343	9
22	1632	170	0266	59	578	9	094	9	334	10
23	1802	180	0325	68	569	8	103	8	324	10
24	1982	192	0393	80	561	9	111	9	314	9
25°	0,2174	205	0,0473	93	0,00552	9	0,00120	9	0,0000305	10
26	2379	217	0566	108	543	10	129	9	295	10
27	2596	231	0674	125	533	9	138	10	285	11
28	2827	246	0799	145	524	10	148	10	274	10
29	3073	260	0944	167	514	10	158	10	264	10
30°	0,3333	277	0,1111	192	0,00504	10	0,00168	10	0,0000254	10
31	3610	295	1303	222	494	11	178	11	244	10
32	3905	312	1525	254	483	10	189	10	234	11
33	4217	333	1779	291	473	11	199	11	223	10
34	4550	353	2070	334	462	11	210	11	213	10
35°	0,4903	376	0,2404	382	0,00451	11	0,00221	11	0,0000203	10
36	5279	399	2786	439	440	11	232	11	193	9
37	5678	426	3225	501	429	12	243	12	184	10
38	6104	454	3726	574	417	11	255	11	174	9
39	6558	483	4300	657	406	12	266	12	165	10
40°	0,7041	516	0,4957	753	0,00394	11	0,00278	11	0,0000155	9
41	7557	550	5710	863	383	12	289	12	146	8
42	8107	589	6573	989	371	12	301	12	138	9
43	8696	630	7562	1135	359	11	313	11	129	8
44	9326	674	8697	1303	348	12	324	12	121	8
45	1,0000		1,0000		0,00336		0,00336		0,0000113	

vgl. § 55. § 64. § 75.

φ = geographische Breite, $t^2 = tang^2\,\varphi$, $e'^2 \cos^2\varphi = \eta^2$, $e'^2 \sin^2\varphi = \eta^2 t^2$.

φ	t^2	Diff.	t^4	Diff.	η^2	Diff.	$\eta^2 t^2$	Diff.	η^4	Diff.
		+		+		−		+		−
45°	1,000	0,002	1,000	0,150	0,00336	12	0,00336	12	0,0000113	8
46	1,072	0,078	1,150	0,172	324	11	348	11	105	7
47	1,150	0,083	1,322	0,199	313	12	359	12	098	7
48	1,233	0,090	1,521	0,240	301	12	371	12	091	7
49	1,323	0,097	1,751	0,266	289	11	383	11	084	7
50°	1,420	0,105	2,017	0,309	0,00278	12	0,00394	12	0,0000077	6
51	1,525	0,113	2,326	0,358	266	11	406	11	071	6
52	1,638	0,123	2,684	0,417	255	12	417	12	065	6
53	1,761	0,133	3,101	0,487	243	11	429	11	059	5
54	1,894	0,146	3,588	0,572	232	12	440	11	054	5
55°	2,040	0,158	4,160	0,671	0,00221	11	0,00451	11	0,0000049	5
56	2,198	0,173	4,831	0,792	210	11	462	11	044	4
57	2,371	0,190	5,623	0,936	199	10	473	10	040	4
58	2,561	0,209	6,559	1,113	189	11	483	11	036	4
59	2,770	0,23	7,672	1,33	178	10	494	10	032	4
60°	3,00	0,25	9,00	1,59	0,00168	10	0,00504	10	0,0000028	3
61	3,25	0,29	10,59	1,92	158	10	514	10	025	3
62	3,54	0,31	12,51	2,33	148	10	524	9	022	3
63	3,85	0,35	14,84	2,83	138	9	533	10	019	2
64	4,20	0,40	17,67	3,48	129	9	543	9	017	3
65°	4,60	0,44	21,15	4,30	0,00120	9	0,00552	9	0,0000014	2
66	5,04	0,51	25.45	5,35	111	8	561	8	012	1
67	5,55	0,58	30,80	6,73	103	9	569	9	011	2
68	6,13	0,66	37,53	8,53	094	8	578	8	009	2
69	6,79	0,76	46,06	10,9	086	7	586	7	007	1
70°	7,55	0,88	57,0	14,1	0,00079	8	0,00593	8	0,0000006	1
71	8,43	1,04	71,1	18,6	071	7	601	7	005	1
72	9,47	1,23	89,7	24,8	064	7	608	6	004	1
73	10,70	1,46	114,5	33,4	057	6	614	7	003	0
74	12,16	1,77	147,9	46	051	6	621	6	003	1
75°	13,93	2,16	194	65	0,00045	6	0,00627	6	0,0000002	0
76	16,09	2,67	259	103	039	5	633	5	002	1
77	18,76	3,37	352	138	034	5	638	5	001	0
78	22,13	4,34	490	210	029	4	643	4	001	0
79	26.47	5,69	700	334	025	5	647	5	001	1
80°	32,16	7,70	1034	555	0,00020	4	0,00652	3	0,000000	
81	39,88	10,77	1589	974	016	3	655	4		
82	50,68	15,70	2563	1837	013	3	659	3		
83	66,33	24,19	4400	3794	010	3	662	3		
84	90,52		8194		007	2	665	2		
85°	131		17068		0,00005	2	0,00667	2		
86	205		41824		003	1	669	1		
87	364		132561		002	1	670	1		
88	820		672458		001	1	671	1		
89	3282		∞		000	0	672	0		
90°	∞				0,00000		0,00672			

vgl. § 55. § 64. § 75.

φ = geographische Breite, $t^2 = tang^2\,\varphi$.

φ	$log\,(1+2\,t^2)$	Diff.	$log\,(1+3\,t^2)$	Diff.	$log\,(2+t^2)$	Diff.	$log\,(2+3\,t^2)$	Diff.	$log\,(5+6\,t^2)$	Diff.
0°	0.0000	+3	0.0000	+4	0.3010	+1	0.3010	+2	0.6990	+1
1	0003	8	0004	12	3011	2	3012	6	6991	5
2	0011	13	0016	20	3013	3	3018	10	6996	8
3	0024	18	0036	27	3016	5	3028	14	7004	11
4	0042	24	0063	36	3021	6	3042	18	7015	14
5°	0.0066	29	0.0099	43	0.3027	7	0.3060	22	0.7029	18
6	0095	34	0142	50	3034	9	3082	25	7047	21
7	0129	39	0192	58	3043	10	3107	30	7068	23
8	0168	45	0250	65	3053	11	3137	34	7091	28
9	0213	49	0315	72	3064	13	3171	37	7119	30
10°	0.0262	54	0.0387	79	0.3077	15	0.3208	42	0.7149	33
11	0316	60	0466	86	3092	15	3250	45	7182	37
12	0376	64	0552	92	3107	18	3295	49	7219	40
13	0440	69	0644	99	3125	18	3344	53	7259	43
14	0509	74	0743	104	3143	20	3397	58	7302	47
15°	0.0583	78	0.0847	110	0.3163	22	0.3455	60	0.7349	49
16	0661	83	0957	117	3185	24	3515	65	7398	53
17	0744	88	1074	121	3209	25	3580	69	7451	57
18	0832	92	1195	127	3234	26	3649	72	7508	59
19	0924	97	1322	131	3260	29	3721	76	7567	63
20°	0.1021	101	0.1453	137	0.3289	30	0.3797	81	0.7630	67
21	1122	105	1590	141	3319	32	3878	83	7697	70
22	1227	110	1731	146	3351	34	3961	88	7767	73
23	1337	113	1877	150	3385	36	4049	92	7840	76
24	1450	118	2027	154	3421	38	4141	95	7916	81
25°	0.1568	122	0.2181	158	0.3459	39	0.4236	100	0.7997	83
26	1690	126	2339	162	3498	42	4336	103	8080	87
27	1816	130	2501	166	3540	45	4439	107	8167	91
28	1946	135	2667	170	3585	46	4546	110	8258	95
29	2081	137	2837	173	3631	49	4656	115	8353	98
30°	0.2218	142	0.3010	177	0.3680	51	0.4771	119	0.8451	102
31	2360	146	3187	180	3731	54	4890	122	8553	106
32	2506	151	3367	184	3785	56	5012	127	8659	109
33	2657	154	3551	187	3841	59	5139	131	8768	114
34	2810	158	3738	191	3900	63	5270	134	8882	117
35°	0.2968	162	0.3929	193	0.3963	65	0.5404	139	0.8999	122
36	3130	165	4122	197	4028	68	5543	143	9121	125
37	3295	170	4319	201	4096	71	5686	147	9246	130
38	3465	174	4520	204	4167	75	5833	152	9376	135
39	3639	178	4724	207	4242	78	5985	156	9511	138
40°	0.3817	182	0.4931	210	0.4320	82	0.6141	160	0.9649	144
41	3999	186	5141	215	4402	86	6301	165	9793	148
42	4185	191	5356	218	4488	90	6466	170	9941	152
43	4376	195	5574	221	4578	94	6636	174	1.0093	158
44	4571	200	5795	226	4672	99	6810	180	0251	163
45°	0.4771		0.6021		0.4771		0.6990		1.0414	

vgl. § 55. § 64. § 75.

φ = geographische Breite, $t^2 = tang^2\, \varphi$.

φ	$log\,(1+2\,t^2)$	Diff.	$log\,(1+3\,t^2)$	Diff.	$log\,(2+t^2)$	Diff.	$log\,(2+3\,t^2)$	Diff.	$log\,(5+6\,t^2)$	Diff
		+		+		+		+		+
45°	0.4771	205	0.6021	229	0.4771	104	0.6990	184	1.0414	168
46	4976	209	6250	234	4875	108	7174	190	0582	173
47	5185	214	6484	237	4983	114	7364	195	0755	179
48	5399	220	6721	243	5097	119	7559	201	0934	185
49	5619	225	6964	247	5216	125	7760	206	1119	191
50°	0.5844	230	0.7211	251	0.5341	131	0.7966	213	1.1310	198
51	6074	237	7462	257	5472	137	8179	211	1508	203
52	6311	242	7719	263	5609	144	8398	225	1711	211
53	6553	249	7982	268	5752	151	8623	233	1922	218
54	6802	256	8250	274	5904	159	8856	239	2140	225
55°	0.7058	263	0.8524	281	0.6063	167	0.9095	247	1.2365	233
56	7321	270	8805	287	6230	176	9342	255	2598	241
57	7591	278	9092	295	6406	185	9597	263	2839	250
58	7869	287	9387	302	6591	194	9860	272	3089	259
59	8156	295	9689	311	6785	205	1.0132	282	3348	269
60°	0.8451	305	1.0000	320	0.6990	215	1.0414	291	1.3617	280
61	8756	315	0320	329	7205	228	0705	303	3897	290
62	9071	326	0649	339	7433	240	1008	313	4187	301
63	9397	338	0988	351	7673	254	1321	326	4489	314
64	9735	350	1339	363	7927	268	1647	339	4803	328
65°	1.0085	364	1.1702	375	0.8195	284	1.1986	353	1.5131	343
66	0449	379	2077	390	8479	300	2339	368	5474	358
67	0828	395	2467	406	8779	320	2707	385	5832	375
69	1223	410	2873	423	9099	339	3092	404	6207	394
69	1635	433	3296	442	9438	361	3495	422	6601	414
70°	1.2068	453	1.3738	462	0.9799	386	1.3917	445	1.7015	436
71	2521	477	4200	486	1.0185	411	4362	469	7451	461
72	2998	504	4686	512	0596	442	4831	496	7912	488
73	3502	533	5198	541	1038	473	5327	525	8400	519
74	1.4035	57	1.5739	57	1.1511	51	1.5852	56	1.8919	55
75°	1.460	61	1.631	61	1.202	55	1.641	60	1.947	60
76	1.521	65	1.692	66	1.257	60	1.701	65	2.007	63
77	1.586	70	1.758	71	1.317	66	1.766	69	2.070	69
78	1.656	76	1.829	76	1.383	71	1.835	77	2.139	75
79	1.732	83	1.905	84	1.454	80	1.911	82	2.214	83
80°	1.815	92	1.989	92	1.534	88	1.993	92	2.297	91
81	1.907	103	2.081	103	1.622	99	2.085	102	2.388	102
82	2.010	116	2.184	117	1.721	114	2.187	116	2.490	115
83	2.126	134	2.301	134	1.835	131	2.303	134	2.605	134
84	2.260	159	2.435	159	1.966	157	2.437	158	2.739	158
85°	2.419	194	2.594	195	2.123	192	2.595	194	2.897	194
86	2.613	250	2.789	250	2.315	249	2.789	250	3.091	249
87	3.863	352	3.039	352	2.564	351	3.039	352	3.340	352
88	3.215	602	3.391	602	2.915	601	3.391	602	3.692	602
89	3.817		3.993		3.516		3.993		4.294	
90°	∞		∞		∞		∞		∞	

vgl. § 55. § 64. § 75.

φ	$t^2 = tang^2\,\varphi$	+	$log\,(1+2\,t^2)$	+	$log\,(1+3\,t^2)$	+	$log\,(2+t^2)$	+	$log\,(2+3\,t^2)$	+	$log\,(5+6\,t^2)$	+
46° 0′	1.0723	126	0.4976	34	0.6250	39	0.4875	17	0.7174	32	1.0582	29
10	1.0849	127	5010	35	6289	38	4892	18	7206	31	0611	28
20	1.0976	129	5045	35	6327	39	4910	18	7237	31	0639	29
30	1105	130	5080	35	6366	39	4928	18	7268	32	0668	29
40	1235	131	5115	35	6405	39	4946	19	7300	32	0697	29
50	1366	134	5150	35	6444	40	4965	18	7332	32	0726	29
47° 0′	1.1500	135	0.5185	36	0.6484	39	0.4983	19	0.7364	32	0.0755	30
10	1635	136	5221	35	6523	39	5002	18	7396	32	0785	29
20	1771	139	5256	36	6562	40	5020	19	7428	33	0814	30
30	1910	140	5292	36	6602	40	5039	19	7461	33	0844	30
40	2050	141	5328	36	6642	40	5058	19	7494	32	0874	30
50	2191	144	5364	35	6682	39	5077	20	7526	33	0904	30
48° 0′	1.2335	145	0.5399	37	0.6721	41	0.5097	19	0.7559	33	1.0934	31
10	2480	147	5436	36	6762	40	5116	20	7592	33	0965	31
20	2627	149	5472	37	6802	40	5136	20	7625	34	0996	30
30	2776	150	5509	36	6842	40	5156	19	7659	33	1026	31
40	2926	153	5545	37	6882	41	5175	21	7692	34	1057	31
50	3079	154	5582	37	6923	41	5196	20	7726	34	1088	31
49° 0′	1.3233	157	0.5619	37	0.6964	41	0.5216	20	0.7760	34	1.1119	32
10	3390	158	5656	37	7005	41	5236	21	7794	34	1151	31
20	3548	161	5693	38	7046	40	5257	20	7828	34	1182	32
30	3709	162	5731	37	7086	42	5277	21	7862	35	1214	32
40	3871	165	5768	38	7128	41	5298	21	7897	35	1246	32
50	4036	167	5806	38	7169	42	5319	22	7932	34	1278	32
50° 0′	1.4203	169	0.5844	38	0.7211	41	0.5341	21	0.7966	35	1.1310	33
10	4372	171	5882	38	7252	42	5362	22	8001	35	1343	33
20	4543	173	5920	39	7294	42	5384	21	8036	36	1376	32
30	4716	176	5959	38	7336	42	5405	22	8072	36	1408	33
40	·4892	177	5997	39	7378	42	5427	22	8108	35	1441	33
50	5069	181	6036	38	7420	42	5449	23	8143	36	1474	34
51° 0′	1.5250	182	0.6074	40	0.7462	43	0.5472	22	0.8179	36	1.1508	33
10	5432	185	6114	39	7505	43	5494	23	8215	36	1541	34
20	5617	188	6153	39	7548	42	5517	22	8251	37	1575	34
30	5805	190	6192	40	7590	43	5539	23	8288	36	1609	34
40	5995	192	6232	39	7633	43	5562	24	8324	37	1643	34
50	6187	196	6271	40	7676	43	5586	23	8361	37	1677	34
52° 0′	1.6383	197	0.6311	40	0.7719	44	0.5609	23	0.8398	37	1.1711	35
10	6580	201	6351	40	7763	43	5632	24	8435	37	1746	35
20	6781	203	6391	40	7806	44	5656	24	8472	38	1781	35
30	6984	206	6431	41	7850	44	5680	24	8510	37	1816	35
40	7190	209	6472	41	7894	44	5704	25	8547	38	1851	35
50	7399	211	6513	40	7938	44	5729	24	8585	38	1886	36
53° 0′	1.7610	215	0.6553	42	0.7982	44	0.5753	25	0.8623	39	1.1922	36
10	7825	218	6595	41	8026	45	5778	25	8662	38	1958	36
20	8043	220	6636	41	8071	44	5803	25	8700	38	1994	36
30	8263	224	6677	42	8115	45	5828	25	8738	39	2030	36
40	8487	227	6719	42	8160	45	5853	26	8777	39	2066	37
50	8714	230	6761	41	8205	45	5879	25	8816	40	2103	37
54° 0′	1.8944		0.6802		0.8250		0.5904		0.8856		1.2140	

vgl. § 55. § 64. § 75.

φ	log [4]	Diff. −	log [5]	Diff. +	log [6]	Diff. −	log [7]	Diff. −	log [8]	Diff. −
0°	4·62581	0	4·93266	20	2·930$_n$	0	4·93266	0	5·10777	0
1	62581	2	93286	59	930$_n$	1	93266	0	10777	0
2	62579	4	93345	98	929$_n$	1	93266	1	10777	0
3	62575	5	93443	137	928$_n$	2	93265	0	10777	1
4	62570	6	93580	176	926$_n$	2	93265	1	10776	0
5	62564	8	93756	216	924$_n$	3	93264	1	10776	1
6°	4·62556	9	4·93972	255	2·921$_n$	4	4·93263	1	5·10775	1
7	62547	10	94227	293	917$_n$	4	93262	1	10774	0
8	62537	12	94520	333	913$_n$	5	93261	2	10774	2
9	62525	14	94853	371	908$_n$	5	93259	2	10772	1
10	62511	14	95224	411	903$_n$	5	93257	2	10771	1
11	62497	16	95635	449	898$_n$	6	93255	1	10770	1
12°	4·62481	17	4·96084	487	2·892$_n$	7	4·93254	3	5·10769	1
13	62464	19	96571	527	885$_n$	8	93251	2	10768	2
14	62445	19	97098	563	877$_n$	8	93249	2	10766	2
15	62426	21	97661	605	869$_n$	9	93247	3	10764	1
16	62405	22	98266	641	860$_n$	10	93244	3	10763	2
17	62383	24	98907	680	850$_n$	10	93241	3	10761	2
18°	4·62359	24	4·99587	718	2·840$_n$	11	4·93238	3	5·10759	2
19	62335	26	5·00305	756	829$_n$	12	93235	3	10757	3
20	62309	27	01061	795	817$_n$	13	93232	3	10754	2
21	62282	28	01856	832	804$_n$	14	93229	4	10752	2
22	62254	29	02688	871	790$_n$	15	93225	3	10750	2
23	62225	30	03559	909	775$_n$	16	93222	4	10748	2
24°	4·62195	31	5·04468	947	2·759$_n$	17	4·93218	4	5·10746	3
25	62164	31	05415	986	742$_n$	18	93214	4	10743	3
26	62133	34	06401	1024	724$_n$	20	93210	4	10740	2
27	62099	33	07425	1063	704$_n$	21	93206	4	10738	3
28	62066	35	08488	1102	683$_n$	23	93202	4	10735	3
29	62031	35	09590	1140	660$_n$	25	93198	4	10732	3
30°	4·61996	36	5·10730	1180	2·635$_n$	26	4·93194	5	5·10729	3
31	61960	37	11910	1219	609$_n$	29	93189	4	10726	3
32	61923	38	13129	1260	580$_n$	32	93185	5	10723	3
33	61885	38	14389	1299	548$_n$	35	93180	5	10720	3
34	61847	39	15688	1341	513$_n$	38	93175	4	10717	3
35	61808	39	17029	1382	475$_n$	43	93171	5	10714	3
36°	4·61769	40	5·18411	1423	2·432$_n$	48	4·93166	5	5·10711	3
37	61729	40	19834	1466	384$_n$	55	93161	5	10708	4
38	61689	41	21300	1510	329$_n$	63	93156	5	10704	3
39	61648	41	22810	1554	266$_n$	75	93151	5	10701	3
40	61607	42	24364	1598	191$_n$	91	93146	5	10698	3
41	61565	41	25962	1645	100$_n$		93141	5	10695	4
42°	4·61524	42	5·27607	1691	1·984$_n$		4·93136	5	5·10691	3
43	61482	42	29298	1740	1·824$_n$		93131	5	10688	3
44	61440	42	31038	1790	1·568$_n$		93126	5	10685	4
45	61398	42	32828	1840	0·855$_n$		93121	5	10681	3
46	61356	43	34668	1893	1·356		93116	5	10678	3
47	61313	42	36561	1947	1·720		93111	5	10675	4
48°	4·61271		5·38508		1·915		4·93106		5·10671	

log [3] = 4·62872 konstant.

vgl. § 77.

φ	log [4]	Diff.	log [5]	Diff.	log [6]	Diff.	log [7]	Diff.	log [8]	Diff.
		—		+		+		—		—
48°	4·61271	42	5·38508	2004	1·915	134	4·93106	5	5·10671	3
49	61229	42	40512	2062	2.049	102	93101	5	10668	4
50	61187	42	42574	2122	151	82	93096	5	10664	3
51	61145	41	44696	2186	233	68	93091	5	10661	3
52	61104	41	46882	2251	301	59	93086	5	10658	3
53	61063	41	49133	2320	360	51	93081	5	10655	4
54°	4·61022	41	5·51453	2392	2·411	47	4·93076	5	5·10651	3
55	60981	40	53845	2468	458	39	93071	5	10648	3
56	60941	39	56313	2547	497	37	93066	4	10645	3
57	60902	39	58860	2631	534	33	93062	5	10642	3
58	60863	38	61491	2720	567	31	93057	4	10639	3
59	60825	38	64211	2814	598	28	93053	5	10636	3
60°	4·60787	37	5·67025	2914	2.626	26	4·93048	5	5·10633	3
61	60750	36	69939	3020	652	24	93043	3	10630	3
62	60714	36	72959	3134	676	22	93040	5	10627	3
63	60678	34	76093	3256	698	20	93035	4	10624	2
64	60644	33	79349	3387	718	19	93031	4	10622	3
65	60611	33	82736	3528	737	18	93027	3	10619	2
66°	4·60578	32	5·86264	3681	2·755	17	4·93024	4	5·10617	3
67	60546	31	89945	3848	772	15	93020	4	10614	2
68	60515	29	93793	4029	787	15	93016	3	10612	2
69	60486	30	97822	4228	802	13	93013	4	10610	3
70	60456		6·02050		815		93009		10607	

Besondere Tafel von 43° bis 55°.

φ	log [4]	Diff.	log [5]	Diff.	log [6]	Diff.	log [7]	Diff.	log [8]	Diff.
		—		+		—		—		—
43° 0'	4.61482	7	5.29298	286	1.824n	33	4.93131	1	5.10688	1
10	61475	7	29584	288	1.791n	37	93130	1	10687	0
20	61468	7	29872	290	1.754n	39	93129	0	10687	1
30	61461	7	30162	290	1.715n	44	93129	1	10686	0
40	61454	7	30452	292	1.671n	49	93128	1	10686	1
50	61447	7	30744	294	1.622n	54	93127	1	10685	0
44° 0'	4.61440	7	5.31038	295	1.568n	63	4.93126	1	5.10685	1
10	61433	7	31333	296	1.505n	73	93125	1	10684	1
20	61426	7	31629	298	1.432n	88	93124	1	10683	0
30	61419	7	31927	298	1.344n	108	93123	0	10683	1
40	61412	7	32225	301	1.236n	152	93123	1	10682	1
50	61405	7	32526	302	1.084n	229	93122	1	10682	1
45° 0'	4.61398	7	5.32828	302	0.855n	516	4.93121	1	5.10681	0
10	61391	7	33130	304	0.339n		93120	1	10681	1
						+				
20	61384	7	33434	307	0.442	447	93119	1	10680	0
30	61377	7	33741	307	0.889	215	93118	0	10680	1
40	61370	7	34048	309	1.104	144	93118	1	10679	1
50	61363	7	34357	311	1.248	108	93117	1	10678	0
46° 0'	4.61356	8	5.34668	312	1.356	85	4.93116	1	5.10678	1
10	61348	7	34980	314	1.441	72	93115	1	10677	0
20	61341	7	35294	315	1.513	62	93114	1	10677	1
30	61334	7	35609	315	1.575	52	93113	1	10676	0
40	61327	7	35924	318	1.627	49	93112	0	10676	1
50	61320	7	36242	319	1.676	44	93112	1	10675	0
47° 0'	4.61313		5.36561		1.720		4.93111		5.10675	

vgl. § 77.

φ	*log* [4]	−	*log* [5]	+	*log* [6]	−	*log* [7]	−	*log* [8]	−
47° 0′	4.61313		5.36561		1.720		4.93111		5.10675	
10	61306	7	36882	321	1.759	39	93110	1	10674	1
20	61299	7	37204	322	1.795	36	93109	1	10673	1
30	61292	7	37528	324	1.829	34	93108	1	10673	0
40	61285	7	37853	325	1.859	30	93107	1	10672	1
50	61278	7	38180	327	1.888	29	93107	0	10672	0
48° 0′	4.61271	7	5.38508	328	1.915	27	4.93106	1	5.10671	1
10	61264	7	38838	330	1.941	26	93105	1	10670	1
20	61257	7	39170	332	1.965	24	93104	1	10670	0
30	61250	7	39503	333	1.987	22	93103	1	10669	1
40	61243	7	39838	335	2.009	22	93102	1	10669	0
50	61236	7	40174	336	2.029	20	93102	0	10668	1
49° 0′	4.61229	7	5.40512	338	2.049	20	4.93101	1	5.10668	0
10	61222	7	40852	340	2.068	19	93100	1	10667	1
20	61215	7	41193	341	2.086	18	93099	1	10667	0
30	61208	7	41536	343	2.103	17	93098	1	10666	1
40	61201	7	41880	344	2.120	17	93097	1	10666	0
50	61194	7	42226	346	2.136	16	93097	0	10665	1
50° 0′	4.61187	7	5.42574	348	2.151	15	4.93096	1	5.10664	1
10	61180	7	42923	349	2.166	15	93095	1	10664	0
20	61173	7	43275	352	2.180	14	93094	1	10663	1
30	61166	7	43627	352	2.194	14	93093	1	10663	0
40	61159	7	43982	355	2.207	13	93092	1	10662	1
50	61152	7	44338	356	2.220	13	93092	0	10662	0
51° 0′	4.61145	7	5.44696	358	2.233	13	4.93091	1	5.10661	1
10	61138	7	45056	360	2.245	12	93090	1	10661	0
20	61132	6	45417	361	257	12	93089	1	10660	1
30	61125	7	45780	363	268	11	93088	1	10660	0
40	61118	7	46145	365	280	12	93087	1	10659	1
50	61111	7	46512	367	291	11	93087	0	10658	1
52° 0′	4.61104	7	5.46882	370	2.301	10	4.93086	1	5.10658	0
10	61097	7	47253	371	312	11	93085	1	10657	1
20	61090	7	47625	372	322	10	93084	1	10657	0
30	61083	7	47999	374	332	10	93083	1	10656	1
40	61076	7	48375	376	341	9	93082	1	10656	0
50	61070	6	48753	378	351	10	93082	0	10655	1
53° 0′	4.61063	7	5.49133	380	2.360	9	4.93081	1	5.10655	0
10	61056	7	49515	382	369	9	93080	1	10654	1
20	61049	7	49899	384	378	9	93079	1	10654	0
30	61042	7	50285	386	387	9	93078	1	10653	1
40	61035	7	50673	388	395	8	93078	0	10652	1
50	61029	6	51063	390	403	8	93077	1	10652	0
54° 0′	4.61022	7	5.51453	390	2.411	8	4.93076	1	5.10651	1
10	61015	7	51847	394	419	8	93075	1	10651	0
20	61009	6	52243	396	427	8	93074	1	10650	1
30	61002	7	52641	397	435	8	93074	0	10650	0
40	60995	7	53041	400	442	7	93073	1	10649	1
50	60989	6	53443	402	450	8	93072	1	10649	0
55° 0′	4.60981	7	5.53845	402	2.458	8	4.93071	1	5.10648	1

vgl. § 77.

$\varphi = 45°$			$\varphi = 46°$			$\varphi = 47°$		
φ	B	m	φ	B	m	φ	B	m
	m	m		m	m		m	m
0'	4 984 439,266	1851,994	0'	5 095 568,459	1852,318	0'	5 206 717,124	1852,643
1	986 291,260	1851,999	1	097 420,777	1852,323	1	208 569,767	1852,648
2	988 143,259	1852,004	2	099 273,100	1852,329	2	210 422,415	1852,653
3	989 995,263	1852,010	3	101 125,429	1852,335	3	212 275,068	1852,659
4	991 847,273	1852,015	4	102 977,764	1852,340	4	214 127,727	1852,664
5'	4 993 699,288	1852,021	5'	5 104 830,104	1852,345	5'	5 215 980,391	1852,670
6	995 551,309	1852,026	6	106 682,449	1852,351	6	217 833,061	1852,675
7	997 403,335	1852,031	7	108 534,800	1852,356	7	219 685,736	1852,680
8	999 255,366	1852,037	8	110 387,156	1852,361	8	221 538,416	1852,686
9	5 001 107,403	1852,042	9	112 239,517	1852,367	9	223 391,102	1852,691
10'	5 002 959,445	1852,048	10'	5 114 091,884	1852,372	10'	5 225 243,793	1852,697
11	004 811,493	1852,053	11	115 944,256	1852,378	11	227 096,490	1852,702
12	006 663,546	1852,059	12	117 796,634	1852,383	12	228 949,192	1852,707
13	008 515,605	1852,064	13	119 649,017	1852,389	13	230 801,899	1852,713
14	010 367,669	1852,069	14	121 501,406	1852,394	14	232 654,612	1852,718
15'	5 012 219,738	1852,075	15'	5 123 353,800	1852,399	15'	5 234 507,330	1852,724
16	014 071,813	1852,080	16	125 206,199	1852,405	16	236 360,054	1852,729
17	015 923,893	1852,085	17	127 058,604	1852,410	17	238 212,783	1852,734
18	017 775,978	1852,091	18	128 911,014	1852,416	18	240 065,517	1852,740
19	019 628,069	1852,097	19	130 763,430	1852,421	19	241 918,257	1852,745
20'	5 021 480,166	1852,102	20'	5 132 615,851	1852,426	20'	5 243 771,002	1852,751
21	023 332,268	1852,107	21	134 468,277	1852,432	21	245 623,753	1852,756
22	025 184,375	1852,112	22	136 320,709	1852,437	22	247 476,509	1852,761
23	027 036,487	1852,118	23	138 173,146	1852,443	23	249 329,270	1852,767
24	028 888,605	1852,124	24	140 025,589	1852,448	24	251 182,037	1851,772
25'	5 030 740,729	1852,129	25'	5 141 878 037	1852,453	25'	5 253 034,809	1852,778
26	032 592,858	1852,134	26	143 730,490	1852,459	26	254 887,587	1852,783
27	034 444,992	1852,140	27	145 582,949	1852,464	27	256 740,370	1852,788
28	036 297,132	1852,145	28	147 435,413	1852,470	28	258 593,158	1852,794
29	038 149,277	1852,150	29	149 287,883	1852,475	29	260 445,952	1852,799
30'	5 040 001,427	1852,156	30'	5 151 140,358	1852,481	30'	5 262 298,751	1852,804
31	041 853,583	1852,161	31	152 992,839	1852,486	31	264 151,555	1852,810
32	043 705,744	1852,167	32	154 845,325	1852,491	32	266 004,365	1852,815
33	045 557,911	1852,172	33	156 697,816	1852,497	33	267 857,180	1852,821
34	047 410,083	1852,178	34	158 550,313	1852,502	34	269 710,001	1852,826
35'	5 049 262,261	1852,183	35'	5 160 402,815	1852,507	35'	5 271 562,827	1852,832
36	051 114,444	1852,188	36	162 255,322	1852,513	36	273 415,659	1852,837
37	052 966,632	1852,194	37	164 107,835	1852,518	37	275 268,496	1852,842
38	054 818,826	1852,199	38	165 960,353	1852,524	38	277 121,338	1852,848
39	056 671,025	1852,205	39	167 812,877	1852,529	39	278 974,186	1852,853
40'	5 058 523,230	1852,210	40'	5 169 665,406	1852,535	40'	5 280 827,039	1852,858
41	060 375,440	1852,215	41	171 517,941	1852,540	41	282 679,897	1852,864
42	062 227,655	1852,221	42	173 370,481	1852,545	42	284 532,761	1852,870
43	064 079,876	1852,226	43	175 223,026	1852,551	43	286 385,631	1852,874
44	065 932,102	1852,232	44	177 075,577	1852,556	44	288 238,505	1852,880
45'	5 067 784,334	1852,237	45'	5 178 928,133	1852,562	45'	5 290 091,385	1852,886
46	069 636,571	1852,243	46	180 780,695	1852,567	46	291 944,271	1852,891
47	071 488,814	1852,248	47	182 633,262	1852,572	47	293 797,162	1852,896
48	073 341,062	1852,253	48	184 485,834	1852,578	48	295 650,058	1852,902
49	075 193,315	1852,259	49	186 338,412	1852,583	49	297 502,960	1852,907
50'	5 077 045,574	1852,264	50'	5 188 190,995	1852,589	50'	5 299 355,867	1852,912
51	078 897,838	1852,269	51	190 043,584	1852,594	51	301 208,779	1852,918
52	080 750,107	1852,275	52	191 896,178	1852,599	52	303 061,697	1852,923
53	082 602,382	1852,280	53	193 748,777	1852,605	53	304 914,620	1852,928
54	084 454,662	1852,286	54	195 601,382	1852,610	54	306 767,548	1852,934
55'	5 086 306,948	1852,291	55'	5 197 453,992	1852,616	55'	5 308 620,482	1852,940
56	088 159,239	1852,297	56	199 306,608	1852,621	56	310 473,422	1852,945
57	090 011,536	1852,302	57	201 159,229	1852,626	57	312 326,367	1852,950
58	091 863,838	1852,308	58	203 011,855	1852,632	58	314 179,317	1852,955
59	093 716,146	1852,313	59	204 864,487	1852,637	59	316 032,272	1852,961
60'	5 095 568,459		60'	5 206 717,124		60'	5 317 885,233	

vgl. § 91.

φ	B ($\varphi = 48°$)	m	φ	B ($\varphi = 49°$)	m	φ	B ($\varphi = 50°$)	m
	m	m		m	m		m	m
0'	5 317 885,233	1852,966	0'	5 429 072,732	1853,289	0'	5 540 279,543	1853,609
1	319 738,199	1852,972	1	430 926,021	1853,294	1	542 133,152	1853,615
2	321 591,171	1852,977	2	432 779,315	1853,299	2	543 986,767	1853,621
3	323 444,148	1852,982	3	434 632,614	1853,305	3	545 840,388	1853,626
4	325 297,130	1852,988	4	436 485,919	1853,310	4	547 694,014	1853,631
5'	5 327 150,118	1852,993	5'	5 438 339,229	1853,316	5'	5 549 547,645	1853,636
6	329 003,111	1852,999	6	440 192,545	1853,321	6	551 401,281	1853,642
7	330 856,110	1853,004	7	442 045,866	1853,326	7	553 254,923	1853,648
8	332 709,114	1853,009	8	443 899,192	1853,332	8	555 108,571	1853,653
9	334 562,123	1853,015	9	445 752,524	1853,337	9	556 962,224	1853,658
10'	5 336 415,138	1853,020	10'	5 447 605,861	1853,343	10'	5 558 815,882	1853,663
11	338 268,158	1853,026	11	449 459,204	1853,348	11	560 669,545	1853,668
12	340 121,184	1853,031	12	451 312,552	1853,353	12	562 523,213	1853,674
13	341 974,215	1853,036	13	453 165,905	1853,359	13	564 376,887	1853,679
14	343 827,251	1853,041	14	455 019,264	1853,364	14	566 230,566	1853,685
15'	5 345 680,292	1853,047	15'	5 456 872,628	1853,369	15'	5 568 084,251	1853,690
16	347 533,339	1853,052	16	458 725,997	1853,375	16	569 937,941	1853,695
17	349 386,391	1853,058	17	460 579,372	1853,380	17	571 791,636	1853,701
18	351 239,449	1853,063	18	462 432,752	1853,385	18	573 645,337	1853,706
19	353 092,512	1853,069	19	464 286,137	1853,391	19	575 499,043	1853,711
20'	5 354 945,581	1853,074	20'	5 466 139,528	1853,396	20'	5 577 352,754	1853,717
21	356 798,655	1853,080	21	467 992,924	1853,401	21	579 206,471	1853,722
22	358 651,735	1853,085	22	469 846,325	1853,407	22	581 060,193	1853,727
23	360 504,820	1853,090	23	471 699,732	1853,412	23	582 913,920	1853,732
24	362 357,910	1853,095	24	473 553,144	1853,417	24	584 767,652	1853,738
25'	5 364 211,005	1853,101	25'	5 475 406,561	1853,423	25'	5 586 621,390	1853,743
26	366 064,106	1853,106	26	477 259,984	1853,428	26	588 475,133	1853,749
27	367 917,212	1853,112	27	479 113,412	1853,434	27	590 328,882	1853,754
28	369 770,324	1853,117	28	480 966,846	1853,439	28	592 182,636	1853,759
29	371 623,441	1853,122	29	482 820,285	1853,444	29	594 036,395	1853,765
30'	5 373 476,563	1853,128	30'	5 484 673,729	1853,450	30'	5 595 890,160	1853,770
31	375 329,691	1853,133	31	486 527,179	1853,455	31	597 743,930	1853,775
32	377 182,824	1853,138	32	488 380,634	1853,460	32	599 597,705	1853,780
33	379 035,962	1853,144	33	490 234,094	1853,466	33	601 451,485	1853,785
34	380 889,106	1853,149	34	492 087,560	1853,471	34	603 305,270	1853,791
35'	5 382 742,255	1853,155	35'	5 493 941,031	1853,476	35'	5 605 159,061	1853,796
36	384 595,410	1853,160	36	495 794,507	1853,482	36	607 012,857	1853,802
37	386 448,570	1853,165	37	497 647,989	1853,487	37	608 866,659	1853,807
38	388 301,735	1853,171	38	499 501,476	1853,492	38	610 720,466	1853,813
39	390 154,906	1853,176	39	501 354,968	1853,497	39	612 574,279	1853,818
40'	5 392 008,082	1853,181	40'	5 503 208,465	1853,503	40'	5 614 428,097	1853,822
41	393 861,263	1853,187	41	505 061,968	1853,509	41	616 281,919	1853,828
42	395 714,450	1853,192	42	506 915,477	1853,514	42	618 135,747	1853,834
43	397 567,642	1853,198	43	508 768,991	1853,519	43	619 989,581	1853,839
44	399 420,840	1853,203	44	510 622,510	1853,525	44	621 843,420	1853,844
45'	5 401 274,043	1853,209	45'	5 512 476,035	1853,530	45'	5 623 697,264	1853,850
46	403 127,252	1853,214	46	514 329,565	1853,535	46	625 551,114	1853,855
47	404 980,466	1853,219	47	516 183,100	1853,540	47	627 404,969	1853,860
48	406 833,685	1853,224	48	518 036,640	1853,546	48	629 258,829	1853,865
49	408 686,909	1853,229	49	519 890,186	1853,551	49	631 112,694	1853,871
50'	5 410 540,138	1853,235	50'	5 521 743,737	1853,556	50'	5 632 966,565	1853,876
51	412 393,373	1853,241	51	523 597,293	1853,562	51	634 820,441	1853,881
52	414 246,614	1853,246	52	525 450,855	1853,567	52	636 674,322	1853,887
53	416 099,860	1853,252	53	527 304,422	1853,573	53	638 528,209	1853,892
54	417 953,112	1853,257	54	529 157,995	1853,578	54	640 382,101	1853,897
55'	5 419 806,369	1853,262	55'	5 531 011,573	1853,583	55'	5 642 235,998	1853,903
56	421 659,631	1853,267	56	532 865,156	1853,588	56	644 089,901	1853,908
57	423 512,898	1853,273	57	534 718,744	1853,594	57	645 943,809	1853,913
58	425 366,171	1853,278	58	536 572,338	1853,600	58	647 797,722	
59	427 219,449	1853,283	59	538 425,938	1853,605	59	649 651,641	1853,924
60'	5 429 072,732		60'	5 540 279,543		60'	5 651 505,565	

vgl. § 91.

$\varphi = 51°$			$\varphi = 52°$			$\varphi = 53°$		
φ	B	m	φ	B	m	φ	B	m
	m	m		m	m		m	m
0'	5 651 505,565	1853,929	0'	5 762 750,675	1854 246	0'	5 874 014,723	1854,560
1	653 359 494	1853,934	1	764 604,921	1854,251	1	875 869 283	1854,566
2	655 213,428	1853,940	2	766 459,172	1854,257	2	877 723 849	1584,571
3	657 067,368	1853,945	3	768 313,429	1854,261	3	879 578,420	1854,576
4	658 921,313	1853,950	4	770 167,690	1854,267	4	881 432,996	1854,581
5'	5 660 775,263	1853,956	5'	5 772 021,957	1854,272	5'	5 883 287,577	1854 586
6	662 629,219	1853,961	6	773 876,229	1854,278	6	885 142,163	1854,592
7	664 483,180	1853,966	7	775 730,507	1854,283	7	886 996,755	1854,597
8	666 337,146	1853,972	8	777 584,790	1854,288	8	888 851,352	1854,602
9	668 191,118	1853,977	9	779 439,078	1854,293	9	890 705,954	1854,607
10'	5 670 045,095	1853,982	10'	5 781 293,371	1854,299	10'	5 892 560,561	1854,612
11	671 899,077	1853,988	11	783 147,670	1854,304	11	894 415,173	1854,618
12	673 753,065	1853,993	12	785 001,974	1854,309	12	896 269,791	1854,623
13	675 607,058	1853,998	13	786 856,283	1853,315	13	898 124,414	1854,628
14	677 461,056	1854,003	14	788 710,598	1854,319	14	899 979,042	1854,633
15'	5 679 315,059	1854,009	15'	5 790 564,917	1854,325	15'	5 901 833,675	1854,638
16	681 169,068	1854,014	16	792 419,242	1854,330	16	903 688,313	1854,644
17	683 023,082	1854,019	17	794 273,572	1854,335	17	905 542,957	1854,649
18	684 877,101	1854,024	18	796 127,907	1854,341	18	907 397,606	1854,654
19	686 731,125	1854,029	19	797 982,248	1854,346	19	909 252,260	1854,659
20'	5 688 585,154	1854,035	20'	5 799 836,594	1854,351	20'	5 911 106,919	1854,664
21	690 439,189	1854,041	21	801 690,945	1854,356	21	912 961,583	1854,670
22	692 293,230	1854,046	22	803 545,301	1854,362	22	914 816,253	1854,675
23	694 147,276	1854,051	23	805 399,663	1854,367	23	916 670,928	1854,680
24	696 001,327	1854,056	24	807 254,030	1854,372	24	918 525,608	1854,685
25'	5 697 855,383	1854,061	25'	5 809 108,402	1854,377	25'	5 920 380,293	1854,691
26	699 709,444	1854,067	26	810 962,779	1854,383	26	922 234,984	1854,695
27	701 563,511	1854,072	27	812 817,162	1854,388	27	924 089,679	1854,701
28	703 417,583	1854,077	28	814 671,550	1854,398	28	925 944,380	1854,706
29	705 271,660	1854,083	29	816 525,943	1854,404	29	927 799,086	1854,711
30'	5 707 125,743	1843 088	30'	5 818 380,341	1854,409	30'	5 929 653,797	1854,716
31	708 979,831	1843,093	31	820 234,745	1854,414	31	931 508,513	1854,722
32	710 833,924	1843,098	32	822 089,154	1854,419	32	933 363,235	1854,727
33	712 688,022	1854,104	33	823 943,568	1854,425	33	935 217,962	1854,732
34	714 542,126	1854,109	34	825 797,987	1854,429	34	937 072,694	1854,737
35'	5 716 396,235	1854,114	35'	5 827 652,412		35'	5 938 927,431	1854,742
36	718 250,349	1854,120	36	829 506,841	1854,435	36	940 782,173	1854,747
37	720 104,469	1854,125	37	831 361,276	1854,441	37	942 636,920	1854,753
38	721 958,594	1854,130	38	833 215,717	1854,445	38	944 491,673	1854,758
39	723 812,724	1854,135	39	835 070,162	1854,451	39	946 346,431	1854,763
40'	5 725 666,859	1854,141	40'	5 836 924,613	1854,456	40'	5 948 201,194	1854,768
41	727 521,000	1854,146	41	838 779,069	1854,461	41	950 055,962	1854,773
42	729 375,146	1854,151	42	840 633,530	1854,466	42	951 910,735	1854,779
43	731 229,297	1854,157	43	842 487,996	1854,472	43	953 765,514	1854,783
44	733 083,454	1854,162	44	844 342,468	1854,476	44	955 620,297	1854,789
45'	5 734 937,616	1854,167	45'	5 846 196,944	1854,482	45'	5 957 475,086	1854,794
46	736 791,783	1854,172	46	848 051,426	1854,488	46	959 329,880	1854,800
47	738 645,955	1854,177	47	849 905,914	1854,492	47	961 184,680	1854,804
48	740 500,132	1854,183	48	851 760,406	1854,498	48	963 039 484	1854,810
49	742 354,315	1854,188	49	853 614,904	1854,502	49	964 894,294	1854,814
50'	5 744 208,503	1854,194	50'	5 855 469,406	1854,509	50'	5 966 749,108	1854,820
51	746 062,697	1854,199	51	857 323,915	1854,513	51	968 603,928	1854,825
52	747 916,896	1854,204	52	859 178,428	1854,519	52	970 458,753	1854,830
53	749 771,100	1854,209	53	861 032,947	1854,524	53	972 313,583	1854,835
54	751 625,309	1854,214	54	862 887,471	1854,529	54	974 168,418	1854,841
55'	5 753 479,523	1854,220	55'	5 864 742,000	1854,534	55'	5 976 023,259	1854,846
56	755 333,743	1854,225	56	866 596,534	1854,539	56	977 878,105	1854,851
57	757 187,968	1854,230	57	868 451,073	1854,545	57	979 732,956	1854,856
58	759 042,198	1854,236	58	870 305,618	1854,550	58	981 587,812	1854,861
59	760 896,434	1854,241	59	872 160,168	1854,555	59	983 442,673	1854,867
60'	5 762 750,675		60'	5 874 014,723		60'	5 985 297,540	

vgl. § 91.

$$tang\ \psi = \sqrt{1-e^2}\ tang\ \varphi, \qquad \varphi - \psi = 345{,}32538\ sin\ (\varphi + \psi)$$
$$[2.538\ 2285]$$

φ	$\varphi - \psi$	Diff.	φ	$\varphi - \psi$	Diff.	φ	$\varphi - \psi$	Diff.
0°	0′ 0,0″	+ 12,0″	45° 0′	5′ 45,33″	— 0,01″	53° 0′	5′ 32,10″	— 0,56″
1	0 12,0	12,0	10	45,32	0,01	10	31,50	0,56
2	0 24,0	12,0	20	45,31	0,03	20	30,98	0,58
3	0 36,0	12,0	30	45,28	0,04	30	30,40	0,59
4	0 48,0	12,0	40	45,24	0,04	40	29,81	0,60
5	1 0,0	11,7	50	45,20	0,07	50	29,21	0,62
6°	1′ 11,7″	11,7″	46° 0′	5′ 45,13	0,07″	54° 0′	5′ 28,59″	0,62″
7	1 23,4	11,6	10	45,06	0,08	10	27,97	0,63
8	35,0	11,5	20	44,98	0,10	20	27,34	0,65
9	46,5	11,4	30	44,88	0,11	30	26,69	0,66
10	57,9	11,3	40	44,77	0,12	40	26,03	0,67
11	2 9,2	11,0	50	44,65	0,13	50	25,36	0,67
12°	2′ 20,2″	11,0″	47° 0′	5′ 44,52″	0,14″	55° 0′	5′ 24,69″	4,3″
13	31,2	10,7	10	44,38	0,15	56	20,4	4,7
14	41,9	10,5	20	44,23	0,17	57	15,7	5,1
15	52,4	10,3	30	44,06	0,18	58	10,6	5,5
16	3 2,7	10,1	40	43,88	0,19	59	5,1	5,8
17	12,8	9,9	50	43,69	0,20	60	4′ 59,3	6,2
18°	3′ 22,7″	9,6″	48° 0′	5′ 43,49″	0,21″	61°	4′ 53,1″	6,5″
19	32,3	9,4	10	43,28	0,22	62	46,6	7,0
20	41,7	9,1	20	43,06	0,24	63	39,6	7,2
21	50,8	8,8	30	42,82	0,25	64	32,4	7,6
22	59,6	8,5	40	42,57	0,26	65	24,8	7,9
23	4 8,1	8,2	50	42,31	0,27	66	16,9	8,2
24°	4′ 16,3″	7,9″	49° 0′	5′ 42,04″	0,28″	67°	4′ 8,7″	8,5″
25	24,2	7,6	10	41,76	0,29	68	0,2	8,8
26	31,8	7,3	20	41,47	0,31	69	3′ 51,4	9,1
27	39,1	6,9	30	41,16	0,31	70	42,3	9,4
28	46,0	6,6	40	40,85	0,33	71	32,9	9,6
29	52,6	6,2	50	40,52	0,34	72	23,3	9,9
30°	4′ 58,8″	5,9″	50° 0′	5′ 40,18	0,35″	73°	3′ 13,4″	10,1″
31	5 4,7	5,4	10	39,83	0,37	74	3,3	10,4
32	10,1	5,2	20	39,46	0,37	75	2′ 52,9	10,5
33	15,3	4,7	30	39,09	0,39	76	42,4	10,8
34	20,0	4,3	40	38,70	0,39	77	31,6	10,9
35	24,3	4,0	50	38,31	0,41	78	20,7	11,1
36°	5′ 28,3″	3,5″	51° 0′	5′ 37,90″	0,42″	79°	2′ 9,6″	11,3″
37	31,8	3,1	10	37,48	0,44	80	1′ 58,3	11,4
38	34,9	2,8	20	37,04	0,44	81	46,9	11,6
39	37,7	2,3	30	36,60	0,45	82	35,3	11,6
40	40,0	1,9	40	36,15	0,47	83	23,7	11,8
41	41,9	1,5	50	35,68	0,48	84	11,9	11,8
42°	5′ 43,4″	1,0″	52° 0′	5′ 35,20″	0,49″	85°	1′ 0,1″	12,0″
43	44,4	0,7	10	34,71	0,50	86	0′ 48,1	11,9
44	45,1	+0,2	20	34,21	0,51	87	36,2	12,1
45	45,3	—0,2	30	33,70	0,52	88	24,1	12,0
46	45,1	0,6	40	33,18	0,53	89	12,1	12,1
47	5 44,5		50	32,65		90	0′ 0,0	

vgl. § 103.

Sphäroidische Länge $= l$ (Ellipsoid)

Sphärische Länge $= \lambda$ (Kugel.

$$\lambda = \alpha l \qquad l = \frac{1}{\alpha}\lambda$$

$\alpha = 1{,}000\,452\,918$ $\qquad \frac{1}{\alpha} = 0{,}999\,547\,287 = 1 - 0{,}000\,452\,713$

$\lambda - l = +\,0{,}000\,452\,918\,l$ $\qquad l - \lambda = -\,0{,}000\,452\,713\,\lambda$

$log\,\alpha = 0.000\,1966{\cdot}553$ $\qquad log\,\frac{1}{\alpha} = 9.999\,8033{\cdot}447$

Ellipsoid l	$\lambda - l$	Kugel λ	$l - \lambda$
1″	+ 0,000 453″	1″	— 0,000 453″
2″	0,000 906″	2″	0,000 905″
3″	0,001 359″	3″	0,001 358″
4″	0,001 812″	4″	0,001 811″
5″	0,002 265″	5″	0,002 264″
6″	+ 0,002 718″	6″	— 0,002 716″
7″	0,003 170″	7″	0,003 169″
8″	0,003 623″	8″	0,003 622″
9″	0,004 076″	9″	0,004 074″
10″	0,004 529″	10″	0,004 527″
20″	+ 0,009 058″	20″	— 0,009 054″
30″	0,013 588″	30″	0,013 581″
40″	0,018 117″	40″	0,018 109″
50″	0,022 646″	50″	0,022 636″
60″	0,027 175″	60″	0,027 163″
1′	+ 0,027 175″	1′	— 0,027 163″
2′	0,054 350″	2′	0,054 326″
3′	0,081 525″	3′	0,081 488″
4′	0,108 700″	4′	0,108 651″
5′	0,135 875″	5′	0,135 814″
6′	+ 0,163 050″	6′	— 0,162 977″
7′	0,190 226″	7′	0,190 139″
8′	0,217 401″	8′	0,217 302″
9′	0,244 576″	9′	0,244 465″
10′	0,271 751″	10′	0,271 628″
20′	+ 0,543 502″	20′	— 0,543 256″
30′	0,815 252″	30′	0,814 883″
40′	1,087 003″	40′	1,086 511″
50′	1,358 754″	50′	1,358 139″
60′	1,630 505″	60′	1,629 767″
1°	+ 1,630 505″	1°	— 1,629 767″
2°	3,261 010″	2°	3,259 534″
3°	4,891 514″	3°	4,889 300″
4°	6,522 019″	4°	6,519 067″
5°	8,152 524″	5°	8,148 834″
6°	+ 9,783 029″	6°	— 9,778 601″
7°	11,413 534″	7°	11,408 368″
8°	13,044 038″	8°	13,038 134″
9°	14,674 543″	9°	14,667 901″
10°	16,305 048″	10°	16,297 668″

vgl. § 100.

Kugel u	Ellipsoid φ	Differenzen		$\log m$	Diff.	k	Diff.
		+	—	+	—		—
46° 0'	46° 1' 19,1599"			14·46		8,79"	
		10' 1,4235"			1·06		0,42"
46 10	46 11 20,5834		0,0175	13·40		8,37	
		10 1,4060			1·00		0,42
46 20	46 21 21,9894		0,0175	12·40		7,95	
		10 1,3885			0·94		0,41
46 30	46 30 24,3779		0,0174	11·46		7,54	
		10 1,3711			0·90		0,40
46 40	46 41 24,74900		0,0175	10·559		7,141	
		10 1,35362			0·850		0,387
46 50	46 51 26,10262		0,01746	9·709		6,754	
		10 1,33616			0·805		0,376
			0,01746				
47° 0'	47° 1' 27,43878"			8·904		6,378"	
		10' 1,31870"			0·758		0,366"
47 10	47 11 28,75748		0,01746	8·146		6,012	
		10 1,30124			0·715		0,355
47 20	47 21 30,05872		0,01746	7·431		5,657	
		10 1,28378			0·672		0,344
47 30	47 31 31,34250		0,01745	6·759		5,313	
		10 1,26633			0·630		0,334
47 40	47 41 32,60883		0,01744	6·129		4,979	
		10 1,24889			0·590		0,324
47 50	47 51 33,85772		0,01745	5·539		4,655	
		10 1,23144			0·551		0,312
			0,01744				
48° 0'	48° 1' 35,08916"			4·988		4,343"	
		10' 1,21400"			0·513		0,302"
48 10	48 11 36,30316		0,01743	4·475		4,041	
		10 1,19657			0·477		0,292
48 20	48 21 37,49973		0,01742	3·998		3,749	
		10 1,17915			0·442		0,280
48 30	48 31 38,67888		0,01742	3·556		3,469	
		10 1,16173			0·408		0,270
48 40	48 41 39,84061		0,01740	3·148		3,199	
		10 1,14433			0·376		0,259
48 50	48 51 40,98494		0,01740	2·772		2,940	
		10 1,12693			0·345		0,248
			0,01739				
49° 0'	49° 1' 42,11187"			2·427		2,692"	
		10' 1,10954"			0·315		0,238"
49 10	49 11 43,22141		0,01737	2·112		2,454	
		10 1,09217			0·287		0,227
49 20	49 21 44,31358		0,01737	1·825		2,227	
		10 1,07480			0·259		0,215
49 30	49 31 45,38838		0,01734	1·566		2,012	
		10 1,05746			0·234		0,205
49 40	49 41 46,44584		0,01734	1·332		1,807	
		10 1,04012			0·209		0,194
49 50	49 51 47,48596		0,01732	1·123		1,613	
		10 1,02280			0·187		0,184
			0,01731				
50° 0'	50° 1' 48,50876"			0·936		1,429"	
		10' 1,00549"			0.164		0,172"
50 10	50 11 49,51425		0,01729	0·772		1,257	
		10 0,98820			0.144		0,161
50 20	50 21 50,50245		0,01727	0·628		1,096	
		10 0,97093			0.125		0,150
50 30	50 31 51,47338		0,01726	0·503		0,946	
		10 0,95367			0.107		0,140
50 40	50 41 52,42705		0,01724	0 396		0,806	
		10 0,93643			0.091		0,128
50 50	50 51 53,36348		0,01721	0·305		0,678	
		10 0,91922			0.076		0,117
			0,01721				
51° 0'	51° 1' 54,28270"			0·229		0,561"	
		10' 0,90201"			0·062		0,107"
51 10	51 11 55,18471		0,01717	0·167		0,454	
		10 0,88484			0·049		0,095
51 20	51 21 56,06955		0,01717	0·118		0,359	
		10 0,86767			0·039		0,084
51 30	51 31 56,93722		0,01712	0·079		0,275	
		10 0,85055			0·029		0,073
51 40	51 41 57,78777		0,01712	0·050		0,202	
		10 0,83343			0·021		0,061
51 50	51 51 58,62120		0,01709	0·029		0,141	
		10 0,81634			0·014		0,051
			0,01707				
52° 0'	52° 1' 59,43754"			0·015		0,090"	
		10' 0,79927"			0·009		—0,039"
52 10	52 12 0,23681		0,01703	0·006		0,051	
		10 0,78224			0·004		—0,028
52 20	52 22 1,01905		0,01701	+0·002		0,028	
		10 0,76523			0·002		—0,017
52 30	52 32 1,78428		0,01700	0·000		0,006	
		10 0,74823					—0,006
52 40	52 42 2,53251		0,01695	0·000		0,000	
		10 0,73128					+0,006
52 50	52 52 3,26379		0,01693	0·000		0,006	
		10 0,71435					+0,017
53° 0'	53° 2' 3,97814"			—0·002		0,023	

vgl. § 100.

Kugel n	Ellipsoid φ	Differenzen +	Differenzen —	$\log m$ +	Diff. —	k	Diff.
52° 0′	52° 1′ 59,43754″	10′ 0,79927″	0,01703″	0·015	0·009	0,090″	—0,039″
52 10	52 12 0,23681	10 0,78224	0,01701	0·006	0·004	0,051	—0,028
52 20	52 22 1,01905	10 0,76523	0,01700	0·002	0 002	0,023	—0,017
52 30	52 32 1,78428	10 0,74823	0,01695	0·000		0,006	+0,006
52 40	52 42 2,53251	10 0,73128	0,01693	+		0,000	+0,006
52 50	52 52 3,25379	10 0,71435	0,01690	0·000	0·002	0,006	+0,017
53° 0′	53° 2′ 3,97814″	10′ 0,69745″	0,01688″	0·002	0·004	0,023″	+0,028″
53 10	53 12 4,67559	10 0,68057	0,01684	0·006	0·009	0,051	0,040
53 20	53 22 5,35616	10 0,66373	0,01681	0·015	0·014	0,091	0,051
53 30	53 32 6,01989	10 0,64692	0,01677	0·029	0·021	0,142	0,062
53 40	53 42 6,66681	10 0,63015	0,01675	0·050	0·029	0,204	0,074
53 50	53 52 7,29696	10 0,61340	0,01672	0·079	0·040	0,278	0,085
54° 0′	54° 2′ 7,91036″	10′ 0,59668″	0,01667″	0·119	0·050	0,363″	+0,097″
54 10	54 12 8,50704	10 0,58001	0,01664	0·169	0·063	0,460	0,109
54 20	54 22 9,08705	10 0,56337	0,01661	0·232	0·077	0,569	0,120
54 30	54 32 9,65042	10 0,54676	0,01658	0·309	0·092	0,689	0,131
54 40	54 42 10,19718	10 0,53018	0,01652	0·401	0·109	0,820	0,144
54 50	54 52 10,72736	10 0,51366	0,01650	0·510	0·128	0,964	0,154
55° 0′	55° 2′ 11,24102″	10′ 0,49716″	0,01645″	0·638	0·147	1,118″	+0,167″
55 10	55 12 11,73818	10 0,48071	0,01642	0·785	0·168	1,285	0,178
55 20	55 22 12,21889	10 0,46429	0,01638	0·953	0·191	1,463	0,190
55 30	55 32 12,68318	10 0,44791	0,01633	1·144	0·214	1,653	0,202
55 40	55 42 13,13109	10 0,43158	0,01630	1·358	0·240	1,855	0,213
55 50	55 52 13,56267	10 0,41528	0,01624	1·598	0·267	2,068	0,225
56° 0′	56° 2′ 13,97795″	10′ 0,39904″	0,01621″	1·865	0·296	2,293″	+0,238″
56 10	56 12 14,37699	10 0,38283	0,01617	2·161	0·325	2,531	0,249
56 20	56 22 14,75982	10 0,36666	0,01611	2·486	0·356	2,780	0,261
56 30	56 32 15,12648	10 0,35055	0,01608	2·842	0·389	3,041	0,273
56 40	56 42 15,47703	10 0,33447	0,01602	3·231	0·423	3,314	0,285
56 50	56 52 15,81150	10 0,31845	0,01598	3·654	0·459	3,599	0,297
57° 0′	57° 2′ 16,12995″	10′ 0,30247″	0,01593″	4·113	0·496	3,896″	+0,309″
57 10	57 12 16,43242	10 0,28654	0,01588	4·609	0·535	4,205	0,321
57 20	57 22 16,71896	10 0,27066	0,01584	5·144	0·575	4,526	0,333
57 30	57 32 16,98962	10 0,25482	0,01578	5·719	0·616	4,859	0,346
57 40	57 42 17,24444	10 0,23904	0,01574	6·335	0·659	5,205	0,358
57 50	57 52 17,48348	10 0,22330	0,01567	6·994	0·704	5,568	0,370
58° 0′	58° 2′ 17,70678″	10′ 0,20763″	0,01563″	7·698	0·750	5,933″	+0,382″
58 10	58 12 17,91441	10 0,19200	0,01558	8·448	0·798	6,315	0,395
58 20	58 22 18,10641	10 0,17642	0,01552	9·246	0·846	6,710	0,407
58 30	58 32 18,28283	10 0,16090	0,01547	10·092	0·898	7,117	0,419
58 40	58 42 18,44373	10 0,14543	0,01541	10·990	0·951	7,536	0,431
58 50	58 52 18,58916	10 0,13002		11·941	1·002	7,967	0,443
59° 0′	59 2 18,71918			12·943		8,410	

vgl. § 100.

φ	$log\ (\sigma_1)$		$log\ (\sigma_2)$		$log\ (\sigma_3)$		$log\ (\sigma_4)$		$log\ (\sigma_5)$	
30°	5.52260_n	— 2651	5.99435_n	— 893	3.587	— 27	3.712	+ 91	3.976_n	+19
31	5.49609_n	2882	5.98542_n	929	3.560	30	3.803	82	3.995_n	14
32	5.46727_n	3144	5.97613_n	966	3.530	32	3.885	74	4.009_n	13
33	5.43583_n	3449	5.96647_n	1003	3.498	36	3.959	70	4.022_n	13
34	5.40134_n	3805	5.95644_n	1042	3.462	40	4.029	65	4.035_n	11
35°	5.36329_n	4232	5.94602_n	1082	3.422	44	4.094	61	4.046_n	+ 8
36	5.32097_n	4751	5.93520_n	1122	3.378	49	4.155	59	4.054_n	7
37	5.27346_n	5398	5.92398_n	1163	3.329	57	4.214	56	4.061_n	4
38	5.21948_n	6231	5.91235_n	1206	3.272	66	4.270	53	4.065_n	+ 3
39	5.15717_n	7357	5.90029_n	1249	3.206	78	4.323	52	4.068_n	— 1
40°	5.08360_n	8900	5.88780_n	1295	3.128	96	4.375	51	4.067_n	— 3
41	4.99460_n	11306	5.87485_n	1342	3.032	124	4.426	48	4.064_n	4
42	4.88154_n	15413	5.86143_n	1389	2.908	176	4.474	49	4.058_n	10
43	4.72741_n	24225	5.84754_n	1438	2.732	301	4.523	46	4.048_n	15
44	4.48516_n		5.83316_n	1490	2.431		4.569	46	4.033_n	20
45°	3.88570_n	+	5.81826_n	1543	$-\infty$	+	4.615	45	4.013_n	—26
46	4.18121_n	39981	5.80283_n	1598	2.431_n	301	4.660	45	3.987_n	35
47	4.58102_n	20411	5.78685_n	1654	2.732_n	176	4.705	44	3.952_n	45
48	4.78513_n	13798	5.77031_n	1714	2.908_n	124	4.749	43	3.907_n	62
49	4.92311_n	10420	5.75317_n	1775	3.032_n	86	4.792	43	3.845_n	—86
50°	5.02731_n	8358	5.73542_n	1839	3.128_n	78	4.835	42	3.759_n	127
51	5.11089_n	6965	5.71703_n	1906	3.206_n	66	4.877	43	3.632_n	219
52	5.18054_n	5958	5.69797_n	1976	3.272_n	57	4.920	42	3.413_n	607
53	5.24012_n	5194	5.67821_n	2049	3.329_n	49	4.962	42	2.806_n	
54	5.29296_n	4593	5.65772_n	2125	3.378_n	44	5.004	42	3.202	
55	5.33799_n		5.63647_n		3.422_n		5.046		3.617	

Besondere Tafel für log (σ_1).

φ	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Diff.
45°	3.88570_n	3.58776_n	1.73612_n	3.61198	3.87962	4.05674	+ 12547
46	4.18221	4.27944	4.35882	4.42590	4.48899	4.53521	4581
47	4.58102	4.62244	4.66024	4.69500	4.72718	4.75712	2801
48	4.78513	4.81142	4.83619	4.85963	4.88185	4.90298	2013
49	4.92311	4.94234	4.96074	4.97888	4.99532	5.01162	1569
50°	5.02731	5.04244	5.05705	5.07118	5.08488	5.09806	1283
51	5.11089	5.12334	5.13542	5.14717	5.15859	5.16971	1083
52	5.18054	5.19109	5.20138	5.21141	5.22121	5.23077	935
53	5.24012	5.24925	5.25819	5.26692	5.27548	5.28386	820
54	5.29206	5.30009	5.30797	5.31569	5.32327	5.33076	729
55	5.33799						

In der Gegend von $\varphi = 45°$, wo (σ_1) durch Null geht, braucht man *log* (σ_1) nur auf sehr wenige Stellen, man kann daher trotz der Ungleichheit der Differenzen mit hinreichender Genauigkeit proportional oder graphisch interpolieren.

vgl. § 106.

φ	$log\ (\lambda_1)$		$log\ (\lambda_2)$		$log\ (\lambda_3)$		$log\ (\lambda_4)$		$log\ (\lambda_5)$	
		+		—		+		—		+
30°	5.99325$_n$	882	5.99435$_n$	893	4.065$_n$	19	4.012$_n$	9	4.013$_n$	22
31	6.00207$_n$	880	5.98542$_n$	929	4.084$_n$	20	4.003$_n$	16	4.035$_n$	19
32	6.01087$_n$	877	5.97613$_n$	966	4.104$_n$	19	3.987$_n$	21	4.054$_n$	19
33	6.01964$_n$	873	5.96647$_n$	1003	4.123$_n$	19	3.966$_n$	28	4.073$_n$	17
34	6.02837$_n$	867	5.95644$_n$	1042	4.142$_n$	18	3.938$_n$	38	4.090$_n$	16
35°	6.03704$_n$	862	5.94602$_n$	1082	4.160$_n$	17	3.900$_n$	50	4.106$_n$	15
36	6.04566$_n$	854	5.93520$_n$	1122	4.177$_n$	17	3.850$_n$	68	4.121$_n$	13
37	6.05420$_n$	845	5.92398$_n$	1163	4.194$_n$	17	3.782$_n$	97	4.134$_n$	12
38	6.06265$_n$	833	5.91235$_n$	1206	4.211$_n$	16	3.685$_n$	140	4.146$_n$	11
39	6.07098$_n$	829	5 90029$_n$	1249	4.227$_n$	16	3.545$_n$	—	4.157$_n$	9
40°	6.07927$_n$	818	5.88780$_n$	1295	4.243$_n$	15	3.262$_n$	+	4.166$_n$	8
41	6.08745$_n$	805	5.87485$_n$	1342	4.258$_n$	15	1.409$_n$		4.174$_n$	7
42	6.09550$_n$	793	5.86143$_n$	1389	4.273$_n$	14	3.331$_n$	326	4.181$_n$	4
43	6.10343$_n$	781	5.84754$_n$	1438	4.287$_n$	14	3.657$_n$	204	4.185$_n$	3
44	6.11124$_n$	768	5.83316$_n$	1490	4.301$_n$	13	3.861$_n$	152	4.188$_n$	±
45°	6.11892$_n$	754	5.81826$_n$	1543	4.314$_n$	13	4.013$_n$	125	4.189$_n$	1
46	6.12646$_n$	741	5.80283$_n$	1598	4.327$_n$	13	4.138$_n$	107	4.188$_n$	3
47	6.13387$_n$	726	5.78685$_n$	1654	4.340$_n$	12	4.245$_n$	95	4.185$_n$	6
48	6.14113$_n$	712	5.77031$_n$	1714	4.352$_n$	12	4.340$_n$	87	4.179$_n$	10
49	6.14825$_n$	697	5.75317$_n$	1775	4.364$_n$	12	4.427$_n$	79	4.169$_n$	13
50°	6.15522$_n$	681	5.73542$_n$	1839	4.376$_n$	11	4.506$_n$	74	4.156$_n$	17
51	6.16203$_n$	666	5.71703$_n$	1906	4.387$_n$	11	4.580$_n$	70	4.139$_n$	22
52	6.16869$_n$	650	5.69797$_n$	1976	4.398$_n$	10	4.650$_n$	67	4.117$_n$	30
53	6.17519$_n$	634	5.67821$_n$	2049	4.408$_n$	10	4.716$_n$	64	4.087$_n$	38
54	6.18153$_n$	618	5.65772$_n$	2125	4.418$_n$	10	4.781$_n$	61	4.049$_n$	50
55°	6.18771$_n$		5.63647$_n$		4.428$_n$		4.842$_n$		3.999$_n$	

Besondere Tafel für $log\ (\sigma_2) = log\ (\lambda_2)$.

φ	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Diff.
							—
45°	5.81826$_n$	5.81572$_n$	5.81317$_n$	5.81061$_n$	5.80803$_n$	5.80544$_n$	261
46	5.80283$_n$	5.80021$_n$	5.79757$_n$	5.79491$_n$	5.79224$_n$	5.78956$_n$	271
47	5.78685$_n$	5.78414$_n$	5.78140$_n$	5.77865$_n$	5.77589$_n$	5.77311$_n$	280
48	5.77031$_n$	5.76749$_n$	5.76466$_n$	5.76182$_n$	5.75895$_n$	5.75607$_n$	290
49	5.75317$_n$	5.75026$_n$	5.74733$_n$	5.74438$_n$	5.74141$_n$	5.73842$_n$	300
50°	5.73542$_n$	5.73240$_n$	5.72936$_n$	5.72631$_n$	5.72323$_n$	5.72014$_n$	311
51	5.71703$_n$	5.71390$_n$	5.71075$_n$	5.70759$_n$	5.70440$_n$	5.70120$_n$	323
52	5.69797$_n$	5.69473$_n$	5.69146$_n$	5.68818$_n$	5.68488$_n$	5.68156$_n$	335
53	5.67821$_n$	5.67485$_n$	5.67147$_n$	5.66806$_n$	5.66464$_n$	5.66119$_n$	347
54	5.65772$_n$	5.65424$_n$	5.65073$_n$	5.65720$_n$	5.64364$_n$	5.64007$_n$	360
55	5.63647$_n$						

vgl. § 106.

Übersicht der Haupt-Bezeichnungen, welche in den mathematischen Teilen dieses Buches angewendet sind.

Meridian-Ellipse.

Gleichung der Meridian-Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Grosse Halbaxe $= a.$

Kleine Halbaxe $= b.$

Polar Krümmungs-Halbmesser $= c = \frac{a^2}{b}.$

Excentricitäten: $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, $e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} \quad , \quad e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \quad , \quad (1 - e^2)(1 + e'^2) = 1.$$

$$a = c\sqrt{1 - e^2} = \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2}} \quad , \quad b = c(1 - e^2) = \frac{c}{1 + e'^2}.$$

Geographische Breite (oder Polhöhe) $= \varphi.$ $\qquad tang\, \varphi = t.$

$$W^2 = 1 - e^2 \sin^2 \varphi \qquad V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi.$$

$$\frac{W^2}{1 - e^2} = V^2 \quad , \quad V^2 = 1 + \eta^2 \quad , \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi.$$

Meridian-Krümmungs-Halbmesser: $M = \frac{c}{V^3}.$

Quer-Krümmungs-Halbmesser: $N = \frac{c}{V}.$

Mittlerer Krümmungs-Halbmesser: $r = \sqrt{M N} = \frac{c}{V^2}.$

Haupt-Krümmungs-Verhältnis: $\frac{N}{M} = V^2.$

Reduzierte Breite $= \psi.$

$$tang\, \psi = tang\, \varphi \sqrt{1 - e^2}. \qquad tang\, \varphi = tang\, \psi \sqrt{1 + e'^2}.$$



